Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ж. И. Абдуллаев, Теория возмущений для двухчастичного оператора Шредингера на одномерной решетке, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 2, 212–220

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1897>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:07:40

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА ОДНОМЕРНОЙ РЕШЕТКЕ

Рассматривается двухчастичный оператор Шредингера $H(k)$ на одномерной решетке $\mathbb{Z}$. Оператор $H(\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$. Если потенциал $\hat{v}$ возрастает на $\mathbb{Z}_+$, то из этих собственных значений только $z_0(\pi)$ является простым, а остальные двукратными. Доказано, что двукратные собственные значения $z_m(\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, оператора $H(\pi)$ расщепляются на два невырожденных собственных значения $z_m^-(k)$ и $z_m^+(k)$ при малых изменениях $k \in (\pi - \delta, \pi)$. Установлено, что $z_m^-(k) < z_m^+(k)$ и получена оценка величины $z_m^+(k) - z_m^-(k)$ при $k \in (\pi - \delta, \pi)$. Собственные значения $z_0(k)$ и $z_1^-(k)$ возрастают на $[\pi - \delta, \pi]$. Если $(\Delta \hat{v})(m) > 0$, то этим свойством обладает и $z_m^\pm(k)$ при $m \geq 2$.

Ключевые слова: гамильтониан, оператор Шредингера, полный квазиимпульс, собственное значение, теория возмущений

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория возмущений точечных спектров подробно изложена в книгах [1], [2]. Дискретный спектр двухчастичного непрерывного оператора Шредингера

$$h_\lambda = -\Delta + \lambda V$$

исследовался многими авторами, причем условия на потенциал V формулировались в его координатном представлении. Условия конечности отрицательного спектра и отсутствия положительных собственных значений оператора h_λ приведены в [2]. Задачи теории возмущений собственных значений для двухчастичного оператора Шредингера рассмотрены также в работах [3].

Природа появления связанных состояний двухчастичных кластерных операторов при малых значениях параметра кластерности впервые подробно исследовалась в [4], а потом в более общей ситуации в [5]. Методы теории возмущений для вложенных собственных значений обобщенной модели Фридрихса применены в [6].

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: jabdullaev@mail.ru

Исследование связанных состояний двухчастичного гамильтониана H на решетке сводится к изучению собственных значений семейства операторов Шредингера $H(k)$, $k \in \mathbb{T} \equiv (-\pi, \pi]$ (см. формулу (2.4)). Мы рассмотрим дискретный спектр оператора $H(k)$. Если откинуть постоянный член в $H_0(k)$, то оператор $H_0(k) = -W \cos(k/2)$ равномерно сходится к нулю при $k \rightarrow \pi$. В этом случае оператор $H_0(k)$ можно рассматривать как возмущение к оператору V . Этот случай “сильной связи” характерен именно для решетки, поскольку в непрерывном случае оператор $H_0(k)$ неограничен. Если мы положим $k = \pi$, то оператор $H(\pi) = V$ имеет бесконечное число собственных значений $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$, $m \in \mathbb{Z}$. Если потенциал $\hat{v}(m)$ возрастает с ростом m , то наименьшее собственное значение $z_0(\pi)$ невырожденное, а все остальные $z_m(\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, имеют кратность два. При малых изменениях k двукратные собственные значения $z_m(\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, расщепляются на два невырожденных собственных значения $z_m^\pm(k)$, $m \in \mathbb{N}$. Мы докажем, что $z_m^-(k) < z_m^+(k)$, $m \in \mathbb{N}$, и получим оценку $z_m^+(k) - z_m^-(k) \leq C(\pi - k)^{2m}$ при $k \in (\pi - \delta, \pi)$.

2. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНА

Свободному гамильтониану $\hat{H}_0$ системы двух квантовых частиц на одномерной решетке $\mathbb{Z}$ обычно соответствует ограниченный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^2) = \ell_2(\mathbb{Z}) \otimes \ell_2(\mathbb{Z})$ по формуле

$$\hat{H}_0 = -\frac{1}{2m_1}\Delta_{x_1} - \frac{1}{2m_2}\Delta_{x_2}.$$

Здесь m_1, m_2 означают массы частиц, которые в дальнейшем считаются равными единице, $\Delta_{x_1} = \Delta \otimes I$ и $\Delta_{x_2} = I \otimes \Delta$, где решетчатый лапласиан Δ есть разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел,

$$(\Delta\hat{\psi})(x) = \hat{\psi}(x+1) - 2\hat{\psi}(x) + \hat{\psi}(x-1), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}).$$

Полный гамильтониан $\hat{H}$ действует в гильбертовом пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$ и состоит из суммы свободного гамильтониана $\hat{H}_0$ и потенциала взаимодействия $\hat{V}_2$ двух частиц [7]:

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}_2, \tag{2.1}$$

где

$$(\hat{V}_2\hat{\psi})(x_1, x_2) = \hat{v}(x_1 - x_2)\hat{\psi}(x_1, x_2), \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^2).$$

Всюду в дальнейшем относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(x) = \hat{v}(-x) \leq 0, \quad x \in \mathbb{Z}, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x|^\kappa \hat{v}(x) = 0, \quad \kappa > 1. \tag{2.2}$$

Сделаем дополнительное предположение.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ. Функция $\hat{v}: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ возрастает на $\mathbb{Z}_+$, т.е.

$$\hat{v}(0) < \hat{v}(1) < \dots < \hat{v}(n) < \dots \quad (2.3)$$

При выполнении условий (2.2) гамильтониан $\hat{H}$ является ограниченным самосопряженным оператором в пространстве $\ell_2(\mathbb{Z}^2)$.

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье $\mathcal{F}: L_2(\mathbb{T}^2) \rightarrow \ell_2(\mathbb{Z}^2)$, где $L_2(\mathbb{T}^2) = L_2(\mathbb{T}) \otimes L_2(\mathbb{T})$, $L_2(\mathbb{T})$ – гильбертово пространство функций, определенных на $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, периодических с периодом 2π и квадратично-интегрируемых на $\mathbb{T} \equiv (-\pi, \pi]$.

Гамильтониан H (в импульсном представлении) действует как ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T}^2)$ и имеет вид

$$H = \mathcal{F}^{-1} \hat{H} \mathcal{F} \equiv H_0 + V_2.$$

Свободный гамильтониан H_0 есть оператор умножения в $L_2(\mathbb{T}^2)$:

$$(H_0 f)(k_1, k_2) = (\varepsilon(k_1) + \varepsilon(k_2)) f(k_1, k_2),$$

где $\varepsilon(q) = 1 - \cos q$ – энергия отдельной частицы с импульсом $q \in \mathbb{T}$. Оператор взаимодействия V_2 двух частиц действует в $L_2(\mathbb{T}^2)$ по формуле

$$(V_2 f)(k_1, k_2) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{T}^2} v(k_1 - k'_1) \delta(k_1 + k_2 - k'_1 - k'_2) f(k'_1, k'_2) dk'_1 dk'_2.$$

Здесь $\delta(k)$ – дельта-функция Дирака, v есть преобразование Фурье функции $\hat{v}$. Из условия (2.2) следует, что $v(q)$ есть четная, вещественнозначная, непрерывная функция на $\mathbb{T}$. Полный гамильтониан H коммутирует с группой унитарных операторов U_s , $s \in \mathbb{Z}$:

$$(U_s f)(k_1, k_2) = e^{-is(k_1 + k_2)} f(k_1, k_2), \quad f \in L_2(\mathbb{T}^2).$$

Отсюда следует, что существуют разложения пространства $L_2(\mathbb{T}^2)$, операторов U_s и H в прямые интегралы [2]:

$$L_2(\mathbb{T}^2) = \int_{\mathbb{T}} \oplus L_2(\mathbb{F}_k) dk, \quad U_s = \int_{\mathbb{T}} \oplus U_s(k) dk, \quad H = \int_{\mathbb{T}} \oplus \tilde{H}(k) dk.$$

Здесь

$$\mathbb{F}_k = \{(k_1, k_2) \in \mathbb{T}^2: k_1 + k_2 = k, \quad k \in \mathbb{T}\},$$

$U_s(k)$ – оператор умножения на функцию e^{-isk} в пространстве $L_2(\mathbb{F}_k)$. Слойный оператор $\tilde{H}(k)$ также действует в $L_2(\mathbb{F}_k)$ по формуле

$$(\tilde{H}(k)f)(q, k - q) = (\varepsilon(q) + \varepsilon(k - q)) f(q, k - q) + (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{T}} v(q - s) f(s, k - s) ds$$

и унитарно эквивалентен оператору $H(k)$, действующему в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{T})$ по формуле

$$(H(k)f)(q) = \left(2 - 2 \cos \frac{k}{2} \cos q\right) f(q) + (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{T}} v(q-s) f(s) ds. \quad (2.4)$$

Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного преобразования

$$u_k: L_2(\mathbb{T}_k) \rightarrow L_2(\mathbb{T}), \quad (u_k g)(q) = g\left(\frac{k}{2} - q, \frac{k}{2} + q\right).$$

Оператор $H(k) = H_0(k) + V$ называется оператором Шредингера, $H_0(k)$ есть оператор умножения на функцию $\varepsilon_k(q) = 2 - 2 \cos(k/2) \cos q$, т.е.

$$(H_0(k)f)(q) = \varepsilon_k(q) f(q), \quad (2.5)$$

V — интегральный оператор в $L_2(\mathbb{T})$, порожденный ядром $(2\pi)^{-1/2} v(q-s)$.

3. СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА

В данном разделе мы изучим дискретный спектр оператора $H(k)$, определенного по формуле (2.4). Если убрать постоянный член в $H_0(k)$, то двухчастичный оператор представляется в виде

$$H(k) = V - \cos \frac{k}{2} W, \quad (3.1)$$

где W — оператор умножения на функцию $2 \cos p$. Оператор $H(\pi) = V$ имеет собственные значения вида $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$, $m \in \mathbb{Z}_+$. При выполнении предположения (2.3) из них только $z_0(\pi)$ — невырожденное собственное значение, а остальные $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$, $m \in \mathbb{N}$ имеют двойную кратность. Собственному значению $z_0(\pi)$ соответствует нормированная собственная функция $\varphi_0(p) \equiv (2\pi)^{-1/2}$, а собственному значению $z_m(\pi)$, $m \in \mathbb{N}$, соответствуют собственные функции

$$\varphi_m^+(p) = \frac{\cos mp}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_m^-(p) = \frac{\sin mp}{\sqrt{\pi}}, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (3.2)$$

Наша основная цель — изучить поведение этих собственных значений при малых значениях $\pi - k$. Приведем одну важную теорему из теории возмущений, которая нам понадобится в дальнейшем.

ТЕОРЕМА 3.1 [2]. Пусть E_0 — изолированное невырожденное собственное значение оператора A . Тогда при малых $\beta \in \mathbb{R}$ оператор $H(\beta) = A - \beta \widehat{W}$ имеет единственное невырожденное собственное значение $E_0(\beta)$, лежащее в некоторой окрестности $U_\delta(E_0) = \{E \in \mathbb{C}: |E - E_0| < \delta\}$ точки E_0 и $E_0(\beta)$ аналитична по β в окрестности $\beta = 0$.

Для $E_0(\beta)$ имеет место представление [2]

$$E_0(\beta) = E_0 - \frac{\sum_{n=1}^{\infty} a_n \beta^n}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \beta^n} = E_0 - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \beta^n. \quad (3.3)$$

Если $H(\beta)$ самосопряжен, то коэффициенты Рэля–Шредингера a_n и b_n определяются по формулам

$$a_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|E-E_0|=\varepsilon} (\varphi_0, [\widehat{W}(A-E)^{-1}]^n \varphi_0) dE, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (3.4)$$

$$b_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|E-E_0|=\varepsilon} (\varphi_0, (A-E)^{-1} [\widehat{W}(A-E)^{-1}]^n \varphi_0) dE, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.5)$$

Здесь $\varepsilon > 0$ выбирается так, что в круг $|E - E_0| < \varepsilon$ попадает ровно одно простое собственное значение оператора $H(\beta)$, а φ_0 – нормированная собственная функция оператора A , соответствующая собственному значению E_0 . Ряд (3.3) называется рядом Рэля–Шредингера для $E_0(\beta)$ и имеет ненулевой радиус сходимости.

Число $z_0(\pi)$ – невырожденное собственное значение оператора $V = H(\pi)$, поэтому можем применить к оператору $H(k) = V - W \cos(k/2)$ теорему 3.1.

ТЕОРЕМА 3.2. *Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $k \in (\pi - \delta, \pi]$ оператор $H(k)$ имеет единственное невырожденное собственное значение $z_0(k)$, лежащее в малой окрестности $z_0(\pi)$, причем имеет место асимптотическая формула*

$$z_0(k) = z_0(\pi) - \frac{2}{\hat{v}(1) - \hat{v}(0)} \cos^2\left(\frac{k}{2}\right) + O((\pi - k)^4) \quad \text{при } k \rightarrow \pi. \quad (3.6)$$

Для вычисления коэффициентов Рэля–Шредингера a_n и b_n нам необходимо следующее утверждение.

ЛЕММА 3.1. *Справедливы равенства*

$$(V - z)^{-1} \varphi_m^\pm = \frac{\varphi_m^\pm}{z_m(\pi) - z}, \quad (3.7)$$

$$W \varphi_0 = \sqrt{2} \varphi_1^+, \quad W \varphi_1^+ = \sqrt{2} \varphi_0 + \varphi_2^+, \quad W \varphi_1^- = \varphi_2^-, \quad (3.8)$$

$$W \varphi_m^\pm = \varphi_{m-1}^\pm + \varphi_{m+1}^\pm, \quad m \geq 2. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из равенства $V \varphi_m = z_m(\pi) \varphi_m$ мы получаем (3.7). Равенства (3.8) и (3.9) непосредственно следуют из определения W .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Пользуясь теоремой 3.1, для $z_0(k)$ получаем представление

$$z_0(k) = z_0(\pi) - \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos^n\left(\frac{k}{2}\right).$$

Чтобы вычислить с точностью до $\cos^2(k/2)$ собственное значение $z_0(k)$, достаточно найти коэффициенты a_1 , a_2 и b_1 ряда Рэля–Шредингера (3.3). Рассмотрим скалярное произведение $(\varphi_0, [W(V-z)^{-1}]^n \varphi_0)$, которое присутствует в формулах для вычисления коэффициентов a_n и b_n . Пользуясь (3.7)–(3.9), получим

$$[W(V-z)^{-1}]^{2n-1} \varphi_0 = \alpha_1(z) \varphi_1^+ + \alpha_3(z) \varphi_3^+ + \cdots + \alpha_{2n-1}(z) \varphi_{2n-1}^+, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (3.10)$$

Из ортогональности системы $\{\varphi_0, \varphi_n^\pm\}_{n=1}^\infty$ следует, что

$$(\varphi_0, [W(V-z)^{-1}]^{2n-1}\varphi_0) = 0 \quad \text{для любого } n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда и из (3.4) имеем: $a_{2n-1} = 0, n \in \mathbb{N}$. Из равенства

$$(\varphi_0, (V-z)^{-1}[W(V-z)^{-1}]^{2n-1}\varphi_0) = \frac{1}{z_0(\pi) - z}(\varphi_0, [W(V-z)^{-1}]^{2n-1}\varphi_0) = 0$$

вытекает, что $b_{2n-1} = 0, n \in \mathbb{N}$. Следовательно, $c_{2n-1} = 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Несложные вычисления показывают, что

$$(\varphi_0, [W(V-z)^{-1}]^2\varphi_0) = \frac{2}{(z_0(\pi) - z)(z_1(\pi) - z)}.$$

Умножая это равенство на $(-2\pi i)^{-1}$ и интегрируя по окружности $|z - z_0(\pi)| = \varepsilon$, получим, что

$$a_2 = \frac{2}{z_1(\pi) - z_0(\pi)},$$

так как $c_2 = a_2, c_4 = a_4 - a_2 b_2$. Учитывая, что $z_m(\pi) = \hat{v}(m), m \in \mathbb{Z}_+$, и

$$\cos \frac{k}{2} = \sin \left(\frac{\pi - k}{2} \right) \sim \frac{\pi - k}{2} \quad \text{при } k \rightarrow \pi, \quad (3.11)$$

получим утверждение теоремы.

Применение теории возмущений для вырожденных собственных значений является довольно сложной задачей. Наш подход состоит в следующем: сначала мы покажем, что пространства четных функций $L_2^+(\mathbb{T})$ и нечетных функций $L_2^-(\mathbb{T})$ являются инвариантными относительно оператора $H(k)$. Обозначим через $H_+(k)$ и $H_-(k)$ сужения оператора $H(k)$ в инвариантных подпространствах $L_2^+(\mathbb{T})$ и $L_2^-(\mathbb{T})$, соответственно. Заметим, что

$$L_2(\mathbb{T}) = L_2^+(\mathbb{T}) \oplus L_2^-(\mathbb{T}), \quad H(k) = H_+(k) + H_-(k).$$

ЛЕММА 3.2. *Подпространства $L_2^+(\mathbb{T})$ и $L_2^-(\mathbb{T})$ являются инвариантными относительно оператора $H(k)$. Число $z_m(\pi), m \in \mathbb{N}$, является невырожденным собственным значением для операторов $H_+(k)$ и $H_-(k)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Инвариантность подпространства четных функций $L_2^+(\mathbb{T})$ относительно оператора $H(k)$ следует из четности функций $\varepsilon_k(p)$ и $v(p)$. Из самосопряженности оператора $H(k)$ следует инвариантность его ортогонального дополнения $L_2^-(\mathbb{T})$. Несложные вычисления показывают, что уравнения Шредингера $H_+(\pi)f = z_m(\pi)f$ и $H_-(\pi)f = z_m(\pi)f$ имеют единственное (с точностью до множителя) решение φ_m^+ и φ_m^- , соответственно, вида (3.2).

ТЕОРЕМА 3.3. Для любого $m \in \mathbb{N}$ существует $\delta > 0$ такое, что при всех $k \in (\pi - \delta, \pi)$ оператор $H(k)$ имеет ровно два невырожденных собственных значения $z_m^+(k)$ и $z_m^-(k)$, лежащих в малой окрестности $z_m(\pi)$. Для них справедлива асимптотическая формула

$$z_m^\pm(k) = z_m(\pi) - c_2^\pm(m) \cos^2\left(\frac{k}{2}\right) + O((\pi - k)^4) \quad \text{при } k \rightarrow \pi, \quad (3.12)$$

где

$$c_2^-(1) = \frac{1}{\hat{v}(2) - \hat{v}(1)}, \quad c_2^+(1) = \frac{2}{\hat{v}(0) - \hat{v}(1)} + \frac{1}{\hat{v}(2) - \hat{v}(1)}, \quad (3.13)$$

$$c_2^\pm(m) = \frac{1}{\hat{v}(m-1) - \hat{v}(m)} + \frac{1}{\hat{v}(m+1) - \hat{v}(m)}, \quad m \geq 2. \quad (3.14)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу леммы 3.2 число $z_m(\pi)$ есть невырожденное собственное значение для операторов $H_+(\pi)$ и $H_-(\pi)$, поэтому к нему можно применить теорему 3.1. Коэффициенты Рэля–Шредингера $a_n^\pm(m)$ и $b_n^\pm(m)$ для $z_m^\pm(k)$ вычисляются по формулам (3.4) и (3.5), соответственно, где вместо φ_0 фигурирует $\varphi_m^\pm$. Так же, как и в теореме 3.2, показывается, что $a_{2n-1}^\pm(m) = b_{2n-1}^\pm(m) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Для вычисления $a_2^-(1)$ и $a_2^+(1)$ воспользуемся скалярными произведениями

$$\begin{aligned} (\varphi_1^-, [W(V-z)^{-1}]^2 \varphi_1^-) &= \frac{1}{(z_1(\pi) - z)(z_2(\pi) - z)}, \\ (\varphi_1^+, [W(V-z)^{-1}]^2 \varphi_1^+) &= \frac{2}{(z_1(\pi) - z)(z_0(\pi) - z)} + \frac{1}{(z_1(\pi) - z)(z_2(\pi) - z)}. \end{aligned}$$

Умножая эти равенства на $(-2\pi i)^{-1}$ и интегрируя по окружности $|z - z_1(\pi)| = \varepsilon$, получим

$$a_2^-(1) = \frac{1}{z_2(\pi) - z_1(\pi)}, \quad a_2^+(1) = \frac{2}{z_0(\pi) - z_1(\pi)} + \frac{1}{z_2(\pi) - z_1(\pi)}. \quad (3.15)$$

Учитывая, что $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$ и $c_2^\pm(1) = a_2^\pm(1)$, убеждаемся в справедливости равенств (3.13). Пользуясь (3.7) и (3.9), при $m \geq 2$ имеем

$$(\varphi_m^\pm, [W(V-z)^{-1}]^2 \varphi_m^\pm) = \frac{1}{(z_m(\pi) - z)(z_{m-1}(\pi) - z)} + \frac{1}{(z_m(\pi) - z)(z_{m+1}(\pi) - z)},$$

следовательно,

$$a_2^\pm(m) = \frac{1}{z_{m-1}(\pi) - z_m(\pi)} + \frac{1}{z_{m+1}(\pi) - z_m(\pi)}.$$

Так как

$$z_m(\pi) = \hat{v}(m), \quad c_2^\pm(m) = a_2^\pm(m), \quad m \in \mathbb{N},$$

то имеет место формула (3.14). Учитывая, что $c_{2n-1}^\pm(m) = 0$, $m \in \mathbb{N}$, и принимая во внимание (3.11), получим (3.12).

Теперь обсудим, при каких условиях на потенциал $\hat{v}$ собственные значения $z_m^\pm(k)$, $m \in \mathbb{N}$, оператора $H(k)$ находятся ниже (выше) соответствующих собственных значений $z_m(\pi) = \hat{v}(m)$, $m \in \mathbb{N}$, оператора $H(\pi)$.

Начнем с невырожденного собственного значения $z_0(k)$. При выполнении условия (2.3) при $k \in (\pi - \delta, \pi)$ имеет место неравенство $z_0(k) < z_0(\pi)$. Из представления (3.6) следует, что собственное значение $z_0(k)$ оператора $H(k)$ возрастает при $k \in [\pi - \delta, \pi]$. При условии (2.3) собственное значение $z_1^-(k)$ так же обладает этим свойством. Для выполнения неравенства $z_1^+(k) < z_1(\pi)$ при $k \in (\pi - \delta, \pi)$ необходимо и достаточно, чтобы $c_2^+(1) = a_2^+(1) > 0$. При условии (2.3) это эквивалентно $3\hat{v}(1) - 2\hat{v}(2) - \hat{v}(0) > 0$. Если $3\hat{v}(1) - 2\hat{v}(2) - \hat{v}(0) < 0$, то $z_1^+(k) > z_1(\pi)$. В этом случае существует такой отрезок $[\pi - \delta, \pi]$ значений k , где собственное значение $z_1^+(k)$ убывает с ростом k .

Коэффициенты $a_2^+(1)$ и $a_2^-(1)$ связаны равенством $a_2^+(1) = a_2^-(1) - 2(\hat{v}(1) - \hat{v}(0))^{-1}$, поэтому

$$z_1^-(k) < z_1^+(k) \quad \text{при } k \in (\pi - \delta, \pi).$$

Первый нетривиальный коэффициент в ряду Рэлея–Шредингера для $z_m^\pm(k)$ при $m \geq 2$ есть

$$c_2^\pm(m) = \frac{-(\Delta\hat{v})(m)}{(\hat{v}(m) - \hat{v}(m-1))(\hat{v}(m+1) - \hat{v}(m))}. \quad (3.16)$$

При условии (2.3) знаменатель в этом равенстве положителен. Поэтому если $(\Delta\hat{v})(m) < 0$, то при $k \in (\pi - \delta, \pi)$ выполняется неравенство $z_m^\pm(k) < z_m(\pi)$. Из представления (3.12) следует, что собственное значение $z_m^\pm(k)$ возрастает на отрезке $[\pi - \delta, \pi]$. Как и в случае $m = 1$, мы можем показать, что $z_m^-(k) < z_m^+(k)$ при $m \geq 2$. Пользуясь (3.7)–(3.9), при $m \geq 2$ получим следующие равенства:

$$a_n^+(m) = a_n^-(m), \quad b_n^+(m) = b_n^-(m), \quad n = 1, 2, \dots, 2m-1, \quad (3.17)$$

$$a_{2m}^+(m) = a_{2m}^-(m) + \frac{2}{z_0(\pi) - z_m(\pi)} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(z_s(\pi) - z_m(\pi))^2}. \quad (3.18)$$

Так как $z_0(\pi) - z_m(\pi) = \hat{v}(0) - \hat{v}(m) < 0$, то $a_{2m}^+(m) < a_{2m}^-(m)$. Несложные выкладки показывают, что

$$c_n^+(m) = c_n^-(m), \quad n = 1, 2, \dots, 2m-1, \quad (3.19)$$

$$c_{2m}^+(m) = c_{2m}^-(m) + \frac{2}{z_0(\pi) - z_m(\pi)} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(z_s(\pi) - z_m(\pi))^2}, \quad (3.20)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} z_m^+(k) - z_m^-(k) &= \frac{2 \cos^{2m}(k/2)}{\hat{v}(m) - \hat{v}(0)} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(\hat{v}(s) - \hat{v}(m))^2} + \\ &+ O((\pi - k)^{2m+2}) \quad \text{при } k \rightarrow \pi. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 3.4. Пусть выполняется предположение (2.3). Тогда для любого $m \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство $z_m^-(k) < z_m^+(k)$ при $k \in (\pi - \delta, \pi)$ и справедливо равенство

$$z_m^+(k) - z_m^-(k) = \frac{2 \cos^{2m}(k/2)}{\hat{v}(m) - \hat{v}(0)} \prod_{s=1}^{m-1} \frac{1}{(\hat{v}(s) - \hat{v}(m))^2} + O((\pi - k)^{2m+2}) \quad \text{при } k \rightarrow \pi.$$

Дополнительно, если $(\Delta \hat{v})(m) < 0$ ($(\Delta \hat{v})(m) > 0$), то оба собственных значения $z_m^-(k)$ и $z_m^+(k)$ лежат ниже (выше), чем $z_m(\pi)$ при $k \in (\pi - \delta, \pi)$.

При выполнении предположения (2.3) собственные значения $z_m^+(k)$ и $z_m^-(k)$ операторов $H_+(k)$ и $H_-(k)$ чередуются, т.е.

$$z_0(k) < z_1^-(k) < z_1^+(k) < z_2^-(k) < z_2^+(k) < \dots < z_N^-(k) < z_N^+(k).$$

Благодарности. Автор выражает благодарность рецензенту за полезные замечания. Работа частично финансирована грантом 67-04 ФПФИ АН РУз.

Список литературы

- [1] Т. Като. Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972.
- [2] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов. М.: Мир, 1982.
- [3] С. Н. Лакаев. ТМФ. 1980. Т. 44. № 3. С. 381–386; J. Rauch. J. Funct. Anal. 1980. V. 35. P. 304–315; B. Simon. Ann. Phys. 1976. V. 97. P. 279–288.
- [4] Ш. С. Маматов, Р. А. Минлос. ТМФ. 1989. Т. 79. № 2. С. 163–179.
- [5] R. A. Minlos, A. I. Mogilner. Some problems concerning spectra of lattice models. In: Schrödinger operators: Standard and Nonstandard. Proc. of the Conf. (Dubna, Russia, 6–10 September, 1988). Eds. P. Exner, P. Seba. Singapore: World Scientific, 1989. P. 243–257.
- [6] Ж. И. Абдуллаев, И. А. Икромов, С. Н. Лакаев. ТМФ. 1995. Т. 103. № 1. С. 54–62.
- [7] P. A. Faria da Viegas, L. Ioriatti, M. O'Carroll. Phys. Rev. E. 2002. V. 66. P. 016130; D. C. Mattis. Rev. Modern Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361–379.

Поступила в редакцию 25.II.2005 г.,
после доработки 6.V.2005 г.