Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Е. Конштейн, И. В. Тютин, Когомологии супералгебры Пуассона на пространствах суперразмерности $(2, n_-)$, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 291–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1902>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:38:36

© 2005 г.

С. Е. Конштейн*, И. В. Тютин*

КОГОМОЛОГИИ СУПЕРАЛГЕБРЫ ПУАССОНА НА ПРОСТРАНСТВАХ СУПЕРРАЗМЕРНОСТИ $(2, n_-)$

Изучены пространства когомологий супералгебры Пуассона, реализованной на пространстве гладких грасманоэзначных функций с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$, при некоторых предположениях о непрерывности коцепей. Для случая постоянной невырожденной суперскобки Пуассона найдены нулевое, первое и второе пространства когомологий в присоединенном представлении.

Ключевые слова: алгебра Грассмана, супералгебра Пуассона, когомологии, деформация, *-коммутатор, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Надежда построить квантовую механику на нетривиальном многообразии ассоциируется с геометрическим, или деформационным, квантованием [1]. Функции на фазовом пространстве связаны с операторами, а произведение и коммутатор операторов описываются ассоциативным *-произведением и *-коммутатором функций. Эти *-произведение и *-коммутатор являются деформациями обычного произведения и обычной скобки Пуассона.

Для того чтобы найти деформации супералгебры Пуассона, необходимо вычислить вторые когомологии супералгебры Пуассона.

В работе [2] найдены низшие (вплоть до второй) когомологии алгебры Пуассона, состоящей из гладких комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$. В статье [3] исследованы деформации супералгебры Ли гамильтоновых векторных полей с полиномиальными коэффициентами. Чисто грасманов случай рассмотрен в работах [4].

В работе [5] вычислены низшие когомологии супералгебры Пуассона грасманоэзначных гладких функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$ при $n \geq 4$ в тривиальном (вплоть до третьей когомологии) и в присоединенном (вплоть до второй когомологии) представлениях. Оказалось, что случай $n = 2$ требует отдельного рассмотрения, которое и проведено в настоящей статье. В работе [6] мы изучаем центральные расширения супералгебр, рассмотренных здесь и в работе [5].

Пусть поле $\mathbb{K}$ – это либо $\mathbb{R}$, либо $\mathbb{C}$. Обозначим через $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ пространство гладких $\mathbb{K}$ -значных функций с компактным носителем на $\mathbb{R}^n$. Это пространство снабжено своей

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: konstein@lpi.ru, tyutin@lpi.ru

стандартной топологией: по определению последовательность $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ сходится к $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, если носители всех функций φ_k содержатся в некотором компактном множестве и $\partial^\lambda \varphi_k$ сходится равномерно к $\partial^\lambda \varphi$ для каждого мультииндекса λ . Положим

$$\mathbf{D}_{n_+}^{n_-} = \mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{E}_{n_+}^{n_-} = C^\infty(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}, \quad \mathbf{D}'_{n_+}{}^{n_-} = \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-},$$

где $\mathbb{G}^{n_-}$ – алгебра Грассмана с n_- генераторами и $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+})$ – пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{n_+})$. Образующие алгебры Грассмана (соответственно координаты пространства $\mathbb{R}^{n_+}$) мы обозначаем как ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n_-$ (соответственно x^i , $i = 1, \dots, n_+$). Мы будем также использовать коллективные суперпеременные z^A , которые равны x^A при $A = 1, \dots, n_+$ и ξ^{A-n_+} при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$. Пространства $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ и $\mathbf{D}'_{n_+}{}^{n_-}$ обладают естественной градуировкой, которая определяется градуировкой алгебры Грассмана. Четность элемента f этих пространств обозначена как $\varepsilon(f)$. Введем обозначение ε_A , $\varepsilon_A = 0$ при $A = 1, \dots, n_+$ и $\varepsilon_A = 1$ при $A = n_+ + 1, \dots, n_+ + n_-$.

Пусть $\partial/\partial z^A$ и $\overleftarrow{\partial}/\partial z^A$ – операторы левого и правого дифференцирования. Суперскобка Пуассона определяется следующим соотношением:

$$\{f, g\}(z) = f(z) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} g(z) = -\sigma(f, g) \{g, f\}(z), \quad (1.1)$$

где $\sigma(f, g) = (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)}$, а симплектическая метрика $\omega^{AB} = -(-1)^{\varepsilon_A \varepsilon_B} \omega^{BA}$ является постоянной обратимой матрицей. Для определенности выберем ее в виде

$$\omega^{AB} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} & 0 \\ 0 & \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad \lambda_\alpha = \pm 1, \quad i, j = 1, \dots, n_+, \quad \alpha, \beta = 1, \dots, n_-,$$

где ω^{ij} – каноническая симплектическая форма (если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то можно выбрать $\lambda_\alpha = 1$). Из невырожденности матрицы ω^{AB} следует, в частности, что n_+ четно. Суперскобка Пуассона удовлетворяет тождеству Якоби

$$\sigma(f, h) \{f, \{g, h\}\}(z) + \text{cycle}(f, g, h) = 0, \quad f, g, h \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}. \quad (1.2)$$

Супералгеброй Пуассона мы будем называть пространство $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ с суперскобкой Пуассона (1.1) на нем. Соотношения (1.1) и (1.2) показывают, что эта суперскобка действительно определяет структуру супералгебры Ли на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$.

Интеграл на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ определяется соотношением

$$\int dz f(z) = \int_{\mathbb{R}^{n_+}} dx \int d\xi f(z),$$

где интеграл на алгебре Грассмана нормирован условием $\int d\xi \xi^1 \dots \xi^{n_-} = 1$. Мы отождествляем $\mathbb{G}^{n_-}$ с его дуальным пространством $\mathbb{G}'^{n_-}$, полагая $f(g) = \int d\xi f(\xi)g(\xi)$, $f, g \in \mathbb{G}^{n_-}$. Соответственно $\mathbf{D}'_{n_+}{}^{n_-}$, т.е. пространство непрерывных линейных функционалов на $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, отождествляется с пространством $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{n_+}) \otimes \mathbb{G}^{n_-}$.

Пусть L – супералгебра Ли, действующая на $\mathbb{Z}_2$ -градуированном пространстве V (действие $f \in L$ на $v \in V$ будет обозначаться через $f \cdot v$). Пространство p -коцепей

$C_p(L, V)$ состоит из всех полилинейных суперантисимметричных отображений из L^p в V . Пространство $C_p(L, V)$ обладает естественной $\mathbb{Z}_2$ -градуировкой: по определению $M_p \in C_p(L, V)$ имеет определенную четность $\varepsilon(M_p)$, если

$$\varepsilon(M_p(f_1, \dots, f_p)) = \varepsilon(M_p) + \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_p)$$

для всякого набора $f_j \in L$ с определенными четностями $\varepsilon(f_j)$. Дифференциал d_p^V определяется как такой линейный оператор из $C_p(L, V)$ в $C_{p+1}(L, V)$, что

$$\begin{aligned} d_p^V M_p(f_1, \dots, f_{p+1}) = & \\ & - \sum_{j=1}^{p+1} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{1,j-1}+\varepsilon(f_j)\varepsilon_{M_p}} f_j \cdot M_p(f_1, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) - \\ & - \sum_{i < j} (-1)^{j+\varepsilon(f_j)|\varepsilon(f)|_{i+1,j-1}} M_p(f_1, \dots, f_{i-1}, \{f_i, f_j\}, f_{i+1}, \dots, \check{f}_j, \dots, f_{p+1}) \end{aligned} \quad (1.3)$$

для произвольных $M_p \in C_p(L, V)$ и $f_1, \dots, f_{p+1} \in L$ с определенными четностями. Знак $\check{}$ обозначает здесь отсутствие аргумента. Мы использовали также следующее обозначение:

$$|\varepsilon(f)|_{i,j} = \sum_{l=i}^j \varepsilon(f_l).$$

Дифференциал d^V является нильпотентным оператором (см. [7]), т.е. $d_{p+1}^V d_p^V = 0$ для любых $p = 0, 1, \dots$. Через H_V^p обозначается p -е пространство когомологий дифференциала d_p^V .

Мы изучаем когомологии алгебры Пуассона $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ для следующих представлений.

1. $V = \mathbf{D}_{n_+}^{'n_-}$ и $f \cdot m = \{f, m\}$ при любых $f \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ и $m \in \mathbf{D}_{n_+}^{'n_-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}, \mathbf{D}_{n_+}^{'n_-})$ состоит из непрерывных по каждому аргументу суперантисимметричных полилинейных отображений из $(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-})^p$ в $\mathbf{D}_{n_+}^{'n_-}$. Пространства когомологий будут обозначаться через $H_{\mathbf{D}'}^p$.

2. $V = \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ и $f \cdot m = \{f, m\}$ для любых $f \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ и $m \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}, \mathbf{E}_{n_+}^{n_-})$ является подпространством $C_p(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}, \mathbf{D}_{n_+}^{'n_-})$, состоящим из отображений, принимающих значения в $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$. Пространства когомологий будут обозначаться через $H_{\mathbf{E}}^p$.

3. Присоединенное представление: $V = \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ и $f \cdot g = \{f, g\}$ для любых $f, g \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Пространство $C_p(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}, \mathbf{D}_{n_+}^{n_-})$ является подпространством $C_p(\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}, \mathbf{D}_{n_+}^{'n_-})$, состоящим из отображений, принимающих значения в $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Пространства когомологий будут обозначаться через H_{ad}^p .

Для всех этих представлений мы будем использовать одинаковый символ d_p^{ad} для дифференциала.

Мы будем говорить, что коциклы $M_p^1, \dots, M_p^k$ независимы, если они входят в линейно независимые элементы пространства H^p . Для полилинейных форм M_p , принимающих значения в $\mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$, $\mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$ или $\mathbf{D}_{n_+}^{'n_-}$, мы будем писать $M_p(z|f_1, \dots, f_p)$ вместо более громоздкого $[M_p(f_1, \dots, f_p)](z)$.

Ниже мы будем предполагать, что $n_+ = 2$.

Основные результаты настоящей работы приведены в следующих двух теоремах.

ТЕОРЕМА 1.1. 1. $H_{\mathbf{D}'}^0 \simeq H_{\mathbf{E}}^0 \simeq \mathbb{K}$, функция $M_0(z) \equiv 1$ является нетривиальным коциклом.

2. $H_{\mathbf{D}'}^1 \simeq H_{\mathbf{E}}^1 \simeq \mathbb{K}^2$, независимые нетривиальные коциклы заданы формулами

$$M_1^1(z|f) = \bar{f}, \quad M_1^2(z|f) = \mathcal{E}_z f(z),$$

и ∂e^1

$$\mathcal{E}_z = 1 - \frac{1}{2} z^A \frac{\partial}{\partial z^A}, \quad \bar{f} = \int du f(u).$$

3. Пусть билинейные отображения $m_{2|1}$, $m_{2|2}$, $m_{2|3}$, $m_{2|4}$, N_2^E , L_2^0 , L_2^1 , L_2^2 и L_2^3 из $(\mathbf{D}_2^{n-})^2$ в $\mathbf{E}_2^{n-}$ определены формулами

$$m_{2|1}(z|f, g) = f(z) \left(\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^A} \omega^{AB} \frac{\partial}{\partial z^B} \right)^3 g(z),$$

$$m_{2|2}(z|f, g) = \frac{1 - (-1)^{n-}}{2} \bar{f} \bar{g},$$

$$m_{2|3}(z|f, g) = \bar{g} \mathcal{E}_z f(z) - \sigma(f, g) \bar{f} \mathcal{E}_z g(z),$$

$$m_{2|4}(z|f, g) = \delta_{6, n-} \int du (f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_u f(u)),$$

$$N_2^E(z|f, g) = \Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g) - 2(-1)^{n-\varepsilon(f)} \partial_2 f(z) \Theta(z|g) + 2\Theta(z|f) \partial_2 g(z),$$

$$L_2^0(x|f, g) = N_2^E(x|f, g) + \frac{1}{2} (x^i \partial_i f(x)) g(x) - \frac{1}{2} f(x) x^i \partial_i g(x),$$

$$L_2^1(z|f, g) = N_2^E(z|f, g) - \Delta(z|f) g(z) + (-1)^{\varepsilon(f)} f(z) \Delta(z|g) - \frac{2}{3} (-1)^{\varepsilon(f)} \xi^1 \Delta(z|f) \Delta(z|g),$$

$$L_2^2(z|f, g) = N_2^E(z|f, g) - \Delta(z|f) g(z) + f(z) \Delta(z|g),$$

$$L_2^3(z|f, g) = N_2^E(z|f, g) - \Delta(x|f) g(z) + (-1)^{\varepsilon(f)} f(z) \Delta(x|g) + \partial_{\xi^\alpha} f(z) \Delta_\alpha(x|g) - (-1)^{\varepsilon(f)} \Delta_\alpha(x|f) \partial_{\xi^\alpha} g(z),$$

и ∂e

$$\Theta(z|f) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x_1 - u_1) \theta(x_2 - u_2) f(u),$$

$$\Delta(z|f) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \delta(x - y) f(u),$$

$$\Delta_\alpha(z|f) \stackrel{\text{def}}{=} \int du \eta_\alpha \delta(x - y) f(u) \quad (1.4)$$

и $z = (x_1, x_2, \xi_1, \dots, \xi_{n-})$, $u = (y_1, y_2, \eta_1, \dots, \eta_{n-})$.

Если n_- четно и $n_- \neq 0$, $n_- \neq 2$, $n_- \neq 6$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^2$, и коцепи $m_{2|1}$ и $m_{2|3}$ являются независимыми нетривиальными коциклами;

если n_- нечетно и $n_- \neq 1$, $n_- \neq 3$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|2}$ и $m_{2|3}$ являются независимыми нетривиальными коциклами;

¹⁾ Оператор $\mathcal{E}_z$ является дифференцированием супералгебры Пуассона.

если $n_- = 0$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и L_2^0 являются независимыми нетривиальными коциклами;

если $n_- = 1$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^4$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|2}$, $m_{2|3}$ и L_2^1 являются независимыми нетривиальными коциклами;

если $n_- = 2$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и L_2^2 являются независимыми нетривиальными коциклами;

если $n_- = 3$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^4$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|2}$, $m_{2|3}$ и L_2^3 являются независимыми нетривиальными коциклами;

если $n_- = 6$, то $H_{\mathbf{D}'}^2 \simeq H_{\mathbf{E}}^2 \simeq \mathbb{K}^3$, и коцепи $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и $m_{2|4}$ являются независимыми нетривиальными коциклами.

ТЕОРЕМА 1.2. 1. $H_{\text{ad}}^0 = 0$.

2. Пусть $Z_2^{n-} = \mathbf{D}_2^{n-} \oplus \mathbf{C}_2^{n-}$, где $\mathbf{C}_2^{n-}$ — централизатор $\mathbf{D}_2^{n-}$ в $\mathbf{E}_2^{n-}$ (очевидно, что $\mathbf{C}_2^{n-} = \mathbb{K}$). Пусть V_1 — одномерное подпространство $C_1(\mathbf{D}_2^{n-}, \mathbf{D}_2^{n-})$, порожденное коциклом M_1^2 , определенным в теореме 1.1. Тогда существует естественный изоморфизм $V_1 \oplus (\mathbf{E}_2^{n-}/\mathbf{Z}_2^{n-}) \simeq H_{\text{ad}}^1$, отображающий $(M_1, T) \in V_1 \oplus (\mathbf{E}_2^{n-}/\mathbf{Z}_2^{n-})$ в класс когомологий, определяемый коциклом $M_1^2(z|f) + \{t(z), f(z)\}$, где $t \in \mathbf{E}_2^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

3. Пусть билинейное отображение N_2^E из $(\mathbf{D}_2^{n-})^2$ в $\mathbf{E}_2^{n-}$ определено в теореме 1.1 и

$$N_1(z|f) = -2\Lambda(x_2) \int du \theta(x_1 - y_1) f(u),$$

где $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ такая функция, что $d\Lambda/dx \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\Lambda(-\infty) = 0$, $\Lambda(+\infty) = 1$.

Тогда билинейное отображение $N_2^D(z|f, g) = N_2^E(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} N_1(z|f, g)$ отображает $(\mathbf{D}_2^{n-})^2$ в $\mathbf{D}_2^{n-}$.

4. Пусть билинейные отображения $m_{2|1}$, $m_{2|3}$, L_2^0 , L_2^1 , L_2^2 и L_2^3 из $(\mathbf{D}_2^{n-})^2$ в $\mathbf{D}_2^{n-}$ определены в теореме 1.1. Пусть V_2^{n-} является подпространством $C_2(\mathbf{D}_2^{n-}, \mathbf{D}_2^{n-})$, порожденным коциклами $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и $L_2^{n-} + d_1^{\text{ad}} N_1$ при $n_- = 0, 1, 2, 3$ и коциклами $m_{2|1}$ и $m_{2|3}$ при $n_- \geq 4$.

Тогда существует естественный изоморфизм $V_2^{n-} \oplus (\mathbf{E}_2^{n-}/\mathbf{Z}_2^{n-}) \simeq H_{\text{ad}}^2$, отображающий $(M_2, T) \in V_2^{n-} \oplus (\mathbf{E}_2^{n-}/\mathbf{Z}_2^{n-})$ в класс когомологий, определяемый коциклом

$$M_2(z|f, g) - \{t(z), f(z)\}\bar{g} + \sigma(f, g)\{t(z), g(z)\}\bar{f},$$

где $t \in \mathbf{E}_2^{n-}$ принадлежит классу эквивалентности T .

2. СОГЛАШЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Мы применяем следующие мультииндексные обозначения: $(z^A)^0 \equiv 1$; $(z^A)^k \equiv z^{A_1} \dots z^{A_k}$, $k \geq 1$; $(\partial_A^z)^0 \equiv 1$, $(\partial_A^z)^k \equiv \partial/\partial z^{A_1} \dots \partial/\partial z^{A_k}$, $k \geq 1$.

Далее, $T \dots (A)_k \dots \equiv T \dots A_1 \dots A_k \dots$, $T \dots A_i A_{i+1} \dots = \sigma(A_i, A_{i+1}) T \dots A_{i+1} A_i \dots$, $i = 1, \dots, \dots, k-1$.

Кроме того, мы используем обозначение

$$\overleftarrow{D}_z^A \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial z^B} \omega^{BA}. \quad (2.1)$$

В настоящей работе δ -функция нормирована соотношением $\int dz' \delta(z' - z) f(z') = \int f(z') \delta(z - z') dz' = f(z)$.

Через $M_p(\dots)$ мы обозначаем p -линейные формы на $(\mathbf{D}_2^{n-})^p$, непрерывные по каждому аргументу. Аргументами этих функционалов являются функции $f(z)$ вида

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-} f_{(\alpha)_k}(x) (\xi^\alpha)^k, \quad f_{(\alpha)_k}(x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2). \quad (2.2)$$

Легко доказать, что такие полилинейные формы могут быть записаны в интегральном виде:

$$M_p(z|f_1, \dots, f_p) = \int dz_p \dots dz_1 m_p(z|z_1, \dots, z_p) f_1(z_1) \dots f_p(z_p), \quad p = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Из суперантисимметрии форм M_p следует, что соответствующие ядра m_p обладают следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \varepsilon(m_p(z|z_1, \dots, z_p)) &= pn_- + \varepsilon_{M_p}, \\ m_p(z|z_1 \dots z_i, z_{i+1} \dots z_p) &= -(-1)^{n-} m_p(z|z_1 \dots z_{i+1}, z_i \dots z_p). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Носитель $\text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^2$ функции $f \in \mathbf{D}_2^{n-}$ определен как объединение носителей всех функций $f_{(\alpha)_k}$, входящих в разложение (2.2). Для $m \in \mathbf{D}_2'^{n-}$ множество $\text{supp}(m)$ определяется аналогично.

Знак $\wedge$ над формой M или над ее ядром $m(z|u, v, \dots)$ обозначает, что ядро m рассматривается вне диагоналей $z = u$, $z = v, \dots$.

Пространство всех полилинейных форм, ядро которых отлично от нуля только на диагонали $z = u = v = \dots$, мы обозначаем $\mathbf{D}'_{\text{loc}} \subset \mathbf{D}_{n+}'^{n-}$. Элементы $\mathbf{D}'_{\text{loc}}$ имеют вид

$$M_{\text{loc}}(z|f, g, \dots) = \sum_{p, q, \dots=0}^{N(z)} m^{(A)_p | (B)_q | \dots}(z) (\partial_A^z)^p f(z) \cdot (\partial_B^z)^q g(z) \cdot \dots$$

Пусть $k_1, k_2, \dots, k_s$ — некоторые суперпеременные,

$$k_i = \{k_i^1, k_i^2, \dots, k_i^{n_i^+}, \xi_i^1, \xi_i^2, \dots, \xi_i^{n_i^-}\}.$$

Ниже мы будем рассматривать полиномы с коэффициентами из $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$ и использовать для них обозначения $f(z|k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}[k_1, k_2, \dots, k_s]$. Иногда мы будем опускать в записи аргумент z . Будем называть полином $f(z|k_1, k_2, \dots, k_s)$ симметричным, если $f(z|k_1, k_2, \dots, k_s) = f(z|k_{\tau(1)}, k_{\tau(2)}, \dots, k_{\tau(s)})$ для любой подстановки $\tau \in S_s$, и антисимметричным, если $f(z|k_1, k_2, \dots, k_s) = \sigma(\tau) f(z|k_{\tau(1)}, k_{\tau(2)}, \dots, k_{\tau(s)})^2$.

Определим $\mathcal{P}_{p_1, p_2, \dots, p_s}$, фильтрации полиномов по младшим степеням.

²⁾ Чтобы избежать недоразумения, напомним, что k_i — суперпеременные, так что полиномы, которые мы называем симметричными, не обязательно симметричны в обычном смысле по компонентам суперпеременных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1.

$$\mathcal{P}_{p_1, p_2, \dots, p_s} = \{f(k_1, k_2, \dots, k_s) \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}[k_1, \dots, k_s]: \\ \exists g \in \mathbf{E}_{n+}^{n-}[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s, k_1, \dots, k_s], \quad f(\alpha_1 k_1, \alpha_2 k_2, \dots) = \alpha_1^{p_1} \alpha_2^{p_2} \dots \alpha_s^{p_s} g\}, \quad (2.5)$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ — некоторые четные переменные.

Очевидно, что $\mathcal{P}_{p_1, p_2, \dots} \subset \mathcal{P}_{q_1, q_2, \dots}$, если $p_i \geq q_i$. Ясно также, что если $f \in \mathcal{P}_{p_1, p_2, \dots}$ и $g \in \mathcal{P}_{q_1, q_2, \dots}$, то $fg \in \mathcal{P}_{p_1+q_1, p_2+q_2, \dots}$.

Из вложений $\mathbb{K}, \mathbf{D}_{n+}^{n-} \subset \mathbf{E}_{n+}^{n-}$ следует, что все эти определения применимы не только для $\mathbf{E}_{n+}^{n-}$, но и для $\mathbf{D}_{n+}^{n-}$, и для $\mathbb{K}$.

3. КОГОМОЛОГИИ В ПРИСОЕДИНЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В этом и следующем разделах мы докажем теоремы 1.1 и 1.2.

Рассматриваемые полилинейные формы принимают значения в пространстве $\mathcal{A}$, где $\mathcal{A}$ есть одно из пространств $\mathbf{D}_2^{n-}$, $\mathbf{E}_2^{n-}$ или $\mathbf{D}_2^{n-}$.

3.1. H_{ad}^0 и H_{ad}^1 . Доказательство теорем 1.1 и 1.2, описывающих нулевые и первые когомологии в присоединенном представлении, аналогично случаю $n_+ \geq 4$ и приведено в работе [5].

3.2. H_{ad}^2 . Для билинейных форм $M_2(z|f, g) = \int dv du m_2(z|u, v)f(u)g(v) \in \mathcal{A}$ уравнение когомологии имеет вид

$$0 = d_2^{\text{ad}} M_2(z|f, g, h) = \\ = \sigma(g, h)\{M_2(z|f, h), g(z)\} - \{M_2(z|f, g), h(z)\} - \sigma(f, gh)\{M_2(z|g, h), f(z)\} - \\ - M_2(z|\{f, g\}, h) + \sigma(g, h)M_2(z|\{f, h\}, g) + M_2(z|f, \{g, h\}). \quad (3.1)$$

Решение уравнения (3.1) может быть представлено в виде последовательности следующих предложений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. $M_2(z|f, g) = c_2 m_{2|2}(z|f, g) + M_2^1(z|f, g) + M_2^2(z|f, g)$, где

$$m_{2|2}(z|f, g) = \frac{1 - (-1)^{n-}}{2} \bar{f} \bar{g}, \quad \varepsilon(c_2) = \varepsilon(M_2), \quad d_2^{\text{ad}} m_{2|2}(z|f, g, h) = 0, \quad (3.2)$$

$$M_2^1(z|f, g) = \sum_{q=0}^Q m^{1(A)q}(z | [(\partial_A^z)^q f(z)]g - \sigma(f, g)[(\partial_A^z)^q g(z)]f), \quad (3.3)$$

$$M_2^2(z|f, g) = \sum_{q=0}^Q m^{2(A)q}(z | [(\partial_A)^q f]g - \sigma(f, g)(\partial_A)^q g]f), \quad (3.4)$$

и четности линейных форм $m^{1,2(A)q}(z|\cdot)$ равны

$$\varepsilon(m^{1,2(A)q}) = \varepsilon(M_2) + |\varepsilon_A|_{1,q} + n_-. \quad (3.5)$$

Множитель $(1 - (-1)^{n-})/2$ обеспечивает суперантисимметрию билинейной формы $m_2|2$.

Обозначим пространство всех билинейных форм вида (3.3) через $\mathcal{M}_1$ и пространство всех билинейных форм вида (3.4) как $\mathcal{M}_2$. Пространство $\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2$ является пространством локальных билинейных форм. Разложение, описываемое этим предложением, однозначно с точностью до локальных билинейных форм.

Для доказательства предложения 3.1 достаточно рассмотреть уравнение (3.1) в двух следующих случаях:

$$\begin{aligned} z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] &= \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset, \\ z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] &= \text{supp}(f) \cap [\text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \text{supp}(g) \cap \text{supp}(h) = \emptyset. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2.

$$\begin{aligned} M_2^2(z|f, g) &= \delta_{n-,6}\mu(z) \int du \left(u^A \frac{\partial f(u)}{\partial u^A} g(u) - \sigma(f, g) u^A \frac{\partial g(u)}{\partial u^A} f(u) \right) + \\ &+ V_2(z) \Theta(z|\partial_2 f g - f \partial_2 g) + d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g) + M_{2\text{loc}}. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим уравнение (3.1) в случае, когда $d_2^{\text{ad}} M_2^1$ равно нулю тождественно: $z \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g) \cup \text{supp}(h)] = \emptyset$. Используя результаты п. 3.2 из работы [5], мы получаем, что

$$\widehat{M}_2^2(z|f, g) = \int du \widehat{m}^{2A}(z|u) \left(\frac{\partial f(u)}{\partial u^A} g(u) - \sigma(f, g) \frac{\partial g(u)}{\partial u^A} f(u) \right),$$

а вектор $\widehat{m}^{2A}(z|u)$ удовлетворяет уравнению

$$2\widehat{m}^{2A}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CB} - 2\sigma(A, B) \widehat{m}^{2B}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CA} + \mu(z) \omega^{AB} = 0, \quad (3.6)$$

где

$$\mu(z) = m^{2A}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^A} (-1)^{\varepsilon_A}$$

не зависит от u , $\varepsilon(\mu) = \varepsilon(M_2) + n_-$. Из этого уравнения следует, что $(6 - n_-)\mu(z) = 0$. Таким образом, либо $n_- = 6$, либо $\mu(z) = 0$.

Частное решение уравнения (3.6) имеет простой вид $\widehat{m}_{\text{particular}}^{2A}(z|u) = -\mu(z)u^A/4$.

Найдем решение однородного уравнения

$$\widehat{m}^{2A}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CB} - \sigma(A, B) \widehat{m}^{2B}(z|u) \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial u^C} \omega^{CA} = 0. \quad (3.7)$$

Рассмотрим по отдельности три случая: 1) $A = \alpha + 2$, $B = \beta + 2$, 2) $A = i$, $B = \beta + 2$ и 3) $A = i$, $B = j$.

1. Пусть $A = \alpha + 2$, $B = \beta + 2$,

$$\widehat{m}^{2\alpha}(z|u) \overleftarrow{D}_u^\beta + \widehat{m}^{2\beta}(z|u) \overleftarrow{D}_u^\alpha = 0.$$

Здесь и далее обозначение $m^{2\alpha}$ используется для M^{2A} при $A = \alpha + 2$. Введем тензор

$$T^{\alpha\beta}(z|u) = m^{2\alpha}(z|u) \overleftarrow{D}_u^\beta + m^{2\beta}(z|u) \overleftarrow{D}_u^\alpha.$$

Так как $\widehat{T}^{\alpha\beta}(z|u) = 0$, мы имеем

$$T^{\alpha\beta}(z|u) = \sum_q t_{\alpha\beta}^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y).$$

Тождество $T^{\alpha\beta} \overleftarrow{D}_u^\gamma + \text{cycle}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ дает $t_{\alpha\beta}^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\gamma + \text{cycle}(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ и, как следствие, $t_{\alpha\beta}^{(l)q}(z|\eta) = t_\alpha^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\beta + t_\beta^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\alpha$, откуда следует

$$m^{2\alpha}(z|u) = m'^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^\alpha + \sum_q t_\alpha^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y) \quad (3.8)$$

с некоторыми обобщенными функциями $m'^2(z|u)$ и $t_\alpha^{(l)q}(z|\eta)$.

2. Пусть $A = i$, $B = \beta + 2$. Тогда, используя равенство (3.8), можно написать

$$[\widehat{m}^{2i}(z|u) - \widehat{m}'^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^i] \overleftarrow{D}_u^\beta = 0.$$

Введем тензор $T_{i\beta}(z|u) = [m^{2i}(z|u) - m'^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^i] \overleftarrow{D}_u^\beta = \sum_q t_{i\beta}^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y)$. Тождество $t_{i\beta}^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\alpha + t_{i\alpha}^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\beta = 0$ дает $t_{i\beta}^{(l)q}(z|\eta) = t_i^{(l)q}(z|\eta) \overleftarrow{D}_u^\beta$, откуда следует

$$[m^{2i}(z|u) - m^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^i - \sum_q t_i^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y)] \overleftarrow{D}_u^\beta = 0$$

и, в свою очередь,

$$m^{2i}(z|u) = m'^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^i + \sum_q t_i^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y) + \sigma^i(z|y)$$

с некоторыми векторами $t_i^{(l)q}(z|\eta)$ и $\sigma^i(z|y)$.

Таким образом,

$$m^{2A}(z|u) = m'^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^A + \delta_{Ai} \sigma^i(z|y) + \sum_q t_A^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x-y). \quad (3.9)$$

3. Пусть $A = i$, $B = j$. Из формулы (3.9) следует, что $\hat{\sigma}^i(z|y) \overleftarrow{D}_y^j - \hat{\sigma}^j(z|y) \overleftarrow{D}_y^i = 0$ и $\hat{\sigma}^i(z|y) \overleftarrow{\partial} / \partial y^i = 0$. Введем обобщенную вектор-функцию

$$T^i(z|y) = \sigma^i(z|y) - t(z|y) \overleftarrow{D}_y^i, \quad t(z|y) = \sigma^1(z|y) \overleftarrow{D}_y^1.$$

Очевидно, что $T^1(z|y) = 0$ и $\widehat{T}^i(z|y) \overleftarrow{\partial}_{y^i} = \widehat{T}^2(z|y) \overleftarrow{\partial}_{y^2} = 0$. Таким образом,

$$[\sigma^2(z|y) - t(z|y) \overleftarrow{\partial}_{y^1}] \overleftarrow{\partial}_{y^2} = A(z|y) = \sum_{p,q \geq 0} A^{pq}(z) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x-y).$$

Представим $A(z|y)$ в виде

$$\begin{aligned} A(z|y) &= [A_1(z|y) + A_2(z|y) \overleftarrow{\partial}_{y^1} - V_2(z) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2)] \overleftarrow{\partial}_{y^2}, \\ A_1(z|y) &= \sum_{p, q \geq 0} A'^{pq}(z) \partial_{y^1}^p \partial_{y^2}^q \delta(x - y) \in \mathbf{D}'_{\text{loc}}, \\ A_2(z|y) &= \sum_{p \geq 0} A^p(z) \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2), \\ A_2(z|y) \overleftarrow{\partial}_{y^2} &= - \sum_{p \geq 0} A^p(z) \partial_1^p \delta(x - y) \in \mathbf{D}'_{\text{loc}}. \end{aligned}$$

Тогда σ^2 принимает вид

$$\begin{aligned} \sigma^2(z|y) - t(z|y) \overleftarrow{\partial}_1 - A_2(z|y) \overleftarrow{\partial}_1 - \\ - A_3(z) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) - A_1(z|y) = b(z|y_1) = a(z|y_1) \overleftarrow{\partial}_1. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем, что $\sigma^i(z|y)$ может быть представлена как

$$\begin{aligned} \sigma^i(z|y) &= \sigma(z|y) \overleftarrow{D}_u^i + \left(V_2(z) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) \right) + \sigma_{\text{loc}}^i, \\ \sigma(z|y) &= t(z|y) + A_2(z|y) + a(z|y_1). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$m^{2A}(z|u) = m^2(z|u) \overleftarrow{D}_u^A + \delta_{A2} V_2(z) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + \sum_q t_A^{(l)q}(z|\eta) (\partial_l)^q \delta(x - y),$$

что и завершает доказательство предложения.

Аналогично можно проверить следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3. *Ядра линейных форм $m^{1(A)q}(z|\cdot)$ из предложения 3.1 имеют вид*

$$\begin{aligned} \widehat{m}^{1(A)0}(z|u) &= a(u); \\ \widehat{m}^{1(A)q}(z|u) &= 0 \quad \text{при} \quad q \geq 2, \\ m^{1A}(z|u) &= -\frac{1}{2} a(u) z^A + m^1(z|u) \overleftarrow{D}_z^A + \delta_{A2} V_1(u) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + m_{\text{loc}}^1, \\ \varepsilon(m^1) &= \varepsilon(M_2) + n_-, \end{aligned}$$

где $a(u)$, $V_1(u)$, $m^1(z|u)$ — некоторые обобщенные функции и m_{loc}^1 — некоторая обобщенная функция с носителем в плоскости $z = u$.

Для этого следует рассмотреть уравнение (3.1) в случае, когда $[z \cup \text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] \cap \text{supp}(h) = \emptyset$, при нулевом $d_2^{\text{ad}} M_2^2$.

В итоге мы получаем, что коцикл $M_2(z|f, g)$ имеет вид

$$\begin{aligned} M_2(z|f, g) &= M_{2|2}(z|f, g) + M_{2|3}(z|f, g) + M_{2|4}(z|f, g) + M_{2|5}(z|f, g) + \\ &+ M_{2|8}(z|f, g) + M_{2|\text{loc}}(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
M_{2|2}(z|f, g) &= c_2 m_{2|2}(z|f, g) = c_2 \frac{1 - (-1)^{n_-}}{2} \bar{f} \bar{g}, \\
M_{2|3}(z|f, g) &= \int du a(u) [f(u) \mathcal{E}_z g(z) - \sigma(f, g) g(u) \mathcal{E}_z f(z)], \\
M_{2|4}(z|f, g) &= \delta_{n_-, 6} \mu(z) \int du [\{u^A \partial_A f(u)\} g(u) - f(u) u^A \partial_A g(u)], \\
M_{2|5}(z|f, g) &= V_2(z) [\Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g)] + \\
&\quad + (-1)^{\varepsilon(f) \varepsilon_{M_2}} \partial_2 f(z) \Theta(z|V_1 g) - \Theta(z|V_1 f) \partial_2 g(z), \\
M_{2|8}(z|f, g) &= \sigma(f, g) g(u) \{m^1(z|g), f(z)\} - \{m^1(z|f), g(z)\}, \quad M_{2|loc} \in \mathbf{D}'_{loc}.
\end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.4. *Параметры $\mu(z)$ и V_2 из предложения 3.2 и параметры $a(u)$, V_1 и $m^1(z, u)$ из предложения 3.3 имеют следующий вид: $a(u) = c_3 = \text{const}$, $\mu(z) = c_4 = \text{const}$, $V_2 = c_5 = \text{const}$, $V_1 = -2c_5$,*

$$m^1(z|u) = \sum_{p, q \geq 0} B^{pq}(\xi, u) (\partial_1)^p (\partial_2^q)^q \delta(x - y) + b(z) + c(u).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В случае, когда $[z \cup \text{supp}(h)] \cap [\text{supp}(f) \cup \text{supp}(g)] = \emptyset$, когомологическое уравнение (3.1) сводится к виду

$$\begin{aligned}
&\int du a(u) \{f(u), g(u)\} \mathcal{E}_z h(z) + \\
&\quad + \sigma(M_2(f, g), h) \delta_{6, n_-} \{h(z), \mu(z)\} \times \\
&\quad \times \int du [\{u^A \partial_A f(u)\} g(u) - f(u) u^A \partial_A g(u)] + \\
&\quad + \{\widehat{m}^1(z|\{f, g\}), h(z)\} + \Theta(z|V_1 \{f, g\}) \partial_2 h(z) + \\
&\quad + \sigma(M_2(f, g), h) \{h(z), V_2(z)\} [\Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g)] = 0. \quad (3.10)
\end{aligned}$$

Выбирая $h(u) = \text{const}$ в некоторой окрестности точки z , мы получаем $a(u) = \text{const}$. Выбирая $f(u) = \text{const}$ в некоторой окрестности $\text{supp}(g)$, находим $\mu(z) = \text{const}$. Как следствие имеем

$$\partial_2 h(z) \Theta(z|V_1 \{f, g\}) + \{h(z), V_2(z)\} [\Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g)] - \{h(z), \widehat{m}^1(z|\{f, g\})\} = 0,$$

что, в свою очередь, дает

$$\begin{aligned}
&\delta_{A, 2} [\delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) V_1(u)] \overleftarrow{\partial}_D \omega^{DB} + 2\omega^{AC} \partial_C [V_2(z) \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2)] \delta_{B, 2} - \\
&\quad - \omega^{AC} \partial_C \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_D \omega^{DB} = 0. \quad (3.11)
\end{aligned}$$

Рассматривая все комбинации $A = 1, 2, \alpha + 2$, $B = 1, 2, \beta + 2$ (см. приложение В), мы получаем результат предложения.

После подстановки выражения для $m^1(z|u)$ в выражение для M_2^1 мы находим, что $c(u)$ тождественно сокращается и что $b(z)$ дает только вклад в чистый дифференциал.

Результаты предложений 3.1–3.4 могут быть суммированы в виде следующей леммы.

ЛЕММА 3.1. *Решение когомологического уравнения (3.1) имеет вид*

$$M_2(z|f, g) = c_2 m_{2|2}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + c_4 m_{2|4}(z|f, g) + \\ + c_5 m'_{2|5}(z|f, g) + M_{2|\text{loc}}(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g),$$

где

$$m_{2|2}(z|f, g) = \frac{1 - (-1)^{n_-}}{2} \bar{f} \bar{g}, \quad M_{2|\text{loc}} \in \mathbf{D}'_{\text{loc}}, \\ m_{2|3}(z|f, g) = \bar{f} \mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \bar{g} \mathcal{E}_z f(z), \\ m_{2|4}(z|f, g) = \delta_6 n_- \int du [f(u) \mathcal{E}_u g(u) - \mathcal{E}_u f(u) g(u)], \\ m'_{2|5}(z|f, g) = \Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g) - 2(-1)^{n-\varepsilon(f)} \partial_2 f(z) \Theta(z|g) + 2\Theta(x|f) \partial_2 g(z),$$

c_i – произвольные константы.

Формы $m_{2|2}(z|f, g)$, $m_{2|3}(z|f, g)$ и $m_{2|4}(z|f, g)$ удовлетворяют когомологическому уравнению.

4. ЛОКАЛЬНОЕ КОГОМОЛОГИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Так как билинейные формы $m_{2|2}$, $m_{2|3}$ и $m_{2|4}$ являются коциклами, когомологическое уравнение сводится к уравнению

$$d_2^{\text{ad}} M_{2|\text{loc}}(z|f, g, h) = -c_5 d_2^{\text{ad}} m'_{2|5}(z|f, g, h). \quad (4.1)$$

Локальная билинейная форма имеет следующий вид:

$$M_{2|\text{loc}}(z|f, g) = \sum_{p, q=0}^N (-1)^{\varepsilon(f)|\varepsilon_B|1, q} m^{(A)_p|(B)_q}(z) [(\partial_A^z)^p f(z)] (\partial_B^z)^q g(z), \quad (4.2)$$

$$m^{(B)_q|(A)_p} = -(-1)^{|\varepsilon_A|1, p|\varepsilon_B|1, q} m^{(A)_p|(B)_q}, \quad m^{(A)_0|(B)_0} = 0, \quad (4.3) \\ \varepsilon(m^{(A)_p|(B)_q}) = \varepsilon(M_2) + |\varepsilon_A|1, p + |\varepsilon_B|1, q.$$

4.1. Уравнение для локальной формы. Прямое вычисление показывает, что $d_2^{\text{ad}} m'_{2|5}(z|f, g, h)$ – локальная форма. Поэтому для решения уравнения (4.1) мы используем метод, предложенный в работе [2]. Пусть $x \in U$, где $U \in \mathbb{R}^2$ – некоторая ограниченная область. Рассмотрим уравнение (4.1) для функций вида

$$f(z) = e^{z^A p_A} f_0(z), \quad g(z) = e^{z^A q_A} g_0(z), \quad h(z) = e^{z^A r_A} h_0(z), \\ \varepsilon(k_A) = \varepsilon(l_A) = \varepsilon(r_A) = \varepsilon_A,$$

где $p = (a, \pi)$, $q = (b, \gamma)$ и $r = (c, \rho)$ – новые суперпеременные, $f_0(z) = g_0(z) = h_0(z) = 1$ при $x \in U$ ($z = (x, \xi)$). Для $x \in U$ уравнение (4.1) принимает вид

$$[p, q] \Phi(z|p, q, r) + \{F(z|q, r), zp\} + \text{cycle}(p, q, r) = \\ = \sigma c_5 [p, q] \{\delta(\pi + \rho) + \delta(\gamma + \rho) - 2\delta(\rho) - \delta(\pi + \gamma + \rho)\} + \\ + [\pi, \gamma] \{\delta(\pi + \rho) + \delta(\gamma + \rho) - 2\delta(\rho) - \frac{2}{3}\delta(\pi + \gamma + \rho)\} + \text{cycle}(p, q, r), \quad (4.4)$$

где

$$\begin{aligned} F(z|p, q) &= \sum_{k,l=0}^N m^{(A)_k|(B)_l}(z) (p_A)^k (q_B)^l = -F(z|q, p), \\ \Phi(z|p, q, r) &= F(z|p+q, r) - F(z|p, r) - F(z|q, r) = \Phi(z|q, p, r), \\ [a, b] &\stackrel{\text{def}}{=} a_i \omega^{ij} b_j, \quad [\pi, \gamma] \stackrel{\text{def}}{=} \pi_\alpha \lambda_\alpha \gamma_\alpha, \quad [p, q] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon_A \omega^{AB}} p_A q_B = [a, b] - [\pi, \gamma], \\ \sigma &= (-1)^{n-(n-1)/2}. \end{aligned}$$

Пусть

$$\Psi(z|p, q, r) = \psi(z|p+q, r) - \psi(z|p, r) - \psi(z|q, r), \quad (4.5)$$

$$\psi(z|p, q) = \sum_{k,l=0}^N m_0^{(A)_k|(B)_l}(z) (p_A)^k (q_B)^l = -\psi(z|q, p) \quad (4.6)$$

есть решение однородной части уравнения (4.4):

$$[p, q] \Psi(z|p, q, r) + \{\psi(z|p, q), zr\} + \text{cycle}(p, q, r) = 0. \quad (4.7)$$

Это однородное уравнение решено в приложении Б, и его решение с точностью до кограницы имеет вид

$$\psi(z|p, q) = c[p, q]^3, \quad (4.8)$$

где c — произвольная константа.

Найдем частные решения уравнения (4.4) для различных значений n_- .

4.2. Частное решение уравнения (4.4) для случая $n_- = 0$. Уравнение (4.4) сводится к уравнению

$$\begin{aligned} [a, b] \Phi(x|a, b, c) + [b, c] \Phi(x|b, c, a) + [c, a] \Phi(x|c, a, b) + \\ + \{F(x|b, c), xa\} + \{F(x|c, a), xb\} + \{F(x|a, b), xc\} = -c_5([a, b] + [b, c] + [c, a]) \end{aligned}$$

и имеет частное решение

$$F(x|a, b) = \frac{c_5}{2}(xa - xb).$$

4.3. Частное решение уравнения (4.4) для случая $n_- = 1$. Уравнение (4.4) принимает вид

$$\begin{aligned} [p, q] \Phi(z|p, q, r) + [q, r] \Phi(z|q, r, p) + [r, p] \Phi(z|r, p, q) + \\ + \{F(z|q, r), zp\} + \{F(z|r, p), zq\} + \{F(z|p, q), zr\} = \\ = -c_5([p, q]\rho_1 + [q, r]\pi_1 + [r, p]\gamma_1 + 2\lambda_1\pi_1\gamma_1\rho_1) \end{aligned}$$

и имеет частное решение

$$F(z|p, q) = c_5 \left(\gamma_1 - \pi_1 - \frac{2}{3} \xi^1 \pi_1 \gamma_1 \right).$$

4.4. Уравнение (4.4) при $n_- \geq 2$. Пусть $F(z|p, q) = c_5 \sigma[\delta(\gamma) - \delta(\pi)] + F_1(z|p, q)$. Когомологическое уравнение (4.4) для сдвинутой формы принимает вид

$$\begin{aligned} [p, q]\Phi_1(z|p, q, r) + \{F_1(z|q, r), zp\} + \text{cycle}(p, q, r) = \\ = \sigma c_5 (\aleph([p, q] + [q, r] + [r, p]) + 2\aleph^\alpha \pi_\alpha \gamma_\alpha \rho_\alpha \lambda_\alpha), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где

$$\begin{aligned} \aleph(\pi, \gamma, \rho) &= \delta(\pi + \rho) + \delta(\gamma + \rho) + \delta(\gamma + \pi) - \\ &\quad - \delta(\pi) - \delta(\gamma) - \delta(\rho) - \delta(\pi + \gamma + \rho), \\ \aleph^\alpha(\pi, \gamma, \rho) &= \delta_\alpha(\pi + \rho) + \delta_\alpha(\gamma + \rho) + \delta_\alpha(\gamma + \pi) - \\ &\quad - \delta_\alpha(\pi) - \delta_\alpha(\gamma) - \delta_\alpha(\rho) - \delta_\alpha(\pi + \gamma + \rho) \end{aligned} \quad (4.10)$$

и $\delta_\alpha(\pi) = \delta(\pi) \overleftarrow{\partial}_\alpha$.

Очевидно, что справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. $\aleph(p, q, r)$ и $\aleph^\alpha(p, q, r)$ симметричны и

- 1) $\aleph = 0$ при $n_- = 1, 2$;
- 2) $\aleph^\alpha = 0$ при $n_- = 0, 2, 3$;
- 3) $\aleph \neq 0$ и $\aleph^\alpha \neq 0$ при $n_- \geq 4$.

Это предложение позволяет найти частные решения для случаев $n_- = 2, 3$ и доказать, что в случае $n_- \geq 4$ нетривиальные решения уравнения (4.9) отсутствуют.

4.5. Частное решение уравнения (4.4) для $n_- = 2$. С использованием предложения 4.1 уравнение (4.9) при $n_- = 2$ сводится к

$$[p, q]\Phi_1(z|p, q, r) + \{F_1(z|q, r), zp\} + \text{cycle}(p, q, r) = 0,$$

т.е. к однородному, откуда следует

$$F(z|p, q) = c_5 [\delta(\pi) - \delta(\gamma)].$$

4.6. Частное решение уравнения (4.4) при $n_- = 3$. Уравнение (4.9) имеет решение

$$F_1(z|p, q) = c_5 (\delta_\alpha(\pi) \gamma_\alpha - \delta_\alpha(\gamma) \pi_\alpha),$$

что дает

$$F(z|p, q) = c_5 (\delta(\pi) - \delta(\gamma) + \delta_\alpha(\pi) \gamma_\alpha - \delta_\alpha(\gamma) \pi_\alpha).$$

4.7. Решение уравнения (4.4) при $n_- \geq 4$. Здесь мы покажем, что уравнение (4.4) при $n_- \geq 4$ имеет решения только при $c_5 = 0$.

Пусть $F_1(z|p, q) = \sigma c_5 [\delta_\alpha(\gamma) \pi_\alpha - \delta_\alpha(\pi) \gamma_\alpha] + F_2(z|p, q)$. Тогда уравнение (4.9) принимает вид

$$[p, q]\Phi_2(z|p, q, r) + \{F_2(z|q, r), zp\} + \text{cycle}(p, q, r) = R(p, q, r), \quad (4.11)$$

где

$$R(p, q, r) = \sigma c_5 \left(\left([p, q] \left(\aleph - \aleph \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \rho_\alpha} \right) \Big|_{\rho=0} \rho_\alpha \right) + \text{cycle}(p, q, r) \right) + 2\aleph^\alpha \pi_\alpha \gamma_\alpha \rho_\alpha \lambda_\alpha \in \mathcal{P}_{2,2,2}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. Пусть $R(k, l, r) \in \mathcal{P}_{2,2,2}$ и полином $G(z|k, l) = -G(z|l, k)$ – решение уравнения

$$[k, l](G(z|k+l, r) - G(z|k, r) - G(z|l, r)) + \{G(z|l, r), zk\} + \text{cycle}(k, l, r) = R(k, l, r). \quad (4.12)$$

Тогда $G(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$ и не зависит от z с точностью до кограницы, т.е. с точностью до полиномов вида

$$M_{\text{triv}}(z|k, l) = [k, l](t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l)) + \{t(z|l), zk\} - \{t(z|k), zl\}. \quad (4.13)$$

Доказательство этого предложения основано на результатах предложений 4.3–4.5 (см. также [5]).

Представим полином $G(z|k, l)$ как

$$G(z|k, l) = t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B + t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A + \varphi(z|k, l), \quad (4.14)$$

где $t_0(z|k) \in \mathcal{P}_1$, $t_1^A(z|k) \in \mathcal{P}_2$ и $\varphi(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$. Разложение (4.14) удовлетворяет следующему предложению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3.

$$t_0(z|k) - t_0(z|l) = dt(z|k, l) + [k, l]t(z),$$

где $t(z) \in \mathcal{A}$, и линейная форма $t(z|f)$ определена как $t(z|f) = -t(z)f(z)$.

Для доказательства этого предложения рассмотрим уравнение (4.12) при $r = 0$. Мы находим

$$[k, l](t_0(z|k+l) - t_0(z|k) - t_0(z|l)) - \{t_0(z|k), z^A l_A\} + \{t_0(z|l), z^A k_A\} = 0.$$

Это уравнение имеет решение

$$t_0(z|k) = \alpha \left(1 - \frac{1}{2} z^A k_A \right) + \{t(z), z^A k_A\}.$$

Из условия $t_0(z|0) = 0$ вытекает, что $\alpha = 0$, откуда следует утверждение предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Член $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B$ в формуле (4.14) является кограницей.

Действительно, используя предложение (4.3), мы можем написать $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B = dt(z|k, l) + \tilde{t}_{11}^{AB}(z)k_A l_B$. Члены, линейные по k, l и r в уравнении (4.12), дают уравнение

$$\sigma(C, A)\tilde{t}_{11}^{AB}(z)\overleftarrow{D}^C + \sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{BC}(z)\overleftarrow{D}^A + \sigma(B, C)\tilde{t}_{11}^{CA}(z)\overleftarrow{D}^B = 0. \quad (4.15)$$

Вместе с условием $\tilde{t}_{11}^{AB}(z) = -\sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{BA}(z)$ из этого уравнения следует, что существует такая вектор-функция $w^A(z)$, что

$$\sigma(A, B)\tilde{t}_{11}^{AB}(z) = w^A(z)\overleftarrow{D}^B - w^B(z)\overleftarrow{D}^A.$$

Таким образом,

$$\tilde{t}_{11}^{AB}(z)k_A l_B = \{w(z|k), zl\} - \{w(z|l), zk\}$$

с $w(z|k) = w^A(z)k_A$, что совпадает с (4.13).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. *С точностью до кограницы $t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A \in \mathcal{P}_{2,2}$.*

С учетом предложений 4.3 и 4.4 можно предположить, что $t_0(z|k) - t_0(z|l) + t_{11}^{AB}(z)k_A l_B = 0$. Рассмотрим в уравнении (4.12) члены, линейные по l и r . Они дают уравнение

$$t_1^A(z|k)\overleftarrow{D}^B - \sigma(A, B)t_1^B(z|k)\overleftarrow{D}^A = 0,$$

из которого следует

$$t_1^A(z|k) = t(z|k)\overleftarrow{D}^A, \quad t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A = \{t(z|k), zl\} - \{t(z|l), zk\}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} t_1^A(z|k)l_A - t_1^A(z|l)k_A &= \{t(z|k), zl\} - \{t(z|l), zk\} - (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] + \\ &+ (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] = dt(z|k, l) + \varphi_t(z|k, l), \end{aligned}$$

где

$$\varphi_t(z|k, l) = (t(z|k+l) - t(z|k) - t(z|l))[k, l] \in \mathcal{P}_{2,2}.$$

Таким образом, с точностью до кограницы $G(z|k, l) \in \mathcal{P}_{2,2}$.

Теперь можно закончить доказательство предложения 4.2, заметив, что члены в уравнении (4.12), линейные по r , дают $\{G(z|k, l), zr\} = 0$.

Таким образом, $F_2(p, q)$ не зависит от z , и поэтому $F_1(p, q)$ также не зависит от z , так что уравнение (4.9) принимает вид

$$[p, q]\Phi_1(p, q, r) + \text{cycle}(p, q, r) = \sigma c_5 (\aleph([p, q] + [q, r] + [r, p]) + 2\aleph^\alpha \pi_\alpha \gamma_\alpha \rho_\alpha \lambda_\alpha). \quad (4.16)$$

Можно считать, что $\deg \Phi_1(p, q, r) = \deg F_1(p, q, r) = \deg \aleph = n_-$.

Отметим, что правая часть уравнения (4.16) изменяет знак при следующих преобразованиях:

$$(\pi_\alpha \rightarrow -\pi_\alpha, \gamma_\alpha \rightarrow -\gamma_\alpha, \rho_\alpha \rightarrow -\rho_\alpha) \quad (4.17)$$

для любых $\alpha = 1, \dots, n_-$. Поэтому, если уравнение (4.16) имеет решение при $c_5 \neq 0$, то это уравнение имеет частное решение, которое меняет знак при преобразованиях (4.17). Найдем полиномы $F_1(p, q)$, которые меняют знак при преобразованиях (4.17), т.е. при каждом $\alpha = 1, \dots, n_-$

$$\begin{aligned} F_1(a_1, a_2, \pi_1, \dots, -\pi_\alpha, \dots, \pi_{n_-}, b_1, b_2, \gamma_1, \dots, -\gamma_\alpha, \dots, \gamma_{n_-}) = \\ = -F_1(a_1, a_2, \pi_1, \dots, \pi_\alpha, \dots, \pi_{n_-}, b_1, b_2, \gamma_1, \dots, \gamma_\alpha, \dots, \gamma_{n_-}). \end{aligned} \quad (4.18)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.6.

$$\frac{\partial}{\partial a_i} F_1(p, q) = \frac{\partial}{\partial b_i} F_1(p, q) = 0.$$

Действительно, так как $\deg F_1(p, q) = n_-$, соотношение (4.18) приводит к справедливости предложения.

Разложение уравнения (4.16) по a_i, b_i сводит его к системе двух уравнений

$$\begin{aligned} F_1(p + q, r) - F_1(p, r) - F_1(q, r) &= \sigma c_5 \aleph(\pi, \gamma, \rho), \\ c_5 \aleph^\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Поскольку $\aleph^\alpha \neq 0$ при $n_- \geq 4$, из соотношения (4.19) следует, что $c_5 = 0$ при $n_- \geq 4$. Таким образом, общее решение уравнения коhomологии (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} M_2(z|f, g) &= c_1 m_{2|1}(z|f, g) + c_2 m_{2|2}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + c_4 m_{2|4}(z|f, g) + \\ &\quad + c_5 m_{2|5}(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g), \\ m_{2|1}(z|f, g) &= f(z) (\overleftarrow{\partial}_A \omega^{AB} \partial_B)^3 g(z), \\ m_{2|2}(z|f, g) &= \frac{1 - (-1)^{n_-}}{2} \bar{f} \bar{g}, \\ m_{2|3}(z|f, g) &= \bar{f} \mathcal{E}_z g(z) - (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon(g)} \bar{g} \mathcal{E}_z f(z), \\ m_{2|4}(z|f, g) &= \delta_6 n_- \int du [\{u^A \partial_A f(u)\} g(u) - f(u) u^A \partial_A g(u)], \\ m_{2|5}(z|f, g) &= \begin{cases} L_2^{n_-}, & 0 \leq n_- \leq 3, \\ 0, & n_- \geq 4, \end{cases} \end{aligned} \quad (4.21)$$

где билинейные формы L_2^i перечислены в теореме 1.1 и $d_2^{\text{ad}} m_{2|i}(z|f, g, h) = 0$, $i = 1, \dots, 5$. Отметим, что $\varepsilon(m_{2|5}) = n_-$.

4.8. Независимость и нетривиальность. В работе [5] показано, что никакая нетривиальная линейная комбинация форм $m_{2|i}$, $i = 1, \dots, 4$, не может быть представлена как кограница.

Здесь мы покажем, что формы $m_{2|1}$, $m_{2|2}$, $m_{2|3}$ и $m_{2|5}$ определяют независимые нетривиальные коhomологии при $n_- = 1, 3$, и что формы $m_{2|1}$, $m_{2|3}$ и $m_{2|5}$ определяют независимые нетривиальные коhomологии при $n_- = 0, 2$.

Предположим, что

$$c_1 m_{2|1}(z|f, g) + c_2 m_{2|2}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + c_5 m_{2|5}(z|f, g) = d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g).$$

Пусть носители функций f и g удовлетворяют условию

$$z \cap \text{supp}(f) = z \cap \text{supp}(g) = \text{supp}(f) \cap \text{supp}(g) = \emptyset.$$

В этом случае мы получаем $c_2(1 - (-1)^{n_-})\bar{f}\bar{g}/2 = 0$ и $c_2 = 0$.

Пусть $[z \cup \text{supp}(f)] \cap \text{supp}(g) = \emptyset$. Тогда

$$c_3 \left(1 - \frac{1}{2} z^A \frac{\partial}{\partial z^A} \right) f(z) \bar{g} - 2c_5 (-1)^{n_- - \varepsilon(f)} \partial_2 f(z) \Theta(z|g) = (-1)^{\varepsilon(f)\varepsilon_{M_2}} \{f(z), \hat{\zeta}(z|g)\}.$$

Рассматривая в этом уравнении члены, пропорциональные $f(z)$, получаем, что $c_3 f(z) \bar{g} = 0$ и, следовательно, $c_3 = 0$. Далее, так как $\varepsilon(M_2) = n_-$, мы имеем

$$-2c_5 \partial_2 f(z) \Theta(z|g) = \{f(z), \hat{\zeta}(z|g)\}$$

и

$$\partial_2 \hat{\zeta}(z|u) = 0, \quad (4.22)$$

$$2c_5 \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) = \partial_1 \hat{\zeta}(z|u). \quad (4.23)$$

Из уравнения (4.22) следует, что

$$\zeta(z|g) = \sum_{l, m \geq 0} V_1^{lm}(\xi|u) \partial_1^l \partial_2^m \delta(x - y) + \sum_{l \geq 0} V_2^l(\xi|u) \partial_1^l \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + \mu(x_1, \xi|u).$$

Тогда из уравнения (4.23) находим

$$\left(2c_5 \delta(x_1 - y_1) - \sum_{l \geq 0} V_2^l(\xi|u) \partial_1^{l+1} \delta(x_1 - y_1) \right) \theta(x_2 - y_2) = \partial_1 \hat{\mu}(x_1, \xi|u),$$

откуда следует

$$2c_5 \delta(x_1 - y_1) = \sum_{l \geq 0} V_2^l(\xi|u) \partial_1^{l+1} \delta(x_1 - y_1)$$

и $c_5 = 0$.

В работе [5] показано, что форма $m_{2|1}$ не является кограницей, так что и $c_1 = 0$.

4.9. Точность формы $d_1^{\text{ad}} \zeta(z|f, g)$. Здесь мы обсудим слагаемое $M_{d|2}(z|f, g)$,

$$M_{d|2}(z|f, g) \equiv d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g) = \sigma(f, M_2) \{f(z), \zeta^2(z|g)\} - \\ - \sigma(f, g) \sigma(g, M_2) \{g(z), \zeta^2(z|f)\} - \zeta^2(z|\{f, g\}),$$

в выражении (4.20).

Предположим, что значения формы $M_2(z|f, g)$ принадлежат пространству $\mathcal{A}$ для всех $f, g \in \mathbf{D}_2^{n-}$.

1. $\mathcal{A} = \mathbf{D}_2'^{n-}$. В этом случае $\zeta^2(z|g) \in \mathbf{D}_2'^{n-}$ и форма $M_{d|2}(z|f, g)$ является точной (тривиальный коцикл).

2. $\mathcal{A} = \mathbf{E}_2^{n-}$. В этом случае $\zeta^2(z|g) \in \mathbf{E}_2^{n-}$ и форма $M_{d|2}(z|f, g)$ является точной (тривиальный коцикл).

3. $\mathcal{A} = \mathbf{D}_2^{n-}$.

Пусть $M_2(z|f, g) \in \mathbf{D}_2^{n-}$ для всех $f, g \in \mathbf{D}_2^{n-}$. Из этого условия следует, что в (4.20) $c_2 = c_4 = 0$ и $N_2^E(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} \zeta^2(z|f, g) \in \mathbf{D}_2^{n-}$. Пусть $\zeta^2(z|f) = N_1(z|f) + \zeta(z|f)$, где

$$N_1(z|f) = -2\Lambda(x_2) \int du \theta(x_1 - y_1) f(u)$$

и $\Lambda \in C^\infty(\mathbb{R})$ — функции от x такие, что $d\Lambda/dx \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $\Lambda(-\infty) = 0$, $\Lambda(+\infty) = 1$.

Так как

$$\Theta(z|\partial_2 f g) - \Theta(z|f \partial_2 g) - \Lambda(x_2) \int du \delta(x_1 - y_1) [\partial_2 f(u) g(u) - f(u) \partial_2 g(u)] \in \mathbf{D}_2^{n-}$$

и

$$d_1^{\text{ad}} N_1(z|f, g) = -\Lambda(x_2) \int du \delta(x_1 - y_1) [\partial_2 f(u) g(u) - f(u) \partial_2 g(u)],$$

то $N_2^D(z|f, g) \stackrel{\text{def}}{=} N_2^E(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} N_1(z|f, g) \in \mathbf{D}_2^{n-}$ для всех $f, g \in \mathbf{D}_2^{n-}$.

Далее нам понадобится следующая лемма, доказанная в работе [5].

ЛЕММА 4.1. Пусть $d_1^{\text{ad}}\zeta(z|f, g) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$. Тогда

$$\zeta(z|f) = \zeta_D(z|f) + \zeta(z)\bar{f}, \quad (4.24)$$

где $\zeta_D(z|f) \in \mathbf{D}_{n_+}^{n_-}$ и $\zeta(z) \in \mathbf{E}_{n_+}^{n_-}$.

Таким образом,

$$M_{d|2}(z|f, g) = M_{d|2|D}(z|f, g) + M_{d|2|C}(z|f, g),$$

где $M_{d|2|D}(z|f, g) = d_1^{\text{ad}}\zeta_D(z|f, g)$ — точные формы, а

$$M_{d|2|C}(z|f, g) = \{f(z), \zeta(z)\}\bar{g} - \sigma(f, g)\{g(z), \zeta(z)\}\bar{f}$$

— нетривиальные коциклы, параметризуемые классами функций $\mathbf{E}_2^{n_-}/\mathbf{Z}_2^{n_-}$.

Окончательно мы находим

$$\begin{aligned} M_2(z|f, g) = & c_1 m_{2|1}(z|f, g) + c_3 m_{2|3}(z|f, g) + c_5 (m_{2|5}(z|f, g) + d_1^{\text{ad}} N_1(z|f, g)) + \\ & + \{f(z), \zeta^E(z)\}\bar{g} - \sigma(f, g)\{g(z), \zeta^E(z)\}\bar{f} + d_1^{\text{ad}} \zeta^D(z|f, g), \end{aligned}$$

где $\zeta^E(z) \in \mathbf{E}_2^{n_-}/\mathbf{Z}_2^{n_-}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

В этом приложении приведены формулировки лемм, используемых при доказательстве теорем Б2.1 и Б2.2. Доказательство этих лемм содержится в работе [5].

Пусть p, q и r — суперпеременные. Как и ранее, $[p, q] = (-1)^A p_A \omega^{AB} q_B$.

ЛЕММА А.1. Пусть p — суперпеременная с $n \geq 2$ четных и без нечетных компонент. Пусть $F(p)$, $G(p)$, $u(p)$ и $v(p)$ — полиномы от p такие, что $u(p)$ и $v(p)$ не зависят от p_1 . Пусть также $v|_{p_2=0} \neq 0$. Тогда соотношение

$$(p_1 p_2 + u)F + vG = 0 \quad (\text{А.1})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существует такой полином $f(p)$, что

$$F = vf(p), \quad G = -(p_1 p_2 + u)f(p). \quad (\text{А.2})$$

ЛЕММА А.2. Пусть $n_+ \geq 2$, $n_- \geq 0$. Если $F(p, q, r)$ и $G(p, q, r)$ полиномиальны по p, q и r , то соотношение

$$[p, q]F + [q, r]G = 0 \quad (\text{А.3})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существует такой полином $f(p, q, r)$, что

$$F = [q, r]f(p, q, r), \quad G = -[p, q]f(p, q, r). \quad (\text{А.4})$$

ЛЕММА А.3. Если $n_+ \geq 2$, то общее решение уравнения

$$\frac{\partial f(k, l)}{\partial k_A} = l^A g(k, l), \quad (\text{A.5})$$

где $l^A = (-1)^{\varepsilon_A} \omega^{AB} l_B$, для полиномиальных функций $f(k, l)$ и $g(k, l)$ имеет вид

$$f(k, l) = H(x, l) = \sum_{q=0}^Q f_q(l) x^q, \quad g(k, l) = \frac{\partial H(x, l)}{\partial x},$$

где $f_q(l)$ — некоторые полиномы от l и $x = k_A l^A = [k, l]$.

ЛЕММА А.4. Если $n_+ \neq 1$, то общее решение уравнения

$$k_A a_B(k) - \sigma(A, B) k_B a_A(k) = 0 \quad (\text{A.6})$$

для полиномов $a_A(k)$ имеет вид

$$a_A(k) = k_A a(k),$$

где $a(k)$ — произвольный полином.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Найдем решение однородного уравнения для локальных коциклов

$$[p, q] \Psi(z|p, q, r) + \{\psi(z|p, q), zr\} + \text{cycle}(p, q, r) = 0, \quad (\text{Б.1})$$

где $\Psi(z|p, q, r) = \psi(z|p + q, r) - \psi(z|p, r) - \psi(z|q, r)$ и $\psi(z|p, q) = -\psi(z|q, p)$ является полиномом от p и q . Вследствие антисимметрии $\psi(z|0, 0) = 0$.

Из предложения 4.2 следует, что с точностью до кограницы полином $\psi(z|k, l)$ принадлежит $\mathcal{P}_{2,2}$ и не зависит от z .

Таким образом, уравнение (Б.1) сводится к

$$[k, l] \Psi(k, l, r) + [l, r] \Psi(l, r, k) + [r, k] \Psi(r, k, l) = 0, \quad (\text{Б.2})$$

$$\Psi(k, l, r) = \psi(k + l, r) - \psi(k, r) - \psi(l, r), \quad (\text{Б.3})$$

где $\psi(k, l) = -\psi(l, k)$ и $\psi \in \mathcal{P}_{2,2}$, т.е. $\psi(k, l) = \sum_{p,q=2}^N m^{(A)p|(B)q} (k_A)^p (l_B)^q$.

Б.1. Решение уравнения (Б.2). Случай $n_- = 0$.

ТЕОРЕМА Б.1. Пусть $n_+ = 2$, $n_- = 0$, и $\psi(p, q) = -\psi(q, p)$ является таким полиномом, что $\psi \in \mathcal{P}_{2,2}$; пусть, далее, $[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} p_i \omega^{ij} q_j$ и

$$\Psi(p, q, r) = \psi(p + q, r) - \psi(p, r) - \psi(q, r). \quad (\text{Б.4})$$

Тогда общее решение уравнения

$$[p, q]\Psi(p, q, r) + [q, r]\Psi(q, r, p) + [r, p]\Psi(r, p, q) = 0 \quad (\text{Б.5})$$

имеет вид

$$\psi(p, q) = c([p, q])^3 + [p, q](\varphi(p + q) - \varphi(p) - \varphi(q)), \quad (\text{Б.6})$$

где c — произвольная константа, а $\varphi(p)$ — произвольный полином, удовлетворяющий условию $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

Для произвольной пары чисел a_i , $i = 1, 2$, определим пару $a^1 = a_2$, $a^2 = -a_1$, а для любых двух пар a_i, b_i , $i = 1, 2$, определим скобку $[a, b] = -[b, a] = a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_i b^i$.

Введем обозначения

$$x = [k, l], \quad y = [l, r], \quad z = [r, k].$$

Легко проверить справедливость следующих тождеств:

$$r_i[k, l] + k_i[l, r] + l_i[r, k] \equiv 0. \quad (\text{Б.7})$$

Перед тем как доказывать теорему Б.1, докажем следующие три предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.1. Пусть k, l и r — суперпеременные с двумя четными и без нечетных компонент. Если $F(k, l, r)$, $G(k, l, r)$ и $H(k, l, r)$ полиномиальны по k, l и r , то соотношение

$$[k, l]F + [l, r]G + [r, k]H = 0 \quad (\text{Б.8})$$

удовлетворяется тогда и только тогда, когда существуют такие полиномы $s_i(k, l, r)$, $i = 1, 2$, что

$$F = [r, s] = r_1 s_2 - r_2 s_1, \quad G = [k, s], \quad H = [l, s]. \quad (\text{Б.9})$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножим соотношение (Б.8) на k_i . Используя тождества (Б.7), получим

$$x(k_i F - r_i G) + z(k_i H - l_i G) = 0.$$

Это согласно лемме А.1 дает

$$k_i F - r_i G = z s_i, \quad k_i H - l_i G = -x s_i,$$

где s_i — некоторые полиномы. Умножая эти соотношения на k^i, l^i или r^i , получаем выражения (Б.9). Кроме того, легко проверить, что выражения (Б.9) удовлетворяют уравнению (Б.8) при произвольных полиномах s_i , что и требовалось доказать.

В действительности функции F , G и H в уравнении (Б.8) связаны соотношениями $G(k, l, r) = F(l, r, k)$, $H(k, l, r) = F(r, k, l)$ и, кроме того, $F(l, k, r) = F(k, l, r)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.2. Пусть $n_+ = 2$, $n_- = 0$. Тогда общее решение уравнения

$$x\Psi(k, l, r) + y\Psi(l, r, k) + z\Psi(r, k, l) = 0 \quad (\text{Б.10})$$

для полинома $\Psi(k, l, r) = \Psi(l, k, r)$ имеет вид

$$\Psi = [r, \phi], \quad (\text{Б.11})$$

где ϕ_i – произвольные симметричные полиномы от суперпеременных k , l и r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя предложение Б.1, мы можем написать

$$\Psi(k, l, r) = [r, s(k, l, r)], \quad \Psi(l, r, k) = [k, s(k, l, r)], \quad \Psi(r, k, l) = [l, s(k, l, r)],$$

откуда следует $\Psi(k, l, r) = [r, s'(k, l, r)]$, где

$$s'_i(k, l, r) = \frac{1}{3}[s_i(k, l, r) + s_i(l, r, k) + s_i(r, k, l)]$$

– циклически симметричные полиномы. Принимая во внимание свойства симметрии функции Ψ , мы получаем $\Psi(k, l, r) = [r, \phi(k, l, r)]$, где

$$\phi_i(k, l, r) = \frac{1}{2}[s'_i(k, l, r) + s'_i(l, k, r)]$$

– симметричные полиномы, что и требовалось доказать.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.3. Если $n_+ = 2$ и $n_- = 0$, то решение уравнений (Б.4), (Б.5) имеет вид

$$\psi(p, q) = [p, q]g(p, q), \quad (\text{Б.12})$$

где g – некоторый полином такой, что $g(p, q) = g(q, p)$ и $g(p, q) \in \mathcal{P}_{1,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим представления (Б.4) и (Б.11) для функции Ψ . Мы имеем $\psi(k+l, r) - \psi(k, r) - \psi(l, r) = r_i\phi^i(k, l, r)$. Применим оператор $\partial/\partial l_j|_{l=0}$ к этому соотношению:

$$\frac{\partial\psi(k, r)}{\partial k_j} = r_i\phi^{ij}(k, r),$$

где

$$\phi^{ij}(k, r) = \left. \frac{\partial\phi^i(k, l, r)}{\partial l^j} \right|_{l=0}.$$

Вследствие симметрии функций ϕ^i выполняется $\phi^{ij}(k, r) = \phi^{ij}(r, k)$. Из антисимметрии ψ следует также, что $\partial\psi(k, r)/\partial r_j = -k_i\phi^{ij}(k, r)$, и мы получаем

$$N_{kr}\psi(k, r) = (k_i r_j - k_j r_i)\phi^{ij}(k, r) = [k, r]g'(k, r),$$

где

$$N_{kr} = k_i \frac{\partial}{\partial k_i} + r_i \frac{\partial}{\partial r_i}, \quad g'(k, r) = \phi^{12}(k, r) - \phi^{21}(k, r) = g'(r, k),$$

откуда следует $\psi(k, l) = [k, l]g(k, l)$. Очевидно, что $g(k, r) = g(r, k)$ и $g \in \mathcal{P}_{1,1}$. Предложение доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ Б.4.

$$g(p, q) = \varphi(p + q) - \varphi(p) - \varphi(q) + F([p, q]^2), \quad (\text{Б.13})$$

где $\varphi(p)$ и F – некоторые полиномы такие, что $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

Подставим (Б.12) в (Б.5). Результат можно привести к виду

$$[p, q]([q, r] - [r, p])W(p, q, r) = [r, p]([p, q] - [q, r])W(q, r, p), \quad (\text{Б.14})$$

где $W(p, q, r) = g(p + q, r) - g(q + r, p) + g(p, q) - g(q, r)$.

Используя лемму А.1 два раза, можно записать

$$W(p, q, r) = [r, p][r + p, q]U(p, q, r) \quad (\text{Б.15})$$

с некоторым полиномом U таким, что $U(p, q, r) = U(q, r, p)$.

Из $W(r, q, p) = -W(p, q, r)$ следует, что $U(r, q, p) = U(p, q, r)$ и U является симметричным полиномом.

Применив оператор $\partial_{r_A}|_{r=0}$ к формуле

$$g(p + q, r) - g(q + r, p) + g(p, q) - g(q, r) = [r, p][r + p, q]U(p, q, r), \quad (\text{Б.16})$$

получим $\varphi^A(p + q) - \partial_{q_A}g(p, q) - \varphi^A(q) = p^A[p, q]U(p, q, 0)$, где $\varphi^A(q) = \partial_{r_A}g(q, r)|_{r=0}$, и окончательно

$$\partial_{q_A}g(p, q) = \varphi^A(p + q) - \varphi^A(q) - p^A[p, q]U(p, q, 0). \quad (\text{Б.17})$$

Условия $\partial_{q_B}\partial_{q_A} - \sigma(A, B)\partial_{q_A}\partial_{q_B} = 0$ ведут к

$$\begin{aligned} \partial_{q_B}\varphi^A(p + q) - \partial_{q_B}\varphi^A(q) + \sigma(A, B)p^Ap^BU(p, q, 0) - \sigma(A, B)p^A[p, q]\partial_{q_B}U(p, q, 0) = \\ = (\sigma(A, B)\partial_{q_A}\varphi^B(p + q) - \sigma(A, B)\partial_{q_A}\varphi^B(q) + \\ + p^Bp^AU(p, q, 0) - p^B[p, q]\partial_{q_A}U(p, q, 0)), \end{aligned} \quad (\text{Б.18})$$

так что

$$\begin{aligned} \partial_{q_B}(\varphi^A(p + q) - \varphi^A(q)) - \sigma(A, B)\partial_{q_A}(\varphi^B(p + q) - \varphi^B(q)) = \\ = [p, q]\sigma(A, B)(p^A\partial_{q_B} - \sigma(A, B)p^B\partial_{q_A})U(p, q, 0). \end{aligned} \quad (\text{Б.19})$$

Для того чтобы решить уравнение (Б.19), рассмотрим случай $q = 0$. Тогда (Б.19) дает

$$\partial_{p_B}\varphi^A(p) - \sigma(A, B)\partial_{p_A}\varphi^B(p) = C_{BA} - \sigma(A, B)C_{AB},$$

где

$$C_{AB} = \partial_{p_A} \varphi^B(p)|_{p=0} = \partial_{p_A} \partial_{q_B} g(p, q)|_{p=q=0} = \sigma(A, B) C_{BA},$$

так как $g(p, q) = g(q, p)$.

Таким образом, $\partial_{p_B} \varphi^A(p) - \sigma(A, B) \partial_{p_A} \varphi^B(p) = 0$ и $\varphi^A(p) = \partial_{p_A} \varphi(p)$ с некоторым полиномом φ . Уравнение (Б.19) теперь имеет вид

$$(p^A \partial_{q_B} - \sigma(A, B) p^B \partial_{q_A}) U(p, q, 0) = 0. \quad (\text{Б.20})$$

Согласно лемме А.4 из (Б.20) следует, что $\partial_{q_A} U(p, q, 0) = p^A V(p, q)$ с некоторым полиномом $V(p, q)$, а затем лемма А.3 дает, что

$$U(p, q, 0) = H([p, q]) \quad (\text{Б.21})$$

с некоторым полиномом H .

Теперь (Б.17) имеет вид

$$\partial_{q_A} g(p, q) = \partial_{q_A} \varphi(p + q) - \partial_{q_A} \varphi(q) - p^A [p, q] H([p, q])$$

и, следовательно,

$$g(p, q) = \varphi(p + q) - \varphi(q) - \varphi(p) - K([p, q]) + L(p)$$

с некоторыми полиномами K и L . Условие $g(p, 0) = 0$ дает $L = 0$, и условие $g(p, q) = g(q, p)$ дает $K = F([p, q]^2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ Б.1. Мы уже знаем, что решение (Б.5) имеет вид

$$\psi(p, q) = [p, q] F([p, q]^2) + \psi_1(p, q), \quad (\text{Б.22})$$

где

$$\psi_1(p, q) = [p, q] (\varphi(p + q) - \varphi(q) - \varphi(p)). \quad (\text{Б.23})$$

Полином ψ_1 удовлетворяет уравнению (Б.5) для произвольного полинома $\varphi \in \mathcal{P}_1$. Таким образом, $[p, q] F([p, q]^2)$ также должен удовлетворять этому уравнению.

Очевидно, полином $\psi = [p, q] F([p, q]^2)$ должен удовлетворять (Б.5) в каждой степени по $[p, q]$.

Легко проверить, что если $\psi = [p, q]^{2n+1}$ удовлетворяет (Б.5), то $n = 1$. Теорема доказана.

Б.2. Решение уравнения (Б.2). Случай $n_- \geq 0$.

ТЕОРЕМА Б.2. Пусть $n_+ = 2$, $n_- \geq 0$. Пусть $\psi(p, q) = -\psi(q, p)$ — такой полином, что $\psi \in \mathcal{P}_{2,2}$; $[p, q] \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{\varepsilon_A} p_A \omega^{AB} q_B$ и

$$\Psi(p, q, r) = \psi(p + q, r) - \psi(p, r) - \psi(q, r). \quad (\text{Б.24})$$

Тогда общее решение уравнения

$$[p, q]\Psi(p, q, r) + [q, r]\Psi(q, r, p) + [r, p]\Psi(r, p, q) = 0 \quad (\text{Б.25})$$

имеет вид

$$\psi(p, q) = c([p, q])^3 + [p, q](\varphi(p + q) - \varphi(p) - \varphi(q)), \quad (\text{Б.26})$$

где c — произвольная константа, а $\varphi(p)$ — произвольный полином, удовлетворяющий условию $\varphi \in \mathcal{P}_1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем теорему при помощи индукции по числу нечетных образующих n_- . Мы покажем ниже, что общее решение уравнения (Б.25) имеет вид (Б.26), где $\varepsilon(c) = \varepsilon(\varphi) = \varepsilon(M_2)$.

Прежде всего заметим, что выражение (Б.26) действительно является решением уравнения (Б.25) при произвольном n_- . Допустим, что выражение (Б.26) является общим решением уравнения (Б.25) при $n_- \leq N$ (согласно теореме Б.1 это предположение справедливо при $N = 0$). Найдем решение этого уравнения при $n_- = N + 1$.

Введем некоторые обозначения.

Пусть K , L и R обозначают некоторые суперпеременные из двух четных компонент и $N + 1$ нечетных,

$$K = (k, \mu), \quad L = (l, \nu), \quad R = (r, \sigma), \quad \varepsilon(\mu) = \varepsilon(\nu) = \varepsilon(\sigma) = 1,$$

где k, l, r — суперпеременные из двух четных компонент и первых N нечетных, а μ, ν и σ — последние $(N + 1)$ -е нечетные компоненты. Далее, пусть

$$\begin{aligned} x &= [k, l], \quad y = [l, r], \quad z = [r, k], \\ X &= [K, L] = x + \lambda\mu\nu, \quad Y = [L, R] = y + \lambda\nu\sigma, \quad Z = [R, K] = z + \lambda\sigma\mu, \\ \lambda &= \omega^{2+(N+1), 2+(N+1)} = \pm 1. \end{aligned}$$

Итак, пусть общее решение (Б.25) при $n_- = N$ имеет вид

$$\psi_{(N)}(k, l) = c([k, l])^3 + [k, l](\varphi_{(N)}(k + l) - \varphi_{(N)}(k) - \varphi_{(N)}(l)), \quad \varphi_{(N)}(0) = 0,$$

где нижний индекс в круглых скобках обозначает число нечетных аргументов.

Очевидно, что $\psi_{(N+1)}(K, L)|_{\mu=\nu=0} = \psi_{(N)}(k, l)$. Таким образом, мы можем переписать выражение для функции $\psi_{(N+1)}(K, L)$ в виде

$$\psi_{(N+1)}(K, L) = \psi_0(K, L) + \mu\psi_1(k, l) - \nu\psi_1(l, k) + \mu\nu\psi_{12}(k, l), \quad (\text{Б.27})$$

где

$$\psi_0(K, L) = c([K, L])^3 + [K, L](\varphi_{(N)}(k+l) - \varphi_{(N)}(k) - \varphi_{(N)}(l)),$$

а функции $\psi_1(k, l)$ и $\psi_{12}(k, l)$ удовлетворяют условиям $\psi_1(k, l) \in \mathcal{P}_{1,2}$, $\psi_{12}(k, l) = \psi_{12}(l, k) \in \mathcal{P}_{1,1}$, вытекающим из свойств функции $\psi_{(N+1)}(K, L) \in \mathcal{P}_{2,2}$. Подставим представление (Б.26) для функции $\psi_{(N+1)}(K, L)$ в уравнение

$$X\Psi_{(N+1)}(K, L, R) + Y\Psi_{(N+1)}(L, R, K) + Z\Psi_{(N+1)}(R, K, L) = 0. \quad (\text{Б.28})$$

Разложение этого уравнения по μ , ν и σ дает следующие независимые уравнения: возникающее из членов (Б.28), пропорциональных $\mu\nu$,

$$y[\psi_{12}(l+r, k) - \psi_{12}(l, k)] = z[\psi_{12}(r+k, l) - \psi_{12}(k, l)] \quad (\text{Б.29})$$

(и циклические $k \rightarrow l \rightarrow r \rightarrow k$), и возникающее из членов, пропорциональных μ ,

$$x[\psi_1(k+l, r) - \psi_1(k, r)] + z[\psi_1(r+k, l) - \psi_1(k, l)] = y[\psi_1(k, l+r) - \psi_1(k, l) - \psi_1(k, r)] \quad (\text{Б.30})$$

(и циклические $k \rightarrow l \rightarrow r \rightarrow k$). Уравнение, возникающее из мономов, пропорциональных $\mu\nu\sigma$, является следствием двух предыдущих уравнений.

Рассмотрим сперва уравнение (Б.29).

Из леммы А.2 следует, что $\psi_{12}(r+k, l) - \psi_{12}(k, l) = [l, r]a(k, l, r)$, где $a(k, l, r)$ – полином. Применим к этому соотношению оператор $\partial/\partial r_A|_{r=0}$:

$$\frac{\partial\psi_{12}(k, l)}{\partial k^A} = l^A a(k, l), \quad l^A = (-1)^{\varepsilon_A} \omega^{AB} l_B, \quad a(k, l) = -a(k, l, 0). \quad (\text{Б.31})$$

Общее решение (Б.31) есть $\psi_{12}(k, l) = h(x)$, где $h(x)$ – некоторый четный полином от $x = [k, l]$ (см. лемму А.3). Пусть степень полинома $h(x)$ равна $2p$. Рассмотрим члены степени $(4p+2)$ в уравнении (Б.29): $y[(x-z)^{2p} - x^{2p}] = z[(x-y)^{2p} - x^{2p}]$. Это уравнение для p имеет единственное решение $p = 0$, откуда следует $\psi_{12}(k, l) = \text{const}$. Учитывая требование $\psi_{12}(0, 0) = 0$, окончательно получаем $\psi_{12}(k, l) \equiv 0$.

Рассмотрим уравнение (Б.30). Применим к нему оператор $\partial/\partial k_A|_{k=0}$:

$$l^A \psi_1(l, r) - r^A \psi_1(r, l) = y[a^A(l+r) - a^A(l) - a^A(r)], \quad (\text{Б.32})$$

где

$$a^A(l) = \left. \frac{\partial\psi_1(k, l)}{\partial k_A} \right|_{k=0} \in \mathcal{P}_2. \quad (\text{Б.33})$$

Умножая уравнение (Б.32) на r_A , получаем $\psi_1(l, r) = -r_D[a^D(l+r) - a^D(l) - a^D(r)]$. Применим к этому уравнению оператор $\partial/\partial l_A|_{l=0}$:

$$\left. \frac{\partial\psi_1(l, r)}{\partial l_A} \right|_{l=0} = a^A(r) = -\sigma(A, D)r_D \frac{\partial a^D(r)}{\partial r_A} = -\frac{\partial[r_D a^D(r)]}{\partial r_A} + a^A(r),$$

откуда

$$r_A a^A(r) = 0, \quad \psi_1(l, r) = -r_A[a^A(l+r) - a^A(l)]. \quad (\text{Б.34})$$

Подставляя это соотношение в левую часть уравнения (Б.32), применяя к получившемуся уравнению оператор $\partial^2/\partial l_B \partial l_C|_{l=0}$ и принимая во внимание свойства (Б.33), получаем

$$\begin{aligned} & \sigma(A, B)\sigma(A, C)r^A \frac{\partial a^B(r)}{\partial r_C} + \sigma(A, B)\sigma(A, C)\sigma(B, C)r^A \frac{\partial a^C(r)}{\partial r_B} + \omega^{AB}a^C(r) + \\ & + \sigma(A, B)\omega^{A, C}a^B(r) = r^C \frac{\partial a^A(r)}{\partial r_B} + \sigma(B, C)r^B \frac{\partial a^B(r)}{\partial r_C}. \end{aligned}$$

Умножая это уравнение на r_C , мы получаем $\sigma(A, B)r^A N_r a^B(r) = r^B N_r a^A(r)$, где $N_r = r_D \partial/\partial r_D$ — оператор Эйлера, или $r^A a^B(r) - \sigma(A, B)r^B a^A(r) = 0$, что с учетом (Б.33) дает согласно лемме (А.4) $a^A(r) = r^A a(r)$, $a(r) \in \mathcal{P}_1$, откуда $\psi_1(k, l) = x[a(k+l) - a(k)]$. Окончательно имеем

$$\begin{aligned} \psi_{N+1}(K, L) &= c([K, L])^3 + [K, L](\varphi_{N+1}(K+L) - \varphi_{N+1}(K) - \varphi_{N+1}(L)), \\ \varphi_{N+1}(K) &= \varphi_N(k) + \mu a(k). \end{aligned}$$

Таким образом, общее решение $\psi(k, l)$ уравнения (Б.2) действительно имеет вид (4.8).

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Найдем решение уравнения (3.11)

$$\begin{aligned} & \delta_{A,2}[\delta(x_1 - y_1)\theta(x_2 - y_2)V_1(u)] \overleftarrow{\partial}_D \omega^{DB} + 2\omega^{AC} \partial_C[V_2(z)\delta(x_1 - y_1)\theta(x_2 - y_2)]\delta_{B,2} - \\ & - \omega^{AC} \partial_C \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_D \omega^{DB} = 0. \end{aligned}$$

Рассмотрим все возможные комбинации A и B .

1. $A = i, B = j$:

$$\begin{aligned} & \delta_{i,2}[\delta(x_1 - y_1)\theta(x_2 - y_2)V_1(u)] \overleftarrow{\partial}_k \omega^{kj} + 2\omega^{il} \partial_l[V_2(z)\delta(x_1 - y_1)\theta(x_2 - y_2)]\delta_{j,2} - \\ & - \omega^{il} \partial_l \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_k \omega^{kj} = 0. \end{aligned}$$

1.1. $i = j = 1$:

$$\begin{aligned} & \partial_2 \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_2 = 0 \implies \\ & \partial_2 m^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_2 = \sum_{p, q \geq 0} B^{pq}(z, \eta) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x - y) = \left(\sum_{p, q \geq 0} B'^{pq}(z, \eta) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x - y) \right) \overleftarrow{\partial}_2 + \\ & + \left(\sum_{p \geq 0} [\partial_2 B'^p(z, \eta)] \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) \right) \overleftarrow{\partial}_2 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sum_{p,q \geq 0} B''^{pq}(u, \eta) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x-y) \right) \overleftarrow{\partial}_2 + \\
&\quad + \partial_2 \left(\sum_{p \geq 0} B_1^p(z, \eta) \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) \right) \overleftarrow{\partial}_2 \implies \\
\partial_2 m^1(z|u) &= \sum_{p,q \geq 0} B''^{pq}(u, \eta) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x-y) + \\
&\quad + \partial_2 \left(\sum_{p \geq 0} B_1^p(z, \eta) \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) \right) + \\
&\quad + \partial_2 \mu_1(z|y_1, \eta) = \\
&= \partial_2 \left(\sum_{p,q \geq 0} B'''^{pq}(u, \eta) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x-y) + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{p \geq 0} [B_1^p(z, \eta) + B_2^p(\xi, u)] \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + \mu_1(z|y_1, \eta) \right).
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
m^1(z|u) &= \sum_{p \geq 0} [B_1^p(z, \eta) + B_2^p(\xi, u)] \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + \\
&\quad + \mu_1(z|y_1, \eta) + \mu_2(x_1, \xi|u) + \sum_{p,q \geq 0} B'''^{pq}(\xi, u) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x-y).
\end{aligned}$$

1.2. $i = 1, j = 2$:

$$\begin{aligned}
&\partial_2 \hat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_1 + 2[\partial_2 V_2(z)] \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) = 0 \implies \\
&\quad \left([2\partial_2 V_2(z)] \delta(x_1 - y_1) - \sum_{p \geq 0} [\partial_2 B_1^p(z)] \partial_1^{p+1} \delta(x_1 - y_1) \right) \times \\
&\quad \times \theta(x_2 - y_2) + \partial_2 \hat{\mu}_1(z|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0.
\end{aligned}$$

1.2а:

$$\begin{aligned}
&\partial_2 \hat{\mu}_1(z|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0 \implies \partial_2 \mu_1(z|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0 \implies \partial_2 \mu_1(z|y_1, \eta) = \partial_2 \mu_{11}(z|\eta) \implies \\
&\quad \mu_1(z|y_1, \eta) = \mu_{11}(z|\eta) + \mu_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta).
\end{aligned}$$

1.2б:

$$\begin{aligned}
&2[\partial_2 V_2(z)] \delta(x_1 - y_1) - \sum_{p \geq 0} [\partial_2 B_1^p(z, \eta)] \partial_1^{p+1} \delta(x_1 - y_1) = 0 \implies \\
&\quad V_2 = V_2(x_1, \xi), \quad B_1^p = B_1^p(x_1, \xi, \eta).
\end{aligned}$$

1.3. $i = 2, j = 1$:

$$\begin{aligned}
&\partial_1 \hat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_2 - [\partial_2 V_1(u)] \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) = 0 \implies \\
&\quad \left(\sum_{p \geq 0} [\partial_2 B_2^p(\xi, u)] \partial_1^{p+1} \delta(x_1 - y_1) - [\partial_2 V_1(u)] \delta(x_1 - y_1) \right) \times \\
&\quad \times \theta(x_2 - y_2) + \partial_1 \hat{\mu}_2(x_1, \xi|u) \overleftarrow{\partial}_2 = 0.
\end{aligned}$$

1.3a:

$$\partial_1 \hat{\mu}_2(x_1, \xi|u) \overleftarrow{\partial}_2 = 0 \implies \partial_1 \mu_2(x_1, \xi|u) \overleftarrow{\partial}_2 = 0 \implies \mu_2(x_1, \xi|u) \overleftarrow{\partial}_2 = \mu_{21}(\xi|u) \overleftarrow{\partial}_2 \implies \mu_2 = \mu_{21}(\xi|u) + \mu_{21}(x_1, \xi|y_1, \eta).$$

1.3б:

$$\sum_{p \geq 0} [\partial_2 B_2^p(\xi, u)] \partial_1^{p+1} \delta(x_1 - y_1) - [\partial_2 V_1(u)] \delta(x_1 - y_1) = 0.$$

Таким образом,

$$B_2^p = B_2^p(\xi, y_1, \eta), \quad V_1 = V_1(y_1, \eta), \\ \sum_{p \geq 0} [B_1^p(z, \eta) + B_2^p(\xi, u)] \partial_1^p \delta(x_1 - y_1) = \sum_{p \geq 0} B_3^p(y_1, \xi, \eta) \partial_1^p \delta(x_1 - y_1).$$

1.4. $i = 2, j = 2$:

$$\{[V_1(x_1, \eta) + 2V_2(x_1, \xi)] \partial_1 \delta(x_1 - y_1) + 2[\partial_1 V_2(x_1, \xi)] \delta(x_1 - y_1)\} \theta(x_2 - y_2) + \\ + \partial_1 \hat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_1 = 0 \implies \\ \left\{ 2[\partial_1 V_2(x_1, \xi)] + [V_1(x_1, \eta) + 2V_2(x_1, \xi)] \partial_1 + \right. \\ \left. + \sum_{p \geq 0} [B_3^p(y_1, \xi, \eta) \partial_1^{p+2} + \partial_1 B_3^p(y_1, \xi, \eta) \partial_1^{p+1}] \right\} \delta(x_1 - y_1) \theta(x_2 - y_2) + \\ + \partial_1 \hat{\mu}'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0, \\ \mu'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) = \mu_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) + \mu_{21}(x_1, \xi|y_1, \eta).$$

1.4a:

$$\partial_1 \hat{\mu}'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0 \implies \partial_1 \mu'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) \overleftarrow{\partial}_1 = 0 \implies \\ \partial_1 \mu'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) = \partial_1 \mu_{13}(x_1, \xi|\eta) \implies \mu'_{12}(x_1, \xi|y_1, \eta) = \mu_{13}(x_1, \xi|\eta) + \mu_{14}(\xi|y_1, \eta).$$

1.4б:

$$\left\{ [\partial_1 V_2(x_1, \xi)] + [2V_1(x_1, \eta) + V_2(x_1, \xi)] \partial_1 + \right. \\ \left. + \sum_{p \geq 0} [B_3^p(y_1, \xi, \eta) \partial_1^{p+2} + \partial_1 B_3^p(y_1, \xi, \eta) \partial_1^{p+1}] \right\} \delta(x_1 - y_1) = 0 \implies \\ B_3^p = 0, \quad V_2 = V_2(\xi), \quad V_1(x_1, \eta) + 2V_2(\xi) = 0 \implies \\ V_2 = c_5 = \text{const}, \quad V_1 = -2c_5.$$

Таким образом, мы получили, что $m^1(z|u)$ может быть представлено в виде

$$m^1(z|u) = \mu_1(z|\eta) + \mu_2(\xi|u) + \sum_{p, q \geq 0} B'''^{pq}(\xi, u) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x - y).$$

2. $A = i, B = \beta + 2$:

$$\begin{aligned} \partial_i \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_\beta = 0 &\implies \partial_i \widehat{\mu}_1(z|\eta) \overleftarrow{\partial}_\beta = 0 \implies \partial_i \mu_1(z|\eta) \overleftarrow{\partial}_\beta = 0 \implies \\ &\implies \mu_1(z|\eta) \overleftarrow{\partial}_\beta = t_\beta(\xi|\eta) = t'(\xi|\eta) \overleftarrow{\partial}_\beta \implies \mu_1(z|\eta) = t'(\xi|\eta) + b_1(z). \end{aligned}$$

3. $A = \alpha + 2, B = j$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_j = 0 &\implies \partial_\alpha \widehat{\mu}_2(\xi|u) \overleftarrow{\partial}_j = 0 \implies \partial_\alpha \mu_2(\xi|u) \overleftarrow{\partial}_j = 0 \implies \\ &\implies \partial_\alpha \mu_2(\xi|u) = p_\alpha(\xi|\eta) = \partial_\alpha p(\xi|\eta) \implies \mu_2(\xi|u) = p(\xi|\eta) + c_1(u). \end{aligned}$$

4. $A = \alpha + 2, B = \beta + 2$:

$$\begin{aligned} \partial_\alpha \widehat{m}^1(z|u) \overleftarrow{\partial}_\beta = 0 &\implies \partial_\alpha t(\xi|\eta) \overleftarrow{\partial}_\beta = 0, \quad t(\xi|\eta) = t'(\xi|\eta) + p(\xi|\eta) \implies \\ &\implies t(\xi|\eta) = b_2(\xi) + c_2(\eta). \end{aligned}$$

Окончательно получаем

$$m^1(z|u) = b(z) + c(u) + \sum_{p,q \geq 0} B'''^{pq}(\xi, u) \partial_1^p \partial_2^q \delta(x - y).$$

Благодарности. Работа поддержана РФФИ (гранты № 02-01-00930 (И. В. Тютин) и № 02-02-17067 (С. Е. Конштейн)) и Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1578.2003.2).

Список литературы

- [1] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerovich, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61; P. 111; *М. Карасёв, В. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991; *B. Fedosov.* Deformation Quantization and Index Theory (Math. Topics. V. 9). Berlin: Akademie, 1996; *M. Kontsevich.* Lett. Math. Phys. 2003. V. 66. P. 157; q-alg/9709040.
- [2] *В. В. Жаринов.* ТМФ. 2003. Т. 136. С. 179.
- [3] *Д. А. Лейтес, И. М. Щепочкина.* ТМФ. 2001. Т. 126. С. 339.
- [4] *И. В. Тютин.* ТМФ. 2001. Т. 127. С. 253; Т. 128. С. 515.
- [5] *С. Е. Конштейн, А. Г. Смирнов, И. В. Тютин.* ТМФ. 2005. Т. 143. С. 163; hep-th/0312109.
- [6] *S. E. Konstein, I. V. Tyutin.* Deformations of the central extension of the Poisson superalgebra. hep-th/0501027.
- [7] *M. Scheunert, R. B. Zhang.* J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 5024; q-alg/9701037.

Поступила в редакцию 25.III.2005 г.