Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. К. Логинов, О конструкции мультиинстантонов в пространствах размерности $d \leq 8$, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 2, 191–197

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1894>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 15:59:02

© 2005 г.

Е. К. Логинов*

О КОНСТРУКЦИИ МУЛЬТИИНСТАНТОНОВ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ $d \leq 8$

Изучаются уравнения автодуальности для калибровочных полей в евклидовых и псевдоевклидовых пространствах размерности $d = 8$ и $d = 7$. Находятся новые решения таких уравнений.

Ключевые слова: калибровочные поля, автодуальность, мультиинстантоны.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, электромагнитные, слабые и сильные взаимодействия описываются калибровочными полями группы $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$. Динамика этих полей задается уравнениями Янга–Миллса (ЯМ) в пространстве размерности $d = 4$, поэтому нахождение нетривиальных решений данных уравнений представляет значительный интерес. В последние годы повышенное внимание было обращено к калибровочным волновым уравнениям в пространствах размерности большей, чем четыре, поскольку возникла надежда получить физически интересные теории посредством размерной редукции. Такие уравнения появляются в многомерной теории супергравитации и в низкоэнергетическом пределе теории суперструн [1]. Использование решений уравнений ЯМ в размерности $d > 4$ позволяет получить солитонные решения в таких теориях [2]. Кроме того, наложение условий симметрии на калибровочные теории ЯМ в d измерениях приводит к теории Янга–Миллса–Хигса (ЯМХ) в $k < d$ измерениях [3]. И потому решения уравнения ЯМХ в $d = 4$ могут быть получены из решений уравнений ЯМ в размерности $d > 4$.

В 1983 году Корриган с соавторами [4] предложили обобщение уравнений автодуальности на случай $d > 4$:

$$f_{mnp} F^{ps} = \lambda F_{mn}, \quad (1)$$

где $\lambda = \text{const}$, а f_{mnp} — полностью антисимметричный тензор с постоянными числовыми коэффициентами. В силу тождества Бианки всякое решение уравнений Корригана (1) (мы будем их называть CDFN-уравнениями) удовлетворяет уравнениям ЯМ.

*Ивановский государственный университет, Иваново, Россия. E-mail: loginov@ivanovo.ac.ru

Поэтому одним из методов получения решений уравнений ЯМ является поиск решений CDFN-уравнений. Некоторые из них были получены в работах [5]. В данной работе мы находим новые решения CDFN-уравнений.

Статья организована следующим образом. В разделах 2 и 3 приведены основные факты об алгебрах Кэли–Диксона (КД) и связанных с ними алгебрах Ли. В разделах 4 и 5 находятся решения CDFN-уравнений в размерностях $d = 8$ и $d = 7$, соответственно.

2. АЛГЕБРА КД

Напомним, что алгебра A , удовлетворяющая тождествам

$$x^2y = x(xy), \quad yx^2 = (yx)x, \quad (2)$$

называется альтернативной. Важнейшим примером альтернативной неассоциативной алгебры является алгебра КД. Напомним ее конструкцию (см. [6]).

Пусть A – алгебра над полем F характеристики $\neq 2$ с инволюцией $x \rightarrow \bar{x}$. Зафиксируем $0 \neq \alpha \in F$ и определим на векторном пространстве $(A, \alpha) = A \oplus A$ операцию умножения

$$(x_1, y_1)(x_2, y_2) = (x_1x_2 - \alpha\bar{y}_2y_1, y_2x_1 + y_1\bar{x}_2).$$

Полученная алгебра (A, α) называется алгеброй, полученной из A с помощью процесса КД. Ясно, что A изоморфно вкладывается в (A, α) и $\dim(A, \alpha) = 2 \dim A$. Пусть $e = (0, 1)$, тогда $e^2 = -\alpha$ и $(A, \alpha) = A \oplus Ae$. Для произвольного элемента $z = x + ye$ в (A, α) положим $\bar{z} = \bar{x} - ye$. Тогда отображение $z \rightarrow \bar{z}$ есть инволюция алгебры (A, α) , продолжающая инволюцию алгебры A . Таким образом, последовательно получаются следующие альтернативные алгебры:

- 1) F – поле;
- 2) $\mathbb{C}(\alpha) = (F, \alpha)$ – поле, если многочлен $x^2 + \alpha$ неприводим над F ; в противном случае $\mathbb{C}(\alpha) \simeq F \oplus F$;
- 3) $\mathbb{H}(\alpha, \beta) = (\mathbb{C}(\alpha), \beta)$ – алгебра обобщенных кватернионов; эта алгебра ассоциативна, но некоммутативна;
- 4) $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma) = (\mathbb{H}(\alpha, \beta), \gamma)$ – алгебра КД.

На алгебре КД индуктивный процесс построения альтернативных алгебр обрывается.

Алгебры типа 1–4 называются композиционными. На любой из них существует невырожденная квадратичная форма (норма) $n(x) = x\bar{x}$, удовлетворяющая равенству $n(xy) = n(x)n(y)$. В частности, над полем $\mathbb{R}$ вещественных чисел описанная конструкция дает 3 расщепляемых алгебры (если $\alpha = \beta = \gamma = -1$) и 4 алгебры с делением (если $\alpha = \beta = \gamma = 1$): само поле $\mathbb{R}$, поле комплексных чисел $\mathbb{C}$, алгебру кватернионов $\mathbb{H}$ и алгебру чисел Кэли (октонионов) $\mathbb{O}$, взятые с евклидовой нормой $n(x) = |x|$. Заметим также, что всякая простая неассоциативная альтернативная алгебра изоморфна алгебре $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$.

Пусть A – алгебра КД, и пусть $a \in A$. Обозначим через R_a и L_a операторы правого и левого умножения на a :

$$xR_a = xa, \quad xL_a = ax.$$

Из тождеств (2) следует тогда, что

$$R_{ab} - R_a R_b = [R_a, L_b] = [L_a, R_b] = L_{ba} - L_a L_b. \quad (3)$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathcal{L}(A)$, порожденную всеми операторами R_x и L_x , где $x \in A$. Выделим в $\mathcal{L}(A)$ подпространства $R(A)$, $S(A)$ и $D(A)$, порожденные операторами R_x , $S_x = R_x + 2L_x$ и $2D_{x,y} = [S_x, S_y] + S_{[x,y]}$, соответственно. Используя тождества (3), легко показать, что

$$3[R_x, R_y] = D_{x,y} + S_{[x,y]}, \quad (4)$$

$$[R_x, S_y] = R_{[x,y]}, \quad (5)$$

$$[R_x, D_{y,z}] = R_{[x,y,z]}, \quad (6)$$

$$[S_x, S_y] = D_{x,y} - S_{[x,y]}, \quad (7)$$

$$[S_x, D_{y,z}] = S_{[x,y,z]}, \quad (8)$$

$$[D_{x,y}, D_{z,t}] = D_{[x,z,t],y} + D_{x,[y,z,t]}, \quad (9)$$

где $[x, y, z] = [x, [y, z]] - [y, [z, x]] - [z, [x, y]]$. Из тождеств (4)–(9) следует, что алгебра $\mathcal{L}(A)$ разлагается в прямую сумму

$$\mathcal{L}(A) = R(A) \oplus S(A) \oplus D(A)$$

подалгебр Ли $D(A)$, $D(A) \oplus S(A)$ и векторного пространства $R(A)$.

В частности, если A – вещественная алгебра с делением, то алгебры $D(A)$ и $D(A) \oplus S(A)$ изоморфны компактным алгебрам Ли g_2 и $so(7)$, соответственно. Если же A – расщепляемая вещественная алгебра, то алгебры $D(A)$ и $D(A) \oplus S(A)$ изоморфны некомпактным алгебрам Ли g'_2 и $so(3, 4)$.

3. ОСНОВНЫЕ ТОЖДЕСТВА

Пусть A – вещественное линейное пространство с невырожденной симметричной метрикой g сигнатуры $(8, 0)$ или $(4, 4)$. Выберем в A базис $1, e_1, \dots, e_7$, в котором

$$g = \text{diag}(1, \alpha, \beta, \alpha\beta, \gamma, \alpha\gamma, \beta\gamma, \alpha\beta\gamma), \quad (10)$$

где $\alpha, \beta, \gamma = \pm 1$. Определим умножение

$$e_i e_j = -g_{ij} + c_{ij}^k e_k, \quad (11)$$

где $c_{ijk} = c_{ij}{}^s g_{sk}$ — полностью антисимметричный тензор, элементы которого отличны от нуля, только если

$$c_{123} = c_{145} = c_{167} = c_{246} = c_{275} = c_{374} = c_{365} = 1.$$

Умножение (11) превращает A в линейную алгебру. Легко проверить, что алгебра A изоморфна алгебре $\mathbb{O}(\alpha, \beta, \gamma)$.

В базисе $1, e_1, \dots, e_7$ операторы R_{e_i} и L_{e_i} представляются в виде

$$R_{e_i} = E_{i0} + \frac{1}{2}c_i{}^{jk}E_{jk}, \quad L_{e_i} = E_{i0} - \frac{1}{2}c_i{}^{jk}E_{jk}, \quad (12)$$

где E_{mn} — генераторы алгебры Ли $\mathcal{L}(A)$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям

$$[E_{mn}, E_{ps}] = g_{mp}E_{ns} - g_{ms}E_{np} - g_{np}E_{ms} + g_{ns}E_{mp}.$$

Теперь пусть G — матричная группа Ли, соответствующая алгебре Ли $D(A) \oplus S(A)$. В пространстве A с метрикой (10) введем полностью антисимметричный G -инвариантный тензор f_{mnp} (ср. [7]):

$$\begin{aligned} f_{ijk0} &= c_{ijk}, \\ f_{ijkl} &= g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl} + c_{ijm}c_{kl}{}^m, \end{aligned}$$

где $i, j, k, l \neq 0$. Выписывая ненулевые компоненты f_{mnp} в явном виде:

$$\begin{aligned} f_{0123} &= f_{0145} = f_{0167} = f_{0246} = f_{0275} = f_{0374} = f_{0365} = 1, \\ f_{4567} &= f_{2367} = f_{2345} = f_{1357} = f_{1364} = f_{1265} = f_{1274} = 1, \end{aligned}$$

легко убедиться, что тензор f_{mnp} удовлетворяет тождеству

$$f_{mnij}f_{ps}{}^{ij} = 6(g_{mp}g_{ns} - g_{ms}g_{np}) + 4f_{mnp}. \quad (13)$$

Зададим проектор $\tilde{f}_{mnp}$ алгебры $\mathcal{L}(A)$ на подпространство $D(A) \oplus S(A)$, полагая

$$\tilde{f}_{mnp} = \frac{1}{8}(3g_{mp}g_{ns} - 3g_{ms}g_{np} - f_{mnp}). \quad (14)$$

Из тождества (13) следует тогда, что

$$f_{mnij}\tilde{f}_{ps}{}^{ij} = -2\tilde{f}_{mnp}. \quad (15)$$

Заметим, что тождества (13) и (15) хорошо известны. Они эффективно использовались при нахождении всех известных $\text{Spin}(7)$ -инвариантных решений CDFN-уравнений (см. [5]).

4. РЕШЕНИЯ CDFN-УРАВНЕНИЙ В РАЗМЕРНОСТИ $d = 8$

Определим элементы $\tilde{E}_{mn}$ подалгебры $D(A) \oplus S(A)$ следующими равенствами:

$$\tilde{E}_{mn} = \tilde{f}_{mn}{}^{ij} E_{ij}. \quad (16)$$

Используя тождества (7)–(9) и (12), находим их коммутаторы

$$[\tilde{E}_{mn}, \tilde{E}_{ps}] = \frac{3}{4}(\tilde{E}_{m[p} g_{s]n} - \tilde{E}_{n[p} g_{s]m}) - \frac{1}{8}(f_{mn}{}^k{}_{[p} \tilde{E}_{s]k} - f_{ps}{}^k{}_{[m} \tilde{E}_{n]k}). \quad (17)$$

Теперь можно перейти к построению решений CDFN-уравнений. Выбираем анзац A_m в виде

$$A_m = \frac{4}{3} \frac{\lambda^\dagger y^i}{1 + y^\dagger y} \tilde{E}_{mi}, \quad (18)$$

где y – вектор-столбец с элементами $y_1, \dots, y_N$ из алгебры КД такими, что

$$\begin{aligned} y^\dagger &= (y_1^k, \dots, y_N^k) \bar{e}_k, & y_I^k &\in \mathbb{R}, \\ \lambda^\dagger &= (\lambda_1, \dots, \lambda_N), & \lambda_I &\in \mathbb{R}^+, \\ y_I^k &= (b_{IJ}^k + \delta_{IJ} x^k) \lambda_J, & b_{IJ}^k &= b_{JI}^k. \end{aligned}$$

Здесь мы полагаем, что индекс k пробегает значения от 0 до 7, а элемент $e_0 = 1$. Используя коммутационные соотношения (17), получаем выражение для тензора напряженности:

$$F_{mn} = -\frac{4}{9} \frac{\lambda^\dagger \{ (6 + 6y^\dagger y - 3y^i y_i^\dagger) \tilde{E}_{mn} + 8\tilde{f}_{mn}{}^{is} \tilde{E}_{sj} y^j y_i^\dagger \} \lambda}{(1 + y^\dagger y)^2}. \quad (19)$$

В силу тождеств (15), (16) очевидно, что тензор напряженности (19) удовлетворяет CDFN-уравнениям (1) как для евклидовой, так и для псевдоевклидовой метрики вида (10).

Заметим также, что полученное N -инстантонное решение (18) зависит от $9N$ параметров и является аналогом хорошо известного решения т'Хоофта в размерности $d = 4$ (см. [8]).

5. РЕШЕНИЯ CDFN-УРАВНЕНИЙ В РАЗМЕРНОСТИ $d = 7$

Рассмотренный выше метод нахождения решений уравнений ЯМ может быть использован для нахождения решений уравнений автодуальности в размерности $d < 8$. Пусть B_α – собственная подалгебра алгебры A . Тогда подгруппа H_α группы автоморфизмов алгебры A , оставляющая неподвижными элементы B_α , называется группой Галуа алгебры A над B_α . Описание групп Галуа алгебр КД над собственными подалгебрами известно [9]. Так, если A – вещественная алгебра с делением и $B_1 \simeq \mathbb{R}$, $B_2 \simeq \mathbb{C}$, $B_3 \simeq \mathbb{H}$, то

$$G \simeq \text{Spin}(7), \quad H_1 \simeq G_2, \quad H_2 \simeq SU(3), \quad H_3 \simeq SU(2).$$

Если же A – вещественная расщепляемая алгебра, то при таком же выборе подалгебр B_α

$$G \simeq \text{Spin}(4, 3), \quad H_1 \simeq G'_2, \quad H_2 \simeq SU(2, 1), \quad H_3 \simeq SU(1, 1).$$

Очевидно, что ортогональное дополнение $B_\alpha^\perp$ подпространства B_α в A является H_α -инвариантным подпространством размерности $d_\alpha = 8 - \dim H_\alpha$. Теперь легко построить полностью антисимметричный H_α -инвариантный d_α -тензор $f_{mnp s}^{(\alpha)}$ четвертого ранга. Он будет проекцией d -тензора $f_{mnp s} \in \Lambda^4(A)$ на подпространство $\Lambda^4(B_\alpha)$. Ненулевые компоненты $f_{mnp s}^{(\alpha)}$ можно выбрать в виде

$$\begin{aligned} f_{4567}^{(1)} = f_{2367}^{(1)} = f_{1274}^{(1)} = f_{1357}^{(1)} = f_{1364}^{(1)} = f_{1265}^{(1)} = f_{2345}^{(1)} = 1, \\ f_{1364}^{(2)} = f_{1265}^{(2)} = f_{2345}^{(2)} = 1, \\ f_{2345}^{(3)} = 1. \end{aligned}$$

Такой выбор компонент $f_{mnp s}^{(\alpha)}$ позволяет легко получить аналоги тождеств (13)–(17). В частности, коммутационные соотношения (17) принимают вид

$$[\tilde{E}_{mn}^\alpha, \tilde{E}_{ps}^\alpha] = \frac{3-\alpha}{4-\alpha} (\tilde{E}_{m[p}^\alpha g_{s]n} - \tilde{E}_{n[p}^\alpha g_{s]m}) - \frac{1}{8-2\alpha} (f_{mn}^{\alpha \ k} \tilde{E}_{[p}^\alpha \tilde{E}_{s]k} - f_{ps}^{\alpha \ k} \tilde{E}_{[m}^\alpha \tilde{E}_{n]k}).$$

Заметим, что выбор A_m в виде

$$A_m = k \frac{\lambda^\dagger y^i}{1 + y^\dagger y} \tilde{E}_{mi}^\alpha \quad (20)$$

не приводит к автодуальному тензору напряженности при $\alpha = 2$, т.е. когда калибровочной группой является группа $SU(3)$ или $SU(2, 1)$. Формально это связано с некоторой асимметрией тензора $f_{mnp s}^{(2)}$ относительно перестановок его индексов (пары индексов $(1, 6)$, $(3, 4)$ и $(2, 5)$ встречаются у ненулевых компонент тензора $f_{mnp s}^{(2)}$ чаще, чем другие). Напротив, при $\alpha = 1$ или $\alpha = 3$ выбор анзаца A_m в виде (20) приводит к автодуальному тензору напряженности. Например, если $\alpha = 1$ и $k = 3/2$, то

$$F_{mn} = -\frac{3}{2} \frac{\lambda^\dagger \{ (2 + 2y^\dagger y - y^i y_i^\dagger) \tilde{E}_{mn}^1 + 3 \tilde{f}_{mn}^{is} \tilde{E}_{sj}^1 y^j y_i^\dagger \} \lambda}{(1 + y^\dagger y)^2},$$

и мы имеем N -инстантонное решение в размерности $d = 7$, зависящее от $8N$ параметров. Если же $\alpha = 3$ и $k = 2$, то получаем решение т'Хоофта в размерности $d = 4$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 04-02-16324).

Список литературы

- [1] *М. Грин, Дж. Шварц, Э. Виттен.* Теория суперструн. М.: Мир, 1990.
- [2] *J. A. Harvey, A Strominger.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 66. P. 549; *M. Gunaydin, H. Nicolai.* Phys. Lett. B. 1995. V. 351. P. 169.
- [3] *A. S. Schwarz.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 66. P. 549; *N. S. Manton.* Nucl. Phys. B. 1979. V. 158. P. 141.
- [4] *E. Corrigan, C. Devchand, D. B. Fairlie, J. Nuyts.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 214. P. 452.
- [5] *D. B. Fairlie, J. Nuyts.* J. Phys. A. 1984. V. 17. P. 2867; *S. Fubini, H. Nicolai.* Phys. Lett. B. 1985. V. 155. P. 369; *T. A. Иванова, А. Д. Попов.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 316; *E. K. Loginov.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 6599.
- [6] *К. А. Жевлаков, А. М. Слинко, И. П. Шестаков, А. И. Ширшов.* Кольца, близкие к ассоциативным. М.: Наука, 1978.
- [7] *R. Dunderer, F. Gursey, C.-H. Tze.* J. Math. Phys. 1984. V. 25. P. 1496.
- [8] *P. Раджараман.* Солитоны и инстантоны в квантовой теории поля. М.: Мир, 1985.
- [9] *N. Jacobson.* Rend. Circ. Mat. Palermo. 1958. V. 2. P. 55.

Поступила в редакцию 4.II.2005 г.