Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Силы отталкивания
в полевой теории гравитации, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 2, 272–288

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1901>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 18:15:06

© 2005 г.

С. С. Герштейн*, А. А. Логунов*,
М. А. Мествиришвили*

СИЛЫ ОТТАЛКИВАНИЯ В ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ГРАВИТАЦИИ

Показано, что в полевой теории гравитации замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем приводит к силам отталкивания, которые устраняют космологическую особенность в развитии однородной и изотропной Вселенной и останавливают коллапс больших масс.

Ключевые слова: масса покоя гравитона, замедление хода времени, силы гравитационного отталкивания.

Как в теории тяготения Ньютона, так и в общей теории относительности (ОТО) Эйнштейна силы гравитации — это только силы притяжения. Однако полевые представления о гравитации показывают, что в сильных гравитационных полях это не совсем так. Но об этом ниже.

В релятивистской теории гравитации (РТГ) [1], [2] гравитационное поле рассматривается как физическое поле $\phi^{\mu\nu}$ со спинами 2 и 0, развивающееся, как и все другие физические поля, в пространстве Минковского. Это означает, что в основе РТГ лежит специальная теория относительности, а следовательно, принцип относительности имеет всеобщее значение и выполняется для всех физических явлений, в том числе и гравитационных. Именно это обстоятельство обеспечивает наличие законов сохранения энергии-импульса и момента количества движения для всех физических процессов, в том числе и гравитационных. РТГ исходит из гипотезы, что гравитация универсальна и ее источником является сохраняющийся тензор энергии-импульса всех полей материи, в том числе и гравитационного.

Такой подход находится в соответствии с идеей Эйнштейна, о которой он писал еще в 1913 г. [3]: "... тензор гравитационного поля $\vartheta_{\mu\nu}$ является источником поля наравне с тензором материальных систем $\Theta_{\mu\nu}$. Исключительное положение энергии гравитационного поля по сравнению со всеми другими видами энергии привело бы к недопустимым последствиям". Эта мысль Эйнштейна и была положена в основу построения РТГ. При построении ОТО Эйнштейну не удалось ее реализовать, поскольку вместо тензора энергии-импульса гравитационного поля в ОТО возник псевдотензор гравитационного

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: gershtein@ihep.ru; Anatoly.Logunov@ihep.ru

поля. Все это произошло из-за того, что Эйнштейн не рассматривал гравитационное поле как физическое поле (типа поля Фарадея–Максвелла) в пространстве Минковского. Именно поэтому в уравнениях ОТО не содержится метрики пространства Минковского.

Подход к гравитации, принятый в РТГ, приводит к *геометризации*: возникает эффективное риманово пространство, *но только с простой топологией*. Это приводит к следующей картине: движение пробного тела в пространстве Минковского под действием гравитационного поля эквивалентно движению этого тела в эффективном римановом пространстве, созданном гравитационным полем. Силы гравитации являются физическими силами, а поэтому не могут быть обращены в нуль выбором системы координат. Именно это позволяет в теории отделить силы инерции от сил гравитации.

В полевом подходе к гравитации возникает эффективное риманово пространство, но только с простой топологией. Именно поэтому полевые представления не могут привести к ОТО, где топология в общем случае не простая.

Описанные выше представления приводят к следующей полной системе уравнений [1], [2]:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R\right) + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi GT^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = 0. \quad (2)$$

Здесь D_ν – ковариантная производная в пространстве Минковского, $\gamma_{\alpha\beta}$ – метрический тензор пространства Минковского, $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор эффективного риманова пространства, G – гравитационная постоянная, $m = m_g c/\hbar$, m_g – масса гравитона, $\tilde{g}^{\nu\mu} = \sqrt{-g} g^{\nu\mu}$ – плотность метрического тензора $g^{\nu\mu}$. Эффективная метрика риманова пространства $g^{\mu\nu}$ связана с гравитационным полем $\phi^{\mu\nu}$ соотношением

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

где

$$\tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma}\phi^{\mu\nu}.$$

Система уравнений (1), (2) общековариантна относительно произвольных преобразований координат и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Она непосредственно следует из принципа наименьшего действия с плотностью лагранжиана

$$L = L_g(\gamma_{\mu\nu}, \tilde{g}^{\mu\nu}) + L_m(\tilde{g}^{\mu\nu}, \phi_A),$$

где

$$L_g = \frac{1}{16\pi}\tilde{g}^{\mu\nu}(G_{\mu\nu}^\lambda G_{\lambda\sigma}^\sigma - G_{\mu\sigma}^\lambda G_{\nu\lambda}^\sigma) - \frac{m^2}{16\pi}\left(\frac{1}{2}\gamma_{\mu\nu}\tilde{g}^{\mu\nu} - \sqrt{-g} - \sqrt{-\gamma}\right),$$

$$G_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2}g^{\lambda\sigma}(D_\mu g_{\sigma\nu} + D_\nu g_{\sigma\mu} - D_\sigma g_{\mu\nu}).$$

Для того чтобы времениподобные и изотропные интервалы в эффективном римановом пространстве не выходили за конус исходного пространства Минковского, должно выполняться условие причинности

$$\gamma_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 0, \quad g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu \leq 0. \quad (3)$$

Таким образом, движение пробных тел под действием гравитационного поля всегда происходит *внутри* как риманова конуса, так и конуса пространства Минковского.

Масса покоя гравитона возникает в теории с необходимостью, поскольку только с ее введением и можно рассматривать гравитационное поле как физическое поле в пространстве Минковского, считая его источником полный сохраняющийся тензор энергии-импульса всей материи. Но именно наличие массы покоя гравитона совершенно изменяет как процесс коллапса, так и эволюцию Вселенной.

Когда Эйнштейн в 1912 г. связал гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, оказалось, что такое поле вызывает замедление хода времени физического процесса. Это замедление, в частности, можно проиллюстрировать на примере решения Шварцшильда, сравнивая ход времени в присутствии гравитационного поля с ходом времени для удаленного наблюдателя. Однако в общем случае в ОТО присутствует только метрический тензор риманова пространства, а поэтому в уравнениях Гильберта–Эйнштейна отсутствуют какие-либо признаки инерциального времени пространства Минковского. По этой причине универсальное свойство гравитационного поля оказывать замедляющее действие на ход времени по сравнению с инерциальным временем не могло получить в ОТО дальнейшего развития.

Возникновение эффективного риманова пространства в полевой теории гравитации при сохранении пространства Минковского как основного пространства придает свойству гравитационного поля замедлять ход времени особое значение. Именно только в этом случае и можно говорить в полной мере о замедлении хода времени, осуществляя сравнение хода времени в гравитационном поле с ходом времени T в инерциальной системе координат пространства Минковского при отсутствии гравитации. Все это и реализовано в РТГ, так как в полную систему ее уравнений входит метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Но это общее свойство гравитационного поля – замедлять ход времени – приводит в полевой теории к важному выводу [4]: *замедление хода времени физического процесса в сильном гравитационном поле по сравнению с ходом инерциального времени T создает, благодаря наличию ненулевой массы покоя гравитона, эффективные полевые силы гравитационной природы. Эти эффективные силы в гравитации оказываются силами отталкивания.*

Чтобы показать, что изменение хода времени ведет к появлению силы, обратимся к уравнению Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dT^2} = F.$$

Если в этом уравнении формально перейти от инерциального времени T ко времени τ по правилу

$$d\tau = U(T) dT, \quad (4)$$

то легко получить уравнение

$$m \frac{d^2 x}{d\tau^2} = \frac{1}{U^2} \left(F - \frac{dx}{dT} \frac{d}{dT} \ln U \right). \quad (5)$$

Отсюда видно, что изменение хода времени, определяемое функцией U , ведет к появлению эффективной силы. Однако все это имеет чисто формальный характер, поскольку

в данном случае нет физической причины, которая изменила бы ход времени. Но именно этот формальный пример показывает, что если в природе идет процесс замедления хода времени, то он неминуемо создает эффективные полевые силы, а поэтому их необходимо учитывать в теории как нечто совершенно новое и удивительное. Физическое гравитационное поле изменяет как ход времени, так и параметры пространственных величин по сравнению с теми же величинами в инерциальной системе пространства Минковского при отсутствии гравитации.

В настоящей статье на примерах коллапса и эволюции однородной и изотропной Вселенной мы подробно рассмотрим, как проявляются эффективные полевые силы отталкивания, возникающие из-за замедления хода времени под действием гравитационного поля. Рассмотрим статическое сферически-симметричное поле

$$ds^2 = U(r) dT^2 - V(r) dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (6)$$

$$d\sigma^2 = dT^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (7)$$

Здесь функция U определяет замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T . Сильное замедление хода времени наступает тогда, когда эта функция достаточно мала по сравнению с единицей. В случае нулевой массы гравитона система уравнений (1), (2) для метрических коэффициентов из (6) имеет решение Шварцшильда

$$U = \frac{r - GM}{r + GM}, \quad V = \frac{r + GM}{r - GM}, \quad W = r + GM. \quad (8)$$

Отсюда видно, что сильное замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T имеет место в области, когда W близко к $2GM$. При наличии массы покоя гравитона система уравнений (1), (2) приводит (см. приложение 1, формулы (П.44), (П.48)) в области

$$W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \left(\frac{m_g c}{h} \frac{W_g}{2} \right)^2 \quad (9)$$

к следующим формулам:

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V = \frac{1}{2} \frac{W}{W - W_g}, \quad \frac{dr}{dW} = 1, \quad (10)$$

где $W_g = 2GM/c^2$ — радиус Шварцшильда, $\alpha = ((m_g c/h)(W_g/2))^2$. Сравнивая (8) и (10), мы видим, что масса гравитона m_g не допускает обращения величины U в нуль. *Масса покоя гравитона устанавливает для любого тела свой предел на замедление хода времени.* Этот предел определяется линейной функцией от радиуса Шварцшильда, т.е. от массы тела $(m_g c/h)W_g/2$. В ОТО такой предел отсутствует. Такое свойство гравитационного поля ведет в РТГ к кардинальным изменениям как в движении пробного тела в гравитационном поле, определяемом выражениями (10), так и в развитии однородной и изотропной Вселенной.

Движение пробного тела происходит по геодезической линии риманова пространства

$$\frac{dv^\mu}{ds} + \Gamma_{\alpha\beta}^\mu \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0, \quad (11)$$

где $v^\mu = dx^\mu/ds$ – 4-вектор скорости v^μ , который удовлетворяет условию

$$g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = 1. \quad (12)$$

Рассмотрим радиальное движение

$$v^\theta = v^\phi = 0, \quad v^1 = \frac{dr}{ds}. \quad (13)$$

Принимая во внимание, что символ Кристоффеля Γ_{01}^0 равен

$$\Gamma_{01}^0 = \frac{1}{2U} \frac{dU}{dr}, \quad (14)$$

из уравнения (11) находим

$$\frac{dv^0}{ds} + \frac{1}{U} \frac{dU}{dr} v^0 v^1 = 0. \quad (15)$$

Решая это уравнение, получим

$$\frac{d}{dr} \ln(v^0 U) = 0. \quad (16)$$

Отсюда имеем

$$v_0 = \frac{dx^0}{ds} = \frac{U_0}{U}, \quad (17)$$

где U_0 – постоянная интегрирования. Если принять скорость падающего пробного тела на бесконечности равной нулю, то получим $U_0 = 1$. Из соотношения (12) находим

$$\frac{dr}{ds} = -\sqrt{\frac{1-U}{UV}}. \quad (18)$$

Подставляя (10) в это выражение, получим

$$\frac{dW}{ds} = -\frac{\hbar}{m_g c} \frac{2}{W_g} \sqrt{2 \frac{W}{W_g} \left(1 - \frac{W_g}{W}\right)}. \quad (19)$$

Отсюда видно, что возникает точка поворота. Дифференцируя (19) по s , находим

$$\frac{d^2 W}{ds^2} = 4 \left(\frac{\hbar}{m_g c} \right)^2 \frac{1}{W_g^3}. \quad (20)$$

Мы видим, что в точке поворота ускорение положительно, т.е. имеет место отталкивание, и оно значительное. Интегрируя (19), получим

$$W = W_g + 2 \left(\frac{\hbar}{m_g c} \right)^2 \frac{(s - s_0)^2}{W_g^3}. \quad (21)$$

Из выражения (21) ясно, что пробное тело не может пересечь сферу Шварцшильда.

Поскольку особенность в (10), которая возникает вне вещества, нельзя устранить выбором системы координат, это означает, что она должна отсутствовать, так как в противном случае невозможно сшить решение внутри вещества с внешним решением.

Поэтому тело не может иметь радиус меньше радиуса Шварцшильда. Так возникает ограничение на величину поля. Этот вывод об отсутствии особенности Шварцшильда находится в согласии с заключением Эйнштейна [5]: “Шварцшильд-овская сингулярность отсутствует, так как вещество нельзя концентрировать произвольным образом; в противном случае частицы, образующие скопления, достигнут скорости света”. Хотя в нашем случае причина отсутствия сингулярности другая, но общий вывод совпадает. Таким образом, в полевой теории заложен механизм самоограничения, который исключает возможность образования “черных дыр”.

Другой пример, демонстрирующий появление новых эффективных полевых сил из-за замедления хода времени, – это развитие однородной и изотропной Вселенной. В этом случае на основании уравнения (2) мы имеем только плоскую Вселенную (см. приложение 2, формулы (П.54), (П.55)), когда трехмерная геометрия евклидова, т.е.

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau)(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2), \\ d\sigma^2 &= \frac{1}{a^6} d\tau^2 - dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (22)$$

где

$$d\tau = a^3 dT. \quad (23)$$

Так как система уравнений (1), (2) полная, то это решение единственное. Уравнения (1) с помощью (22) сводятся к следующей системе уравнений для масштабного фактора $a(\tau)$ (см. приложение 2, формулы (П.56), (П.57)):

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) - \frac{1}{6} (mc)^2 \left(1 - \frac{1}{a^6} \right), \quad (24)$$

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\tau) - \frac{1}{12} (mc)^2 \left(2 - \frac{3}{a^2 \beta^4} + \frac{1}{a^6} \right). \quad (25)$$

Масштабный фактор $a(\tau)$ в (23) определяет замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T при отсутствии гравитации. Но именно этот же фактор в правой части уравнения (25) при сильном замедлении хода времени останавливает процесс сжатия Вселенной. Когда величина a становится достаточно малой, член $(mc)^2/(12a^6)$ в правой части уравнения (25) становится достаточно большим, несмотря на малость m , и правая часть в (25) обращается в нуль, происходит остановка сжатия.

Минимальное значение a равно

$$a_{\min} = \left[\left(\frac{m_g c^2}{\hbar} \right)^2 \frac{1}{32\pi G \rho_{\max}} \right]^{1/6}, \quad (26)$$

тем самым в РТГ отсутствует космологическая сингулярность, которая имеет место в ОТО. Это означает, что “*Большого взрыва*” не было, а было состояние с большой плотностью $\rho_{\max}$ и высокой температурой в каждой точке Вселенной. С другой стороны, в силу уравнения (24) возникающие из-за замедления хода времени силы отталкивания обеспечивают ускоренное расширение Вселенной от точки остановки сжатия. Ускорение в радиационной фазе в точке остановки сжатия равно

$$\left. \frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = \frac{8\pi G}{3} \rho_{\max}. \quad (27)$$

Именно это ускорение и явилось “толчком” к расширению Вселенной. Максимальное значение масштабного фактора $a_{\max} = \beta$. Величина β определяется интегралом движения.

Из-за неравенства нулю массы покоя гравитона в уравнения (1) однозначным образом с необходимостью вводится метрический тензор $\gamma_{\alpha\beta}$ пространства Минковского. Благодаря наличию ненулевой массы покоя гравитона стал возможным сам факт определения величины замедления хода времени физического процесса в гравитационном поле по сравнению с инерциальным временем. Именно эта величина и определила силу отталкивания. Благодаря ненулевой массе гравитона замедление хода времени проявилось в виде сил отталкивания.

Таким образом, полевые представления о гравитационном поле, развивающемся в пространстве Минковского, позволили открыть *фундаментальное свойство гравитационного поля: создавать эффективные силы отталкивания благодаря замедлению хода времени физического процесса по сравнению с инерциальным временем.*

В ОТО таких сил нет. Возникает интересная картина: гравитационное поле в РТГ, проявляя себя как силы притяжения и собирая материю, затем вступает в фазу, когда под действием этого поля происходит сильное замедление хода времени по сравнению с инерциальным временем T , что благодаря наличию ненулевой массы покоя гравитона неминуемо ведет к эффективным полевым силам отталкивания, которые останавливают процесс сжатия под действием сил притяжения. Мы видим, что в самом гравитационном поле в полевой теории заложен механизм самоограничения. Именно он осуществляет остановку коллапса массивных тел на заключительной стадии развития и устраняет космологическую сингулярность, обеспечивая циклическое развитие Вселенной.

Масса гравитона, входящая в уравнение (1), может быть оценена из наблюдательных данных по измерению величины Ω_{tot} , которая определена как отношение полной современной плотности материи ρ_{tot} к критической плотности ρ_c :

$$\Omega_{\text{tot}} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\rho_c}, \quad \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G}, \quad (28)$$

где H – постоянная Хаббла. Из уравнений (24), (25) следует

$$\Omega_{\text{tot}} = 1 + \frac{1}{6} \left(\frac{m_g c^2}{\hbar H} \right)^2. \quad (29)$$

Масса гравитона m_g входит в Ω_{tot} с большим множителем, определяемым величиной $c^2/(\hbar H)$. Таким образом, согласно РТГ, как следует из (29), современная плотность материи должна превышать критическую плотность. Так, еще в 1984 г. в статье [6] отмечалось: “Данная теория дает предсказание исключительной силы – она приводит к строго определенному развитию Вселенной. Согласно ей Вселенная не замкнута, она в силу уравнений (4.29)¹⁾ является “плоской”.” И далее: теория “с необходимостью требует обязательного существования во Вселенной “скрытой массы” в какой-либо форме материи. Итак, во Вселенной должна существовать “скрытая масса”, чтобы полная

¹⁾ Имеется в виду уравнение (2) данной работы.

плотность вещества была равна критическому значению ρ_0 ". В последние годы наблюдательные данные подтвердили этот вывод. С введением массы покоя гравитона это следствие теории было усилено и привело к формуле (29). Сравнивая (29) с современными наблюдательными данными по измерению Ω_{tot} , можно найти с вероятностью 95% верхний предел для массы гравитона:

$$m_g < 3.6 \cdot 10^{-66} \text{ г.} \quad (30)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Статическое сферически-симметричное гравитационное поле в РТГ

Интервал в пространстве Минковского в сферических координатах имеет вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 - (dr)^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2), \quad (\text{П.1})$$

где $x^0 = cT$. Интервал в эффективном римановом пространстве для сферически-симметричного статического поля записывается в форме

$$ds^2 = U(r)(dx^0)^2 - V(r)dr^2 - W^2(r)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{П.2})$$

Уравнения (1), (2) представим в форме

$$R^\mu_\nu - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu R + \frac{m^2}{2} \left(\delta^\mu_\nu + g^{\mu\alpha} \gamma_{\alpha\nu} - \frac{1}{2}\delta^\mu_\nu g^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta} \right) = \kappa T^\mu_\nu, \quad (\text{П.3})$$

$$D_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} = 0. \quad (\text{П.4})$$

В развернутом виде уравнение (П.4) имеет вид

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma} \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0. \quad (\text{П.5})$$

Здесь R^μ_ν – тензор Риччи, R – скалярная кривизна, T^μ_ν – тензор энергии-импульса источника, $\gamma^\nu_{\lambda\sigma}$ – символы Кристоффеля пространства Минковского, $\kappa = 8\pi G/c^2$. Для сферически-симметричного статического источника компоненты тензора T^μ_ν имеют вид

$$T^0_0 = \rho(r), \quad T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 = -\frac{p(r)}{c^2},$$

где ρ – плотность массы, p – изотропное давление.

Для определения метрических коэффициентов U , V и W можно воспользоваться уравнениями (П.3) для значений индексов $\mu = 0$, $\nu = 0$ и $\mu = 1$, $\nu = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 - \frac{2}{VW} \frac{d^2W}{dr^2} - \frac{1}{W} \frac{dW}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{V} \right) + \\ + \frac{1}{2} m^2 \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) - \frac{r^2}{W^2} \right] = \kappa \rho, \\ \frac{1}{W^2} - \frac{1}{VW^2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 - \frac{1}{UVW} \frac{dW}{dr} \frac{dU}{dr} + \\ + \frac{1}{2} m^2 \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) - \frac{r^2}{W^2} \right] = -\kappa \frac{p}{c^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Уравнение (П.5) принимает вид

$$\frac{d}{dr} \left(\sqrt{\frac{U}{V}} W^2 \right) = 2r\sqrt{UV}. \quad (\text{П.7})$$

Учитывая тождество

$$\frac{dr}{dW} \frac{1}{W^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{W}{V} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 \right] = \frac{1}{VW^2} \left(\frac{dW}{dr} \right)^2 + \frac{2}{VW} \frac{d^2W}{dr^2} + \frac{1}{W} \frac{dW}{dr} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{V} \right)$$

и переходя от производных по r к производным по W , перепишем уравнения (П.6) и (П.7) в виде

$$1 - \frac{d}{dW} \left[\frac{W}{V(dr/dW)^2} \right] + \frac{1}{2} m^2 \left[W^2 - r^2 + \frac{W^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = \varkappa W^2 \rho, \quad (\text{П.8})$$

$$1 - \frac{W}{V(dr/dW)^2} \frac{d}{dW} [\ln(UW)] + \frac{1}{2} m^2 \left[W^2 - r^2 - \frac{W^2}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = -\varkappa W^2 \frac{p}{c^2}, \quad (\text{П.9})$$

$$\frac{d}{dW} \left[\sqrt{\frac{U}{V}} W^2 \right] = 2r\sqrt{UV} \frac{dr}{dW}. \quad (\text{П.10})$$

Вычитая уравнение (П.9) из уравнения (П.8) и вводя новые переменные

$$Z = \frac{UW^2}{V\dot{r}^2}, \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt}, \quad t = \frac{W - W_0}{W_0}, \quad (\text{П.11})$$

получим

$$\frac{dZ}{dW} - \frac{2Z}{U} \frac{dU}{dW} - 2 \frac{Z}{W} - \frac{m^2 W^3}{2W_0^2} \left(1 - \frac{U}{V} \right) = -\varkappa \frac{W^3}{W_0^2} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) U. \quad (\text{П.12})$$

Складывая уравнения (П.8) и (П.9), находим

$$1 - \frac{1}{2} \frac{W_0^2}{W} \frac{1}{U} \frac{dZ}{dW} + \frac{m^2}{2} (W^2 - r^2) = \frac{1}{2} \varkappa W^2 \left(\rho - \frac{p}{c^2} \right). \quad (\text{П.13})$$

Рассмотрим уравнения (П.12) и (П.13) вне вещества в области, определяемой неравенствами

$$\frac{U}{V} \ll 1, \quad \frac{1}{2} m^2 (W^2 - r^2) \ll 1. \quad (\text{П.14})$$

В этой области уравнение (П.13) имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \frac{W_0^2}{W} \frac{dZ}{dW} = \frac{1}{2} \frac{W_0}{W} \frac{dZ}{dt}. \quad (\text{П.15})$$

Принимая во внимание (П.15), приведем уравнение (П.12) к виду

$$Z \frac{d^2 Z}{dW^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{dZ}{dW} \right)^2 + \frac{1}{4} m^2 \frac{W^3}{W_0^2} \frac{dZ}{dW} = 0. \quad (\text{П.16})$$

Используя связь t с W согласно (П.11), запишем уравнение (П.16) в форме

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}(\dot{Z})^2 + \alpha(1+t)^3\dot{Z} = 0, \quad (\text{П.17})$$

где $\alpha = m^2 W_0^2/4$, $\dot{Z} = dZ/dt$. Для значений t , определяемых неравенством

$$0 \leq t \ll \frac{1}{3}, \quad (\text{П.18})$$

уравнение (П.17) упрощается:

$$Z\ddot{Z} - \frac{1}{2}(\dot{Z})^2 + \alpha\dot{Z} = 0.$$

Оно имеет решение

$$\lambda\sqrt{Z} = 2\alpha \ln\left(1 + \frac{\lambda\sqrt{Z}}{2\alpha}\right) + \frac{\lambda^2}{2}t, \quad (\text{П.19})$$

где λ — произвольная постоянная.

На основании (П.11) и (П.15) имеем

$$U = \frac{1}{2} \frac{W_0}{W} \dot{Z}, \quad Vr^2 = \frac{1}{2} W_0 W \frac{\dot{Z}}{Z}. \quad (\text{П.20})$$

Используя (П.19), находим

$$\dot{Z} = 2\alpha + \lambda\sqrt{Z}. \quad (\text{П.21})$$

Подставляя (П.21) в (П.20), получим

$$U = \frac{W_0}{W} \left(\alpha + \frac{\lambda}{2} \sqrt{Z} \right), \quad Vr^2 = W_0 W \frac{\alpha + \lambda\sqrt{Z}/2}{Z}. \quad (\text{П.22})$$

При $\alpha = 0$ на основании (П.19) имеем

$$\sqrt{Z} = \frac{\lambda t}{2}.$$

Подставляя это выражение в (П.22), находим

$$U = \left(\frac{\lambda}{2} \right)^2 \frac{W - W_0}{W}. \quad (\text{П.23})$$

Но это выражение для U должно точно совпадать с решением Шварцшильда

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad W_g = \frac{2GM}{c^2}. \quad (\text{П.24})$$

Сравнивая (П.23) и (П.24), получим

$$\lambda = 2, \quad W_0 = W_g. \quad (\text{П.25})$$

Таким образом, находим

$$U = \frac{W_g}{W}(\alpha + \sqrt{Z}), \quad V\dot{r}^2 = W_g W \frac{\alpha + \sqrt{Z}}{Z}. \quad (\text{П.26})$$

Нам необходимо теперь определить зависимость r от W с помощью (П.10). Подставляя (П.26) в уравнение (П.10) и переходя к переменной

$$\ell = \frac{r}{W_g}, \quad (\text{П.27})$$

получим

$$\frac{d}{d\sqrt{Z}} \left[(1+t) \frac{dZ}{dt} \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \right] = 4\ell.$$

Дифференцируя это уравнение по $\sqrt{Z}$ и учитывая (П.21), находим

$$(1+t)(\alpha + \sqrt{Z}) \frac{d^2\ell}{(d\sqrt{Z})^2} + (1+t+\sqrt{Z}) \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} - 2\ell = 0. \quad (\text{П.28})$$

Нас интересует область значений t , определяемая неравенством (П.18), уравнение (П.28) в этой области упрощается и имеет вид

$$(\alpha + \sqrt{Z}) \frac{d^2\ell}{(d\sqrt{Z})^2} + (1 + \sqrt{Z}) \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} - 2\ell = 0.$$

Общее решение этого уравнения будет

$$\ell = A\ell_1 + B\ell_2,$$

где

$$\ell_1 = F[-2, 1 - \alpha, -(\alpha + \sqrt{Z})], \quad \ell_2 = (\alpha + \sqrt{Z})^\alpha F[-2 + \alpha, 1 + \alpha, -(\alpha + \sqrt{Z})],$$

A и B — произвольные постоянные, F — вырожденная гипергеометрическая функция. Учитывая равенства

$$F[-2, 1 - \alpha, -(\alpha + \sqrt{Z})] = 1 + \frac{2(\alpha + \sqrt{Z})}{1 - \alpha} + \frac{(\alpha + \sqrt{Z})^2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)},$$

$$F[-2 + \alpha, 1 + \alpha, -(\alpha + \sqrt{Z})] = e^{-(\alpha + \sqrt{Z})} F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z}),$$

имеем

$$\ell = A \left[1 + \frac{2(\alpha + \sqrt{Z})}{1 - \alpha} + \frac{(\alpha + \sqrt{Z})^2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \right] - B\beta(Z)e^{-\alpha} F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z}), \quad (\text{П.29})$$

где $\beta(Z) = (\alpha + \sqrt{Z})^\alpha e^{-\sqrt{Z}}$. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} = & A \frac{2(2 + \sqrt{Z})}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} + \\ & + B \left[-\frac{\sqrt{Z} F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{\alpha + \sqrt{Z}} + \frac{dF(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{d(\alpha + \sqrt{Z})} \right] \beta(Z) e^{-\alpha}. \end{aligned} \quad (\text{П.30})$$

Но так как

$$\frac{dF(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{d(\alpha + \sqrt{Z})} = \frac{3}{1 + \alpha} F(4, 2 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z}),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} = & A \frac{2(2 + \sqrt{Z})}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} + \\ & + B\beta(Z) \left[-\frac{\sqrt{Z} F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{\alpha + \sqrt{Z}} + \frac{3F(4, 2 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{1 + \alpha} \right] e^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\frac{dr}{dW} = \frac{d\ell}{dt} = \frac{\alpha + \sqrt{Z}}{\sqrt{Z}} \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}, \quad (\text{П.31})$$

то нам необходимо выбрать постоянные A и B таким образом, чтобы погасить особенность для функции (П.31) в точке $\sqrt{Z} = 0$. Поэтому положим

$$\left. \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \right|_{\sqrt{Z}=0} = 0.$$

Это условие приводит к соотношению между постоянными

$$B = -A \frac{4}{3} \frac{(1 + \alpha)e^{\alpha}}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)\alpha^{\alpha} F(4, 2 + \alpha, \alpha)}.$$

Подставляя это выражение в (П.29) и (П.30), находим

$$\begin{aligned} \ell = & A \left[1 + \frac{2(\alpha + \sqrt{Z})}{1 - \alpha} + \frac{(\alpha + \sqrt{Z})^2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} - \right. \\ & \left. - \frac{4}{3} \frac{(1 + \alpha)F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)\alpha^{\alpha} F(4, 2 + \alpha, \alpha)} \beta(Z) \right], \end{aligned} \quad (\text{П.32})$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} = & A \frac{2}{(1 - \alpha)(2 - \alpha)} \left[2 + \sqrt{Z} + \right. \\ & + \frac{2\sqrt{Z}(1 + \alpha)F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{3\alpha^{\alpha}(\alpha + \sqrt{Z})F(4, 2 + \alpha, \alpha)} \beta(Z) - \\ & \left. - \frac{2F(4, 2 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})}{\alpha^{\alpha} F(4, 2 + \alpha, \alpha)} \beta(Z) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.33})$$

Можно показать, что производная (П.33) положительна. Из выражений (П.32) и (П.33) путем разложения в ряд Тейлора функций $F(3, 1 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})$, $F(4, 2 + \alpha, \alpha + \sqrt{Z})$ в окрестности $\sqrt{Z} = 0$, а также учитывая, что $\alpha \ll 1$, получим

$$\begin{aligned} \ell = & A \left[1 + \frac{1}{2}(\sqrt{Z} + \alpha)(4 + \sqrt{Z} - \alpha) - \frac{2}{3}\beta(Z)(1 + 3\sqrt{Z} + 3Z) + O(Z^{3/2}) \right], \\ \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \simeq & A \left[2(1 - \beta(Z)) + \sqrt{Z} \left(1 - 4\beta + \frac{2}{3} \frac{\beta(Z)}{\alpha + \sqrt{Z}} + \frac{2\sqrt{Z}}{\alpha + \sqrt{Z}} \beta(Z) \right) + O(Z) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.34})$$

Рассмотрим следующие предельные случаи.

СЛУЧАЙ 1:

$$\sqrt{Z} \gg \alpha. \quad (\text{П.35})$$

В этом случае из выражения (П.19) с учетом (П.25) имеем

$$\sqrt{Z} = t. \quad (\text{П.36})$$

Подставляя это выражение в (П.22) и учитывая (П.25), получим

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad V \dot{r}^2 = \frac{W W_g^2}{W - W_g}. \quad (\text{П.37})$$

В приближении (П.35) выражения (П.34) принимают вид

$$\begin{aligned} \ell &= A \left[\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{Z} - \frac{2}{3} \alpha \ln \sqrt{Z} - \frac{4}{3} \alpha \sqrt{Z} \ln \sqrt{Z} + \frac{1}{6} Z + O(Z^{3/2}) \right], \\ \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} &\simeq A \left[\frac{2}{3} + \frac{\sqrt{Z}}{3} - \frac{4\alpha}{3} \ln \sqrt{Z} - \frac{2}{3} \frac{\alpha}{\sqrt{Z}} + O(\alpha) \right]. \end{aligned}$$

Согласно (П.11), (П.27) и (П.36) имеем

$$\dot{r} = W_g \frac{d\ell}{d\sqrt{Z}}. \quad (\text{П.38})$$

Но поскольку в (П.37) выражение для V должно быть очень близким к решению Шварцшильда, находим

$$A = \frac{3}{2}. \quad (\text{П.39})$$

Итак, для данного случая имеем решение Шварцшильда

$$U = \frac{W - W_g}{W}, \quad V = \frac{W}{W - W_g}. \quad (\text{П.40})$$

Перейдем теперь к другому предельному случаю, где влияние массы гравитона существенно.

СЛУЧАЙ 2:

$$\sqrt{Z} \ll \alpha. \quad (\text{П.41})$$

В этом приближении из выражения (П.19) с учетом (П.25) находим

$$Z = 2\alpha t. \quad (\text{П.42})$$

Подставляя это выражение в (П.22) и учитывая (П.25), получим

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V \dot{r}^2 = \frac{1}{2} \frac{W W_g^2}{W - W_g}. \quad (\text{П.43})$$

Согласно (П.41) и (П.42) выражения (П.43) применимы в области

$$t \ll \frac{\alpha}{2}, \quad \text{или} \quad W - W_g \ll \frac{1}{2} W_g \left(\frac{m_g c}{\hbar} \frac{W_g}{2} \right)^2. \quad (\text{П.44})$$

Для данного предельного случая из (П.34) имеем

$$\ell \simeq A \left[\frac{1}{3} + \frac{\alpha}{3} \left(\frac{\sqrt{Z}}{\alpha} \right)^2 + O(Z^{3/2}) \right], \quad (\text{П.45})$$

$$\frac{d\ell}{d\sqrt{Z}} \simeq \frac{2}{3} A \frac{\sqrt{Z}}{\alpha} (1 + O(\sqrt{Z})). \quad (\text{П.46})$$

Подставляя (П.46) в (П.31) и учитывая (П.39), находим

$$\dot{r} = W_g, \quad \text{или} \quad \frac{dr}{dW} = 1. \quad (\text{П.47})$$

Итак, для рассмотренного предельного случая (П.41) с учетом (П.47) выражения (П.43) принимают вид [7]

$$U = \alpha \frac{W_g}{W}, \quad V = \frac{1}{2} \frac{W}{W - W_g}, \quad \frac{dr}{dW} = 1, \quad (\text{П.48})$$

они применимы в области (П.44). Выражения (П.48) существенно отличаются от решения Шварцшильда прежде всего тем, что функция U , определяющая замедление хода времени благодаря ненулевой массе покоя гравитона, не обращается в нуль, тогда как в ОТО (см. (27)) она обращается в нуль на сфере Шварцшильда. Если в ОТО особенность Шварцшильда устраняется выбором системы координат, то в РТГ функции (П.48) приводят к сингулярности, которая не может быть устранена преобразованиями координат. Именно поэтому эта особенность не допустима вне вещества, поскольку в противном случае невозможношить внутреннее решение с внешним решением. Именно это и приводит к самоограничению величины гравитационного поля.

В заключение отметим, что при нахождении решений (П.40) и (П.48) мы требовали выполнения неравенств (П.14) и (П.18). Легко убедиться, что полученные решения (П.40) и (П.48) удовлетворяют неравенствам (П.14), если переменная t ограничена соответственно неравенствами

$$\alpha \ll t \ll 1/3, \quad t \ll \alpha.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Уравнения эволюции масштабного фактора

В однородной и изотропной Вселенной интервал в эффективном римановом пространстве может быть представлен в метрике Фридмана–Робертсона–Уокера:

$$ds^2 = U(T) dT^2 - V(T) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (\text{П.49})$$

интервал в пространстве Минковского имеет вид (7). Уравнения (1), (2) запишем в форме

$$\frac{m^2}{2}\gamma_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) - R_{\mu\nu} + \frac{m^2}{2}g_{\mu\nu}, \quad (\text{П.50})$$

$$\partial_\mu \tilde{g}^{\mu\nu} + \gamma^\nu_{\lambda\sigma} \tilde{g}^{\lambda\sigma} = 0. \quad (\text{П.51})$$

С учетом формул

$$\begin{aligned} \gamma^0_{\lambda\sigma} &= 0, & \gamma^1_{22} &= -r, & \gamma^1_{33} &= -r \sin^2 \theta, \\ \tilde{g}^{00} &= V^{3/2} U^{-1/2} (1 - kr^2)^{-1/2} r^2 \sin \theta, \\ \tilde{g}^{11} &= -V^{1/2} U^{1/2} (1 - kr^2)^{1/2} r^2 \sin \theta, \\ \tilde{g}^{22} &= -V^{1/2} U^{1/2} (1 - kr^2)^{-1/2} \sin \theta, \\ \tilde{g}^{33} &= -V^{1/2} U^{1/2} (1 - kr^2)^{-1/2} (\sin \theta)^{-1} \end{aligned}$$

уравнения (П.51) для компонент $\nu = 0$ и $\nu = 1$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dT} \left(\frac{V}{U^{1/3}} \right) &= 0, \\ -\frac{d}{dr} [(1 - kr^2)^{1/2} r^2] + 2(1 - kr^2)^{-1/2} r &= 0. \end{aligned} \quad (\text{П.52})$$

Для компонент $\nu = 2$ и $\nu = 3$ уравнения (П.51) выполняются тождественно. Из уравнений (П.52) следует

$$\frac{V}{U^{1/3}} = \text{const} = \beta^4 \neq 0, \quad k = 0.$$

Таким образом, РТГ *однозначно приводит к плоской пространственной (евклидовой) геометрии Вселенной.*

Полагая $a^2 = U^{1/3}$, получим

$$ds^2 = \beta^6 \left[d\tau_g^2 - \left(\frac{a}{\beta} \right)^2 (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \right].$$

Здесь величина

$$d\tau_g = \left(\frac{a}{\beta} \right)^3 dT$$

определяет темп замедления хода времени в присутствии гравитационного поля по сравнению с инерциальным временем T . Общий постоянный численный множитель β^6 в интервале ds^2 одинаково увеличивает как время, так и пространственные переменные. Он не отражает динамику развития Вселенной, но определяет время Вселенной и ее пространственный масштаб. Время Вселенной определяется величиной $d\tau$ как времениподобной частью интервала ds^2 :

$$d\tau = \beta^3 d\tau_g = a^3 dT, \quad (\text{П.53})$$

$$ds^2 = d\tau^2 - \beta^4 a^2(\tau) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (\text{П.54})$$

Тензор энергии-импульса вещества в эффективном римановом пространстве имеет вид

$$T_{\mu\nu} = (\rho + p)U_\mu U_\nu - g_{\mu\nu}p,$$

где ρ и p — соответственно плотность и давление вещества в системе его покоя, а U_μ — его скорость. Поскольку для интервала (П.54) g_{0i} и R_{0i} равны нулю, из уравнения (П.50) следует, что $T_{0i} = 0$ и $U_i = 0$. Это означает, что в инерциальной системе, определяемой интервалом (7), вещество в процессе эволюции Вселенной находится в состоянии покоя. Неподвижность вещества в однородной и изотропной Вселенной (мы не учитываем peculiar скорости галактик) в некотором смысле отвечает ранним (дофридмановским) представлениям Эйнштейна о Вселенной. Так называемое “расширение Вселенной”, наблюдаемое по красному смещению, вызвано не движением вещества, а изменением со временем гравитационного поля. Это замечание следует иметь в виду, когда употребляется принятый термин “расширение Вселенной”. При описании интервала (П.54) в собственном времени τ интервал исходного пространства Минковского (7) примет вид

$$d\sigma^2 = \frac{1}{a^6} d\tau^2 - dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (\text{П.55})$$

На основании (П.54) и (П.55) и учитывая, что

$$\begin{aligned} R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a}, & R_{11} &= \beta^4(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2), \\ T_{00} - \frac{1}{2}g_{00}T &= \frac{1}{2}(\rho + 3p), & T_{11} - \frac{1}{2}g_{11}T &= \frac{1}{2}\beta^4 a^2(\rho - p), \end{aligned}$$

из уравнений (П.50) находим

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + \frac{3p}{c^2} \right) - \frac{1}{6} (mc)^2 \left(1 - \frac{1}{a^6} \right), \quad (\text{П.56})$$

$$\left(\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho(\tau) - \frac{1}{12} (mc)^2 \left(2 - \frac{3}{a^2 \beta^4} + \frac{1}{a^6} \right). \quad (\text{П.57})$$

Дифференцируя (П.57) по τ и используя (П.56), получим

$$-\frac{1}{a} \frac{da}{d\tau} = \frac{1}{3(\rho + p/c^2)} \frac{d\rho}{d\tau}. \quad (\text{П.58})$$

Это уравнение можно получить и непосредственно из ковариантного закона сохранения:

$$\nabla_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) = \partial_\mu (\sqrt{-g} T^{\mu\nu}) + \Gamma_{\alpha\beta}^\nu (\sqrt{-g} T^{\alpha\beta}) = 0,$$

где $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$ — символы Кристоффеля эффективного риманова пространства.

Запишем уравнение (П.58) в форме

$$-\frac{3p}{c^2} = a \frac{d\rho}{da} + 3\rho.$$

Учитывая это уравнение, мы можем записать (П.56) в следующем виде:

$$\frac{1}{a} \frac{d^2 a}{d\tau^2} = \frac{4\pi G}{3} \left(a \frac{d\rho}{da} + 2\rho \right) - \frac{1}{6} (mc)^2 \left(1 - \frac{1}{a^6} \right).$$

Это уравнение можно записать в форме

$$\frac{d^2 a}{d\tau^2} = -\frac{dV}{da}, \quad (\text{П.59})$$

где

$$V = -\frac{4\pi G}{3} a^2 \rho + \frac{(mc)^2}{12} \left(a^2 + \frac{1}{2a^4} \right).$$

Умножив обе части уравнения (П.59) на $da/d\tau$, получим

$$\frac{d}{d\tau} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 + V \right] = 0, \quad (\text{П.60})$$

или

$$\frac{1}{2} \left(\frac{da}{d\tau} \right)^2 + V = E = \text{const}. \quad (\text{П.61})$$

Сравнивая (П.57) и (П.61), находим

$$\beta^4 = \frac{(mc)^2}{8E}. \quad (\text{П.62})$$

Таким образом, постоянная β^4 определяется интегралом движения E . Выражение (П.61) напоминает энергию единичной массы. Если бы величина a имела размерность длины, то первый член в (П.61) соответствовал бы кинетической энергии, а второй – потенциальной. Из условия причинности (3) следует, что $a_{\max} = \beta$, интеграл движения E отличен от нуля, но является очень малой величиной [8].

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. И. Денисову, В. А. Петрову, Н. Е. Тюрину, Ю. В. Чугрееву за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [2] А. А. Логунов. Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001.
- [3] А. Эйнштейн. Проект обобщенной теории относительности и теории тяготения. В сб.: Собрание научных трудов. Т. I. М.: Наука, 1965. С. 227.
- [4] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Докл. РАН. 2005. Т. 402. С. 34.
- [5] А. Эйнштейн. О стационарных системах, состоящих из многих гравитирующих частиц и обладающих сферической симметрией. В сб.: Собрание научных трудов. Т. II. М.: Наука, 1966. С. 514.
- [6] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. ТМФ. 1984. Т. 61. № 3. С. 327.
- [7] А. А. Власов, А. А. Логунов. ТМФ. 1989. Т. 78. № 3. С. 323.
- [8] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. ЭЧАЯ. 2005. Т. 36. № 5. С. 499.

Поступила в редакцию 12.IV.2005 г.