Общероссийский математический портал

С. В. Талалов, Модель протяженной релятивистской частицы с произвольным спином и изоспином, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 289–302

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 13:42:27

МОДЕЛЬ ПРОТЯЖЕННОЙ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СПИНОМ И ИЗСПИНОМ

Рассмотрена конечномерная пуанкаре-инвариантная динамическая система с дополнительной $SU(2)$ -симметрией, которую можно интерпретировать как конечный протяженный объект, эволюционирующий в пространстве Минковского. Показано, что спектр масс $\{M\}$ системы определяется при любом значении ее спина s корнями уравнения $Az_-^2 + Bz_- + C + Dz_+ = 0$, где $z_{\pm} = aM^2 \pm b\sqrt{s(s+1)}$, а коэффициенты зависят только от состояния “внутренних” переменных. Обсуждается возможность описания в терминах построенной модели некоторых мезонных и барионных состояний.

Ключевые слова: модели частиц, траектории Редже, релятивистские уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно известной концепции Вигнера [1] элементарная (бесструктурная) частица представляет собой объект, описываемый неприводимым представлением группы Пуанкаре. Функции генераторов соответствующей алгебры $\mathcal{P}$ определяют множество наблюдаемых, относящихся к такой частице (см., например, [2]). В предлагаемой работе будет рассмотрена гамильтонова динамическая система такая, что скобки Пуассона фундаментальных координат ее фазового пространства $\mathcal{H}^*$ порождают алгебру

$$\mathcal{A}_{cl} = \mathcal{P} \oplus su(2) \oplus \mathbb{R}. \quad (1)$$

Фундаментальные координаты пространства $\mathcal{H}^*$ — это величины P_{μ} , $M_{\mu\nu}$, имеющие смысл вектора энергии-импульса и тензора момента частицы, соответственно, а также переменные j_0 , j_a (здесь и ниже $a = 1, 2, 3$), являющиеся пуанкаре-скалярами. Квантовая реализация указанной динамической системы является представлением алгебры $\mathcal{A}_{cl}$ в гильбертовом пространстве

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{i,s} (\mathbf{H}_I \otimes \mathbf{H}_{M_i^2(s),s}). \quad (2)$$

*Тольяттинский государственный университет, Тольятти, Самарская обл., Россия.
E-mail: svtalalov@visit.ru

Здесь $\mathbf{H}_{M^2, s}$ – пространство представления группы Пуанкаре, отвечающее заданным значениям M^2 и $s(s + 1)$ операторов Казимира P^2 и S^2 , а $\mathbf{H}_I$ – некоторое “внутреннее” фермионное пространство, которое будет определено ниже. С учетом структуры пространства $\mathbf{H}$ такая теория может рассматриваться как обобщение подхода Вигнера. Такое обобщение – снабжение бесструктурной частицы дополнительными степенями свободы, интерпретируемыми как внутренние, – само по себе, конечно, очевидно в той же степени, как и бессодержательно. Действительно, расширение (1) алгебры $\mathcal{P}$ имеет представление в любом слагаемом прямой суммы (2), однако появление здесь в качестве сомножителя некоторого пространства $\mathbf{H}_I$ никак не влияет на множество допустимых значений величин M и s . Нетривиальной теория становится, если в пространстве $\mathcal{H}^*$ тем или иным способом ввести связи, зависящие как от внешних, так и от внутренних переменных. Сразу заметим, что в данной работе принята точка зрения [3], согласно которой гамильтонов формализм для динамической системы является первичной структурой, определяемой вне зависимости от того, есть или нет у теории лагранжева формулировка. Так, для рассматриваемой системы исходными объектами являются фазовое пространство $\mathcal{H}^*$, скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}^*$ (здесь вырожденные) и гамильтониан h^* . Кроме того, в теории имеется связь $\Phi_1 = 0$, где $\Phi_1[P^2, S^2; j_0, j_a]$ – некоторый релятивистски-инвариантный интеграл движения. Согласно общей концепции Дирака после квантования (единственная) связь приводит к “уравнению Шредингера”

$$\Phi_1(\mathbf{P}^2, \mathbf{S}^2; \dots)|\psi\rangle = 0, \quad (3)$$

определяющему допустимые состояния системы. Тот факт, что функционал Φ_1 зависит от операторов Казимира P^2 и S^2 группы Пуанкаре, является причиной появления в теории нетривиального спектра. Заметим, что сама проблема конструирования релятивистских волновых уравнений с внутренними степенями свободы, о которой в конечном итоге здесь идет речь, имеет давнюю и богатую историю (автор не ставит перед собой цель делать здесь обзор на эту тему). Как отмечалось в книге [4], подойдет “любое условие на волновую функцию, наложенное с помощью любого скалярного оператора”. Поэтому ключевым в данном подходе является вопрос: что, собственно, является основанием для введения связи $\Phi_1 = 0$ в фазовом пространстве $\mathcal{H}^*$? Предполагается, что ответ на данный вопрос должен быть конструктивным в том смысле, что он должен позволить определить вид функционала $\Phi_1[P^2, S^2; j_0, j_a]$ явно и однозначно.

Чтобы убедиться в формальной самосогласованности данной схемы при том или ином выборе Φ_1 , необходимо показать, что существует последовательность неотрицательных чисел $\{M_i^2(s)\}$ такая, что в построенном в соответствии с (2) пространстве $\mathbf{H}$ уравнение (3) имеет ненулевые решения с конечной нормой.

2. ОБЩАЯ СТРУКТУРА КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В работах автора [5], [6] была рассмотрена теория открытой $4D$ -струны с действием

$$S_{\text{str}} = -\frac{1}{4\pi\alpha'} \int d\xi^0 d\xi^1 \sqrt{h} \{ h^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu - 2i\varrho_0 e_Y^j (\Gamma^0)_{AB} \bar{\Psi}^A \gamma^Y \nabla_j \Psi^B \}.$$

Здесь $h = \det h^{ij}(\xi^0, \xi^1)$, а векторы e_Y , $Y = 1, 2$, образуют базис касательного пространства, стандартным образом связанный с 2-метрикой h^{ij} . Матрицы Дирака в четырех- и двумерном пространстве-времени суть Γ^μ и γ_i . Поле X_μ несет векторный индекс μ в $E_{1,3}$. Поле $\Psi_\pm^A$, компоненты которого являются комплекснозначными функциями, несет следующие индексы: индекс A – спинорный индекс в пространстве $E_{1,3}$, а также индекс $\pm$ – спинорный индекс в двумерном пространстве-времени. $4D$ -спиноры $\Psi_\pm$ удовлетворяют условию

$$\Psi^* = \varepsilon B \Psi, \quad \varepsilon = \pm 1, \quad B : (\Gamma_\mu)^* = -B \Gamma_\mu B^{-1},$$

т.е. являются майоровскими либо антимайоровскими¹⁾. Пусть $\mathcal{H}$ – каноническое фазовое пространство для такой струнной модели, а $\{\cdot, \cdot\}$ – каноническая скобка фундаментальных координат X и Ψ . Как обычно, лагранжевы уравнения для полей h^{ij} дают первичные связи; для каждой из них, кроме одной ($H_0 = 0$, играющей роль гамильтониана), было выбрано специальное дополнительное условие, фиксирующее остаточный конформный произвол $\xi^1 \pm \xi^0 \rightarrow A_\pm(\xi^1 \pm \xi^0)$. Поверхность связей и дополнительных условий будем обозначать символом $\mathcal{V}$. Имеют место включения $\mathcal{V} \subset \mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}_1$ – минимальное подпространство, на котором скобка Дирака $\{\cdot, \cdot\}_1$ связей и дополнительных условий невырождена. Заметим, что в пространстве $\mathcal{H}_1$ множество $\mathcal{V}$ – это поверхность $H_0 = 0$ такая, что $\text{codim } \mathcal{V} = 1$.

Далее, была построена теория, позволяющая описывать эволюцию данной струны в терминах неканонического (т.е. не связанного стандартным образом с действием S_{str}) гамильтонова формализма. Фактически сделано следующее: 1) определена некоторая гамильтонова динамическая система (которую далее будем называть “*протяженной частицей*”) с фазовым пространством $\mathcal{H}^*$, скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}^*$, гамильтонианом h^* и некоторой связью $\Phi_1 = 0$; 2) найдено описание струнной динамики (указанной модели) в терминах данной динамической системы. Фундаментальные переменные, параметризующие пространство $\mathcal{H}^*$, – суть тензоры P_μ и $M_{\mu\nu}$, интерпретируемые как энергия-импульс и момент частицы, пара вспомогательных переменных q и θ (в данной работе не играющих роли и далее не упоминаемых), а также скалярные безразмерные 2π -периодические функции $f(\xi)$, $j_0(\xi)$ и $j_a(\xi)$. Сформулируем следующее утверждение о связи теорий.

УТВЕРЖДЕНИЕ. На пространстве $\mathcal{H}^*$ определен вещественный функционал

$$\Phi_1 = \Phi_1[P^2, S^2; f(\xi), j_0(\xi), \dots, j_3(\xi)] : \mathcal{H}^* \longrightarrow \mathbb{R},$$

обладающий следующими свойствами:

- 1) функционал Φ_1 – пуанкаре-инвариантный интеграл движения;

¹⁾В цитированных работах рассмотрен случай $\varepsilon = 1$; в работе [5] действие имеет отличия от S_{str} .

2) поверхность $\mathcal{V}^* = \{x \in \mathcal{H}^*: \Phi_1(x) = 0\}$ имеет подмножество $\mathcal{V}_{\text{str}}^* \subset \mathcal{V}^*$ такое, что: а) $\bar{\mathcal{V}}_{\text{str}}^* = \mathcal{V}^*$; б) существует взаимно однозначное соответствие $\mathcal{V} \approx \mathcal{V}_{\text{str}}^*$; в) слоение множества $\mathcal{V}$, задаваемое скобкой $\{\cdot, \cdot\}$ и гамильтонианом H_0 , переходит при соответствии $\approx$ в слоение множества $\mathcal{V}_{\text{str}}^*$, задаваемое скобкой $\{\cdot, \cdot\}^*$ и гамильтонианом $h^\# = h^* + l_1 \Phi_1$ при $l_1 \equiv 0$;

3) нётеровские значения энергии-импульса и момента струнной конфигурации $(X_\mu, \Psi_\pm^A)$ совпадают с координатами P_μ и $M_{\mu\nu}$ точки пространства $\mathcal{H}^*$, в которую указанная конфигурация отображается соответствием $\approx$.

Таким образом, связь между двумя рассмотренными динамическими системами (струной и частицей) такова:

$$\underbrace{\mathcal{H}_1 \supset \mathcal{V}}_{\text{струна}} \approx \mathcal{V}_{\text{str}}^* \subset \underbrace{\mathcal{V}^* \subset \mathcal{H}^*}_{\text{частица}}. \quad (4)$$

Множество $\mathcal{V}_{\text{str}}^*$ естественно называть струнным сектором динамической системы “протяженная частица”. Оправдано это тем, что указанный в формулировке утверждения изоморфизм позволяет описывать струну в терминах точек $x \in \mathcal{V}_{\text{str}}^*$. Действительно, соответствие $\approx$ сохраняет как все допустимые степени свободы, так и динамику. Что касается пуассоновых структур $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}^*$, заметим следующее. Известно, что корректное сужение скобки на подмногообразии возможно тогда и только тогда, когда это подмногообразие является объединением симплектических листов [7]. В нашем случае это не так — ни функционал H_0 (напомним, связь $H_0 = 0$ определяет подмногообразие $\mathcal{V}$), ни функционал Φ_1 аннуляторами соответствующих скобок не являются. Следовательно, множества $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^*$ как пуассоновы многообразия рассматриваться не могут. Таким образом, множества $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_{\text{str}}^*$ с точки зрения классической теории равноценны: на них нет структур, которые нарушались бы соответствием $\approx$. Заметим, что сами фазовые пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}^*$, как пуассоновы многообразия, не изоморфны. Поэтому квантование динамической системы “протяженная частица” не является каким-либо аналогом квантования собственно струны в стандартном смысле, поскольку квантуемое фазовое пространство иное. Следовательно, мы имеем нетривиальный пример пары динамических систем таких, что: 1) на классическом уровне одна из них может рассматриваться как вложение в другую; 2) квантовые версии теорий различны и вложениями одна в другую, вообще говоря, не являются.

Все существенные этапы доказательства сформулированного утверждения (за исключением п. 2а) могут быть найдены в работах [5], [6]. Там же в общем виде получена связь $\Phi_1 = 0$, которая в параметрической форме представима в виде

$$\begin{aligned} P^2 &= \det [\kappa \hat{P}_{(1)} + \varrho_0 \hat{P}_{(0)}], \\ w^2 &= \det \left[\sum_{l=0}^3 \kappa^l \varrho_0^{3-l} \hat{w}_{(l)} \right], \quad w^2 = S^2 P^2, \end{aligned} \quad (5)$$

где κ – вещественный параметр, $\hat{P}_{(l)}$ и $\hat{w}_{(l)}$ – матрицы размера 2×2 ; их элементы выражаются явно через интегралы вида

$$\int_0^{2\pi} T_{m_1 n_1} \dots T_{m_k n_k} d\xi. \quad (6)$$

Матрица $T \in SL(2, \mathbb{C})$ имеет вид $T(\xi) = F(\xi)E(\xi)U(\xi)$, где $F(\xi)$ – верхнетреугольная матрица, равная единичной при $f(\xi) \equiv 0$, $E(\xi)$ – диагональная матрица с $E_{11} = E_{22}^{-1} = e^{\tau j_0(\xi)}$, а матрица $U(\xi) \in SU(2)$ есть матрица решений вспомогательной линейной системы

$$U'(\xi) + \frac{i}{2} \left(\sum_{a=1}^3 j_a(\xi) \sigma_a \right) U(\xi) = 0. \quad (7)$$

Таким образом, коэффициенты в правых частях полиномов (5) зависят только от релятивистски-инвариантных переменных $f(\xi)$, $j_0(\xi)$ и $j_a(\xi)$. При любых фиксированных значениях этих переменных равенства (5) определяют нелинейную зависимость величины $S = \sqrt{-w^2/P^2}$ от квадрата вектора энергии-импульса P^2 . На квантовом уровне это приводит к нетривиальному (т.е. не задаваемому равенством $s = \alpha' M^2 + c$) редже-спектру теории. Явный вид матриц $\hat{P}_{(l)}$ и $\hat{w}_{(l)}$ однозначно фиксируется п. 3 сформулированного утверждения.

Важным является также тот факт, что стандартные граничные условия на струнные переменные X и Ψ трансформируются отображением $\approx$ в условие на матрицу монодромии системы (7)

$$\mathcal{M} = \pm 1 \quad (\mathcal{M} = U^{-1}(\xi)U(\xi + 2\pi)), \quad (8)$$

которое приводит к появлению в теории целочисленного топологического заряда.

Струнный сектор $\mathcal{V}_{\text{str}}^*$ представляет собой множество координат пространства $\mathcal{H}^*$, связанных равенствами (5), но при $\kappa \neq 0$. Говоря о замыкании $\overline{\mathcal{V}}_{\text{str}}^* = \mathcal{V}^*$ (см. п. 2а утверждения), мы имеем в виду слабую топологию, порожденную десятью функционалами – коэффициентами полиномов (5). Фундаментальные константы теории – это константы α' и ϱ_0 , входящие в струнное действие S_{str} (в котором не предполагается наличие какой-либо суперсимметрии), а также константа τ , параметризующая отображение $\approx$. Полученные ниже спектры позволяют придать этим константам определенный физический смысл, который мы обсудим в конце статьи.

3. РЕДУКЦИЯ И КВАНТОВАНИЕ

Таким образом, существует подмножество $\mathcal{V}_{\text{str}}^* \subset \mathcal{H}^*$, параметризуемое струнными конфигурациями $(X, \Psi) \in \mathcal{V}$ взаимно однозначно. Вводящее такую параметризацию отображение $\approx$ сохраняется в динамике. Замыкание $\overline{\mathcal{V}}_{\text{str}}^*$ есть множество нулей некоторого функционала Φ_1 . Поэтому представляется естественным рассматривать в пространстве $\mathcal{H}^*$ связь $\Phi_1 = 0$, а получаемую при этом динамическую систему интерпретировать как одномерный протяженный объект, эволюционирующий в пространстве $E_{1,3}$.

Что касается явного вида функционала Φ_1 , то он определен, во-первых, структурой отображения $\approx$ и, во-вторых, видом струнного действия S_{str} . Необходимо подчеркнуть, что даже факт существования взаимно однозначного соответствия какого-либо подмножества фазового пространства $\mathcal{H}^*$ и множества струнных переменных $\mathcal{V}$ не является очевидным. Действительно, среди переменных, параметризующих пространство $\mathcal{H}^*$, нет таких, которые могли бы быть непосредственно проинтерпретированы как координаты $X_\mu(\xi)$ точек какого-либо одномерного классического объекта в пространстве Минковского $E_{1,3}$.

Цель настоящей работы – детально изучить редукцию

$$f(\xi) \equiv 0, \quad j_0(\xi) \equiv j_0 = \text{const}, \quad j_a(\xi) \equiv j_a = \text{const} \quad (9)$$

и выполнить квантование полученной динамической системы. “Внешние” P_μ и $M_{\mu\nu}$ и “внутренние” j_0 и j_a переменные становятся соответственно операторами вида (далее везде, кроме таблиц, мы пользуемся безразмерной массой $\mu = \sqrt{\alpha'} M$)

$$\mathbf{A} = \bigoplus_{i,s} (1 \otimes \mathbf{A}_{\mu_i^2(s),s}), \quad \mathbf{J} = \bigoplus_{i,s} (J \otimes 1_{\mu_i^2(s),s}).$$

Здесь $\mathbf{A}_{\mu^2,s}$ – соответствующий оператор представления алгебры Пуанкаре в пространстве $\mathbf{H}_{\mu^2,s}$, J – некоторый оператор в пространстве $\mathbf{H}_I$, а $1_{\mu^2,s}$ – единичный оператор в пространстве $\mathbf{H}_{\mu^2,s}$. Рассмотрим квантование внутренних переменных детально. Напомним выражения для скобок величин $j_0(\xi)$ и $j_a(\xi)$ в общем случае:

$$\begin{aligned} \{j_0(\xi), j_0(\eta)\}^* &= -\frac{2\alpha'}{\varrho_0^2} \delta'(\xi - \eta), \quad \{j_0(\xi), j_a(\eta)\}^* = 0, \\ \{j_a(\xi), j_b(\eta)\}^* &= \frac{2\alpha'}{\varrho_0^2} (-\delta_{ab} \delta'(\xi - \eta) + \varepsilon_{abc} j_c(\xi) \delta(\xi - \eta)). \end{aligned} \quad (10)$$

Рассматриваемые как связи на переменные $j_0(\xi)$, $j_a(\xi)$ равенства (9) допускают редукцию скобок Пуассона (10) к конечномерной алгебре скобок

$$\{j_a, j_b\}^* = \frac{2\alpha'}{\varrho_0^2} \varepsilon_{abc} j_c.$$

Переменная j_0 становится при рассматриваемой редукции аннулятором. Введем (не зависящие от $\hbar$) фермионные операторы рождения и уничтожения $\mathbf{a}_\alpha^+$ и $\mathbf{a}_\alpha$, удовлетворяющие каноническим антикоммутационным соотношениям

$$[\mathbf{a}_\alpha, \mathbf{a}_\beta^+]_+ = \delta_{\alpha\beta}, \quad \alpha, \beta = -I, -I+1, \dots, I.$$

Данные операторы порождают пространство Фока $\mathbf{H}_I$ размерности $\dim \mathbf{H}_I = 2^{2I+1}$, для которого справедливо разложение

$$\mathbf{H}_I = \bigoplus_{Q=0}^{2I+1} \mathbf{H}_{IQ}.$$

Пространства $\mathbf{H}_{IQ}$ порождены векторами $\mathbf{a}_{\beta_1}^+ \dots \mathbf{a}_{\beta_Q}^+ |0\rangle$, $\beta_i \neq \beta_j$, а пространство $\mathbf{H}_{I0}$ есть $\{c|0\rangle\}$. Заметим, что $\dim \mathbf{H}_{IQ} = C_{2I+1}^Q$.

Введем операторы

$$J_0 = \sum_{\beta} \mathbf{a}_{\beta}^+ \mathbf{a}_{\beta}, \quad J_a = \sum_{\alpha, \beta} \mathbf{a}_{\alpha}^+ (R^I[\sigma_a])_{\alpha\beta} \mathbf{a}_{\beta},$$

где $R^I[\sigma]$ – матрица размера $(2I+1) \times (2I+1)$, отвечающая матрице σ в соответствующем неприводимом представлении алгебры $su(2)$. Легко проверить коммутационные соотношения

$$[J_a, J_b] = -2i\varepsilon_{abc}J_c, \quad [J_0, J_a] = 0, \quad (11)$$

а также соотношения $J_0 \mathbf{H}_{IQ} = Q \mathbf{H}_{IQ}$ и $J_a \mathbf{H}_{IQ} \subset \mathbf{H}_{IQ}$. Сопоставим при квантовании $j_0 \rightarrow \sqrt{\gamma'} J_0$, $j_a \rightarrow \gamma' J_a$, где $\gamma' = \alpha' \hbar / \varrho_0^2$ – естественный безразмерный параметр теории (далее везде $\hbar = 1$).

Поскольку классический прообраз оператора J_0 является аннулятором квантуемой скобки $\{\cdot, \cdot\}^*$, по величине Q нам следует ввести правила суперотбора. В настоящей работе мы рассмотрим только сектор $Q = 1$. В пространстве $\mathbf{H}_{I,1}$ мы имеем неприводимое представление алгебры $su(2)$ (фактически матрицами $R^I[\sigma_a]$); это означает, что выполнено равенство

$$\sum_{a=1}^3 \left[a_{\alpha,0}^+ (R^I[\sigma_a])_{\alpha\beta} a_{\beta,0} \right]^2 = 4I(I+1). \quad (12)$$

Таким образом, в теории естественно возникает представление группы $SU(2)$ с релятивистски-инвариантным базисом, которое действует в “общем” пространстве состояний

$$\mathbf{H} = \bigoplus_{\mu^2, s} (\mathbf{H}_{IQ} \otimes \mathbf{H}_{\mu_i^2, s}), \quad Q = 1. \quad (13)$$

Вопрос о том, будет или нет пространство допустимых состояний $\mathbf{H}_{\text{phys}} \subset \mathbf{H}$ также пространством представления, требует дополнительного исследования. В том случае, если это так, все допустимые состояния системы могут быть классифицированы по соответствующим $SU(2)$ -мультиплетам. Это позволит интерпретировать квантовое число I как изотопический спин. Мы вернемся к данному вопросу в конкретных примерах.

Матрица $U(\xi; 0)$ решений системы (7) в рассматриваемом случае находится явно:

$$U(\xi; 0) = 1_2 \cos \frac{|j|\xi}{2} - \frac{i}{|j|} \sum_{a=1}^3 j_a \sigma_a \sin \frac{|j|\xi}{2},$$

где $|j| = \sqrt{j_1^2 + j_2^2 + j_3^2}$, а 1_2 — единичная (2×2) -матрица. Следовательно, условие (8), накладываемое в теории на матрицу монодромии указанной системы, имеет вид

$$j_1^2 + j_2^2 + j_3^2 = n^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (14)$$

Поскольку левая часть этого равенства — аннулятор пуассоновой структуры $\{\cdot, \cdot\}^*$, то после квантования данное равенство должно быть выполнено в сильном смысле. Сопоставляя (12) и (14), находим: либо $n = 0$ и тогда $I = 0$, либо $n \neq 0$ и $I \neq 0$, но тогда

$$\varrho_0^2 = \frac{2\alpha'}{n} \sqrt{I(I+1)}. \quad (15)$$

Последнее равенство означает, что квантование в секторах с $n \neq 0$ существует только для определенных дискретных значений константы ϱ_0 . Что касается константы α' , то она, вообще говоря, может быть выбрана различной для секторов с разными значениями топологического числа n . Это следует из того факта, что такие секторы являются непересекающимися множествами.

Рассмотрим вопрос об интерпретации числа n . Здесь уместно напомнить об известной модели Скирма (см., например, [8]), в которой топологический заряд полевых конфигураций интерпретировался как барионный. В предлагаемой модели можно поступить аналогично, связав с числом n , например, такую характеристику частицы, как гиперзаряд. Определим гиперзаряд Y формулой

$$Y = \pm 2(n - I). \quad (16)$$

Обратим внимание, что условия $n = 0$ и $I = 0$ являются эквивалентными только при квантовании конфигураций с $j_a(\xi) \equiv \text{const}$. В общем случае, когда на переменные $j_a(\xi)$ нет ограничений, $SU(2)$ -симметрия отсутствует даже в “общем” пространстве $\mathbf{H}$. Для таких (произвольных) конфигураций положим $I = 0$. Топологический заряд n определен для любых конфигураций. Мы примем, что определение (16) гиперзаряда Y имеет место всюду, в том числе там, где $I = 0$, а $n \neq 0$.

Перейдем к выводу явной формы уравнения (3). Еще раз обратим внимание на то, что рассматриваемая здесь динамическая система “протяженная частица” определена без записи исходного действия, а равенство $\Phi_1 = 0$ возникло из дополнительного требования (соответствия открытой $4D$ -струне). Отметим, что оно может быть записано в

различных видах, эквивалентных на классическом уровне. Между тем при реконструкции действия²⁾ разные формы записи первичных связей приводят, вообще говоря, к различным результатам [9]. Более того, как показано в работе [10], в вырожденном случае восстановление лагранжева описания динамической системы по заданному гамильтонову описанию не всегда возможно, даже если координаты фазового пространства допускают естественное разделение на “координаты” q_i и “импульсы” p_i . Таким образом, чтобы однозначно определить переход к квантовой теории, нам необходимо точно фиксировать форму записи связи $\Phi_1 = 0$ через динамические переменные, которые будут объявлены операторами. В соответствии со сказанным такая фиксация является здесь отдельным постулатом.

Используя выражение для матрицы $U(\xi; 0)$, выписанное выше, представим связь Φ_1 в виде (5) явно. С помощью общих формул, выведенных в работе [6], получаем

$$4\alpha'^2 P^2 = (\kappa e^{2\tau j_0} + \varrho_0 j_2 e^{-4\tau j_0})^2 - \frac{j_3^2}{n^2} (\kappa e^{2\tau j_0} - \varrho_0 j_2 e^{-4\tau j_0})^2, \quad (17)$$

$$4n\alpha' S = (\kappa^2 e^{4\tau j_0} + \varrho_0^2 j_2^2 e^{-8\tau j_0}) - \frac{j_3^2}{n^2} (\kappa e^{2\tau j_0} - \varrho_0 j_2 e^{-4\tau j_0})^2. \quad (18)$$

Введем безразмерные переменные

$$Z_{\pm} = \frac{2e^{8\tau j_0}}{\varrho_0^2} (\alpha'^2 P^2 \pm n\alpha' S).$$

В координатах $Z_{\pm}$ параметр $\kappa \propto Z_-$ из равенств (17) и (18) легко исключается, так что в итоге имеем

$$\Phi_1 \equiv A(j) Z_-^2 + B(j) Z_- + C(j) - D(j) Z_+ = 0, \quad (19)$$

где $A(j) = 1 - j_3^2/n^2$, $B(j) = j_2^2(1 + 2j_3^2/n^2)$, $C(j) = j_2^4(1 - j_3^2/n^2)$ и $D(j) = j_2^2$.

После квантования данная связь становится уравнением, определяющим допустимые (“физические”) векторы в гильбертовом пространстве (2). Структура пространства состояний позволяет искать такие векторы в виде

$$|\psi_{\text{phys}}\rangle = |\mu_{\phi}^2, s\rangle |\phi\rangle, \quad (20)$$

где $|\mu_{\phi}^2, s\rangle \in \mathbf{H}_{\mu^2, s}$, $|\phi\rangle \in \mathbf{H}_{IQ}$ и, возможно, $\mu^2 = \mu^2(|\phi\rangle)$. Такое представление для $|\psi_{\text{phys}}\rangle$ приводит к следующим уравнениям в пространствах $\mathbf{H}_{IQ}$:

$$\Phi_{IQ}(\mu^2, s; \mathbf{a}_{\beta}^+, \mathbf{a}_{\beta}) |\phi\rangle = 0, \quad (21)$$

где $Q = 0, \dots, 2I + 1$, $I = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Оператор Φ_{IQ} здесь является матрицей размера $C_{2I+1}^Q \times C_{2I+1}^Q$ вида

$$\Phi_{IQ}(Z_+, Z_-) = \gamma'^4 A(J) Z_-^2 + \gamma'^2 B(J) Z_- + C(J) - \gamma'^2 D(J) Z_+,$$

²⁾ В данной работе такая задача не ставится.

где

$$Z_{\pm} = \frac{2}{\gamma'} e^{8\tau \sqrt{\gamma'} Q} (\mu^2 \pm n \sqrt{s(s+1)}), \quad (22)$$

а матрицы $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$, $D(J)$ получаются из соответствующих классических выражений заменой $j \rightarrow \gamma' J$ и симметризацией произведений. Чтобы рассматриваемой динамической системе при отображении $\approx$ соответствовала струна с времениподобным мировым листом, необходимо потребовать $Z_- \geq 0$. В квантовой области данному неравенству всегда можно удовлетворить явно, оставив в разложении (2) только те слагаемые, для которых выполнено $Z_- \geq 0$.

В рассматриваемом секторе $Q = 1$ с учетом (15) имеем

$$\begin{aligned} A(J) &= 1 - \frac{J_3^2}{4I(I+1)}, & B(J) &= \gamma'^2 \left(J_2^2 + \frac{J_2^2 J_3^2 + J_3^2 J_2^2}{4I(I+1)} \right), \\ C(J) &= \gamma'^4 \left(J_2^4 - \frac{J_2^4 J_3^2 + J_3^2 J_2^4}{8I(I+1)} \right), & D(J) &= \gamma'^2 J_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом, спектр масс $\{\mu_n\}$ частиц, описываемых представленной моделью, определяется уравнением

$$\det \Phi_{IQ}(Z_+, Z_-) = 0, \quad (23)$$

где $Z_{\pm}$ определены в (22).

4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим конкретные примеры спектров в секторе с $Q = 1$ и топологическим зарядом $n = 1$.

ПРИМЕР 1. $I = 1/2$. В соответствии со сказанным выше $\dim \mathbf{H}_{1/2,1} = 2$, так что мы имеем здесь простейшее (тождественное) представление алгебры $su(2)$. Матрицы $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$ и $D(J)$ здесь кратны единичной матрице. Для соответствующих коэффициентов находим

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{5}{3} \gamma'^2, \quad C = \frac{2}{3} \gamma'^4, \quad D = \gamma'^2.$$

Таким образом, равенство (23) принимает вид

$$(Z_- + 2)(2Z_- + 1) - 3Z_+ = 0.$$

Напомним, что в равенствах (22) в силу (15) $\gamma' = n/(2\sqrt{I(I+1)})$. Следовательно, спектр определяется константами α' и τ , а также значениями чисел n и I . Найденные

значения масс $M = \sqrt{\mu^2/\alpha'}$ при $\alpha' = 1.0 \text{ ГэВ}^{-2}$ и $\tau = 2.0$ приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1

Массы бозонов в секторе с $n = 1$ (изоспин $I = 1/2$)

s	M (ГэВ)	Массы некоторых K -мезонов (ГэВ)
1	1.190	$K_1(1.273)$
2	1.566	$K_2(1.580); K_2(1.773)$
3	1.862	$K_3^*(1.780)$
4	2.116	$K_4^*(2.045)$
5	2.341	$K_5^*(2.382)$

Отметим, что найденные массы двукратно вырождены. Это означает, что в представлении (20) вектор $|\phi\rangle \in \mathbf{H}_{1/2,1}$ произволен. Определим операторы

$$\mathbf{J}_i = \bigoplus_{\mu^2, s} (J_i \otimes 1_{\mu^2, s}), \quad i = 1, 2, 3,$$

где суммирование производится по найденному спектру. Операторы $\mathbf{J}_i$ реализуют в пространстве $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ представление группы $SU(2)$; данное представление является приводимым, однако всякому фиксированному состоянию $|\mu^2, s\rangle$ внешних переменных отвечает неприводимое представление. Это позволяет интерпретировать число I как изотопический спин.

В соответствии с определением гиперзаряда в данном примере $|\mathbf{Y}| = 1$. Для сравнения в табл. 1 приведены значения масс некоторых K -мезонов [11]. Отклонения найденных значений величины M от наблюдаемых интерпретируются в рамках предложенной теории как возбуждения бозонных степеней свободы $f(\xi)$. Для отдельных мезонов такие возбуждения могут давать значительный вклад в массу.

ПРИМЕР 2. $I = 1$. Здесь $\dim \mathbf{H}_{1,1} = 3$, так что мы имеем неприводимое представление алгебры $su(2)$ матрицами

$$J_1 = \sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2 = i\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

После квантования находим, что матрицы $A(J)$, $B(J)$, $C(J)$ и $D(J)$, определяющие матрицу $\Phi_{1,1}(x, y)$ в спектральном уравнении (23), имеют здесь следующий вид:

$$A = \frac{1}{2} e^{8\tau\sqrt{\gamma'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = 4\gamma'^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = 4\gamma'^4 e^{-8\tau\sqrt{\gamma'}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = 2\gamma'^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выполнив вычисления, аналогичные сделанным в предыдущем примере, находим спектр низших возбуждений модели в секторе с квантовыми числами $I = 1$ и $Y = 0$. В табл. 2 приведены результаты расчета масс при полупелых значениях s . Как и в примере 1, вычисления проведены при значениях констант $\alpha' = 1.0 \text{ ГэВ}^{-2}$ и $\tau = 2.0$.

ТАБЛИЦА 2

Массы фермионов в секторе с $n = 1$ (изоспин $I = 1$)

s	M_+ (ГэВ)	M_0 (ГэВ)	M_- (ГэВ)	Массы некоторых Σ -гиперонов (ГэВ)
1/2	0.930	0.936	0.938	$\Sigma^+(1.189), \Sigma^0(1.192), \Sigma^-(1.197)$
3/2	1.391	1.397	1.399	$\Sigma_3^+(1.382), \Sigma_3^0(1.384), \Sigma_3^-(1.387)$
5/2	1.720	1.725	1.727	$\Sigma_{5'}(1.775), \Sigma_5(1.915)$
7/2	1.992	1.997	1.999	$\Sigma_7(2.030)$

В отличие от случая $I = 1/2$, найденные здесь массы не являются вырожденными. При любом полупелом спине s массам M_+ , M_0 и M_- соответствуют следующие собственные векторы спектральной задачи (21):

$$|\phi_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad |\phi_0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |\phi_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Обозначим символами $\mathbf{H}_+$, $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{H}_-$ одномерные пространства, порожденные данными собственными векторами. В соответствии с общей теорией пространство допустимых состояний $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ имеет структуру

$$\mathbf{H}_{\text{phys}} = \bigoplus_s \mathbf{H}_s, \quad (24)$$

где

$$\mathbf{H}_s = (\mathbf{H}_{\mu_+^2(s),s} \otimes \mathbf{H}_+) \oplus (\mathbf{H}_{\mu_0^2(s),s} \otimes \mathbf{H}_0) \oplus (\mathbf{H}_{\mu_-^2(s),s} \otimes \mathbf{H}_-).$$

Выберем в каждом пространстве $\mathbf{H}_{\mu^2,s}$ базис, в котором диагональны операторы $\mathbf{P}_\nu$ и $\mathbf{w}_0$ (заметим, что он состоит из обобщенных собственных функций). Его векторы $|\mu^2, s; p_\nu, k\rangle$ нумеруются четверкой чисел $p_\nu \in (-\infty, \infty)$ ($\alpha' p_\nu p^\nu = \mu^2$) и целым числом $k = -s, -s+1, \dots, s$. Введем обозначения:

$$\begin{aligned} |e_{(1)}^k/p_\nu\rangle &= |\mu_+^2, s; p_\nu, k\rangle |\phi_+\rangle, \\ |e_{(2)}^k/p_\nu\rangle &= |\mu_0^2, s; p_\nu, k\rangle |\phi_0\rangle, \\ |e_{(3)}^k/p_\nu\rangle &= |\mu_-^2, s; p_\nu, k\rangle |\phi_-\rangle. \end{aligned}$$

В каждом пространстве $\mathbf{H}_s$ совокупность векторов $|e_{(a)}^k/p_\nu\rangle$, очевидно, является (обобщенным) базисом. Поэтому мы можем определить операторы $\mathcal{J}_m(s)$, $m = 1, 2, 3$, действующие в $\mathbf{H}_s$, задав их матричные элементы:

$$\langle p_\nu/e_{(a)}^k | \mathcal{J}_m(s) | e_{(b)}^l/q_\rho \rangle = \delta^{kl} \delta_{\nu\rho} \delta(p_\nu - q_\rho) (J_m)_{ab},$$

где (3×3) -матрицы J_m выше введены явно. Наконец, введем в пространстве $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ операторы

$$\mathbf{J}_i = \bigoplus_s \mathcal{J}_i(s), \quad i = 1, 2, 3. \quad (25)$$

Прямой проверкой убеждаемся в справедливости равенства

$$\mathbf{J}_1^2 + \mathbf{J}_2^2 + \mathbf{J}_3^2 = 4I(I+1) \quad (I=1),$$

а также коммутационных соотношений вида (11). Таким образом, в пространстве $\mathbf{H}_{\text{phys}}$ реализовано (приводимое) представление группы $SU(2)$. Всякое состояние системы с заданным импульсом $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3)$, спином s и его проекцией k выделяет неприводимое представление, которое действует в трехмерном пространстве с базисом $|e_a\rangle = |e_{(a)}^k/p_\nu\rangle$, $a = 1, 2, 3$. Поэтому в рассматриваемом примере мы также можем интерпретировать число I как изоспин. Заметим, что

$$\mathbf{J}_3 |\mu_*^2, s; p_\nu, k\rangle |\phi_*\rangle = * |\mu_*^2, s; p_\nu, k\rangle |\phi_*\rangle,$$

где символ $*$ означает либо $+1$, либо -1 , либо 0 . Следовательно, массы M_+ , M_0 и M_- отвечают состояниям с проекцией изоспина I_3 , равной $+1$, 0 и -1 , соответственно. Отметим, что теория с хорошей точностью воспроизводит расщепление масс в изотопических мультиплетах, наблюдаемое для частиц Σ и Σ_3 .

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена струноподобная динамическая система, квантовый спектр которой описывается в терминах нелинейных траекторий Редже. Уравнение (23) определяет явный вид траектории, которая фиксирована заданием двух констант — α' и τ , а также двух чисел — целого n и полуцелого I . Кривая $s = \alpha(M^2)$, являясь параболой, асимптотики не имеет, однако

$$\lim_{M^2 \rightarrow \infty} \frac{d\alpha}{d(M^2)} = \frac{\alpha'}{n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Таким образом, константа α' определяет в теории масштаб допустимых асимптотических наклонов траекторий. Параметр τ в представленной модели определяет величину изотопического расщепления масс в мультиплете; это дает основание предположить,

что $\tau = f(e)$, где e — элементарный электрический заряд, а f — некоторая монотонная функция.

По-видимому, известная модель *струнного мешка* [12] может служить феноменологической основой не только для “канонических” струнных моделей частиц [13], но и для представленной конструкции. Действительно, указанный объект — струнный мешок — может рассматриваться как результат “вытягивания” объемного мешка, т.е. как результат некоторого предельного перехода. Итоговая теория при этом будет зависеть, вообще говоря, как от исходной объемной модели, так и от способа выполнения такого предельного перехода (некоторые замечания по этому поводу см. в работе [14]). Этот факт делает естественным описание адронного спектра не только в терминах канонической релятивистской струны, но и в терминах иных динамических систем, позволяющих интерпретировать их в том или ином смысле как одномерный протяженный объект в пространстве Минковского.

Список литературы

- [1] *E. P. Wigner.* Ann. Math. 1939. V. 40. P. 149–204.
- [2] *I. T. Todorov.* Constraint Hamiltonian dynamics of directly interacting relativistic point particles. In: Quantum Theory, Groups, Fields and Particles. Math. Phys. Stud. V. 4. Ed. A. O. Barut. Dordrecht: Reidel, 1983. P. 293–324.
- [3] *П. А. М. Дирак.* Обобщенная гамильтонова динамика. В сб.: П. А. М. Дирак. К созданию квантовой теории поля. Основные статьи 1925–1958 гг. М.: Наука, 1990. С. 303–328.
- [4] *И. А. Малкин, В. И. Манько.* Динамические симметрии и когерентные состояния квантовых систем. М.: Наука, 1979.
- [5] *С. В. Талалов.* ТМФ. 1996. Т. 106. № 2. С. 218–232.
- [6] *S. V. Talalov.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 845–857.
- [7] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [8] *В. Г. Маханьков, Ю. П. Рыбаков, В. И. Санюк.* УФН. 1992. Т. 162. № 2. С. 1–61.
- [9] *V. V. Nesterenko.* On squaring the primary constraints in a generalized Hamiltonian dynamics. Препринт ОИЯИ Е2-93-328. Дубна: ОИЯИ, 1993.
- [10] *В. П. Павлов.* ТМФ. 1995. Т. 104. № 2. С. 304–309.
- [11] *D. E. Groom et al. Particle Data Group.* Eur. Phys. J. C. 2000. V. 15. P. 1–878.
- [12] *K. Johnson, C. B. Thorn.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. № 7. P. 1934–1939.
- [13] *Б. М. Барбашов, В. В. Нестеренко.* Модель релятивистской струны в физике адронов. М.: Энергоатомиздат, 1987.
- [14] *Л. В. Лапешвили.* ЯФ. 1994. Т. 57. № 1. С. 134–141.

Поступила в редакцию 10.VI.2002 г.