Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Т. Ахмедов, На пути к теории неабелевых тензорных полей, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 321–343

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1903>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 14:13:47

© 2005 г.

Э. Т. Ахмедов*

НА ПУТИ К ТЕОРИИ НЕАБЕЛЕВЫХ ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Дано определение не зависящего от триангуляции упорядочения по поверхности, которое естественным образом обобщает хорошо известное определение упорядочения по пути. В этом случае естественно, чтобы два-форма “связности” несла три “цветовых” индекса, а не два, как в случае обычной один-формы калибровочной связности. Определена процедура экспоненцирования матрицы с тремя индексами, использующая структурные константы для правил слияния.

Ключевые слова: квантовая теория поля, неабелевы тензорные поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

Среди вопросов, стоящих перед современной математической физикой, имеются два, которые рассматриваются в данной работе:

- 1) что такое теория неабелевых тензорных полей;
- 2) как определить “многовременной” гамильтонов формализм для неточечных объектов?

Мы покажем, что эти два вопроса связаны друг с другом.

Для определения теории два-тензорного поля следует понять его природу. Мы полагаем, что будет правильным рассматривать тензорное поле как связность на некотором необычном “расслоении.” Или, лучше сказать, мы предлагаем несколько иной взгляд на известный тип расслоений, в рамки которого естественным образом укладывается два-тензорное поле. Базой этого расслоения является пространство петель $\mathcal{L}X$ конечномерного пространства X . “Точкой” пространства $\mathcal{L}X$ является петля γ на пространстве X . “Путь,” связывающий две “точки” γ_1 и γ_2 на базе $\mathcal{L}X$, является поверхностью $\Sigma(\gamma_1, \gamma_2)$ внутри пространства X , которая имеет цилиндрическую топологию с двумя петлями на краях γ_1 и γ_2 .

Таким образом, связность $\hat{B}$ на данном расслоении является два-формой, которую следует интегрировать по поверхности Σ . Это похоже на стандартную ситуацию со струнным два-тензорным B -полем, но в отличие от нее, мы хотели бы рассматривать такие слои V (над каждой из точек петель γ_1 и γ_2), которые имеют размерность выше

* Институт экспериментальной и теоретической физики, Москва, Россия.
E-mail: akhmedov@itep.ru

единицы. Поэтому поле $\hat{B}$ в этом случае несет “цветовые” индексы. Таким образом, соответствующая “матрица голономии” связности $\hat{B}$ над “путем” (поверхностью Σ) имеет непрерывное число индексов, распределенных по петлям γ на краях Σ . Для определения голономии поля $\hat{B}$ следует ввести определение упорядочения по поверхности.

Не пытаясь формализовать вышеуказанную ситуацию, мы представим явную конструкцию перечисленных выше объектов. Для определения упорядочения по поверхности рассмотрим триангуляцию $\tilde{\Sigma}$ римановой поверхности Σ . Тогда упорядочение по поверхности получается посредством склейки по всей симплициальной поверхности экспонент от $\hat{B}$, приписанных каждому симплексу. Но при этом очевидно, что экспоненты должны нести по три индекса в соответствии в тремя ребрами каждого симплекса – треугольника. Вопрос состоит в том, что является *экспонентой, которая имеет три индекса*¹⁾? Чтобы двигаться дальше, предположим, что это новый объект – функция от матрицы $\hat{B}$, также имеющей три индекса. Мы собираемся определить эту функцию в данной статье. Для этого потребуем, чтобы выполнялись основные свойства, необходимые для придания конструкции смысла. Конструкция осмысленна, если определение упорядочения по поверхности не зависит от способа взятия континуального предела (от $\tilde{\Sigma}$ к Σ): этот факт мы называем “независимость определения упорядочения по поверхности от триангуляции”.

Таким образом, основная трудность в определении состоит в отсутствии понимания того, как экспоненцировать матрицы с тремя индексами. В данной работе мы попытаемся преодолеть эту трудность. Чтобы в общих чертах создать у читателя представление о такой экспоненте и независимости от триангуляции, напомним, что экспонента матрицы A_i^j с двумя индексами имеет следующее основное свойство:

$$(e^{t_1 \hat{A}})_i^j (e^{t_2 \hat{A}})_j^k = (e^{(t_1+t_2) \hat{A}})_i^k \quad (1)$$

для любых двух чисел t_1 и t_2 . Это уравнение определяет экспоненту однозначно. Действительно, из него можно вывести дифференциальное уравнение для экспоненты.

Экспонента матрицы B_{ijk} с тремя индексами может иметь *любое* число внешних индексов (не только нуль или два, как экспонента матрицы с двумя индексами). В результате она подчиняется большому числу различных тождеств, вытекающих из условий независимости от триангуляции. Более того, функция от рассматриваемой трилинейной формы B на самом деле не является экспонентой в общепринятом смысле, но мы будем ее называть так по той причине, что она подчиняется условиям независимости от триангуляции.

Наиболее элегантно тождество, которому удовлетворяет рассматриваемая экспонента, имеет вид²⁾

$$(E^{t_1 \hat{B}})_{j_1 k_2}^{k_1} (E^{t_2 \hat{B}})_{j_2 k_3}^{k_2} (E^{t_3 \hat{B}})_{j_3 k_1}^{k_3} = (E^{(t_1+t_2+t_3) \hat{B}})_{j_1 j_2 j_3}^{k_1 k_2 k_3}, \quad (2)$$

что представлено графически на рис. 1. Однако это уравнение не определяет экспоненту матрицы $\hat{B}$ с тремя индексами однозначно. Тем не менее именно это свойство может

¹⁾См. работу [1] по поводу различных свойств кубических матриц и естественных правил их умножения.

²⁾Путем применения барицентрического разбиения многомерных симплексов легко обобщить эти уравнения на высшие размерности.

$$\begin{aligned}
 & \sum_j \begin{array}{c} e^{t_1 A} \quad \bullet \quad e^{t_2 A} \\ \quad \quad \quad j \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ i \quad \quad \quad k \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \quad \bullet \\ i \quad k \\ e^{(t_1+t_2)A} \end{array} \quad (a) \\
 \\
 & \sum_{k_1 k_2 k_3} \begin{array}{c} \bullet \\ \quad \quad \quad k_2 \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \quad \bullet \\ j_1 \quad E^{t_1 B} \quad E^{t_2 B} \quad j_2 \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ k_1 \quad E^{t_3 B} \quad k_3 \\ j_3 \end{array} = \begin{array}{c} \bullet \\ \quad \quad \bullet \\ \quad \quad \bullet \\ j_1 \quad \quad \quad j_2 \\ \bullet \quad \quad \quad \bullet \\ E^{(t_1+t_2+t_3)B} \\ j_3 \end{array} \quad (b)
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Основное свойство экспонент матриц; (а) матрица с двумя индексами, (б) матрица с тремя индексами.

помочь в формулировке “двухвременного” гамильтонова формализма. Мы кратко обсуждаем это в заключительном разделе. Более полное обсуждение будет представлено в отдельной публикации.

Здесь стоит упомянуть, что упорядочение по поверхности можно определить с помощью стандартной экспоненты для два-тензорной формы с двумя “цветовыми” индексами. Но такое определение требует еще и присутствия дополнительной один-формы калибровочной связности [2]. Поэтому, если мы желаем иметь дело только с два-тензорным полем, мы вынуждены следовать нашей линии аргументации.

Структура статьи такова. В разделе 2 предлагается определение упорядочения по поверхности. В разделе 3 определяется, как экспоненцировать матрицу с тремя индексами. В разделе 4 обсуждаются свойства упорядочения по поверхности и свойства рассматриваемого “расслоения”. В этом разделе даются также другие определения экспоненты матрицы с тремя индексами. В разделе 5 приводятся некоторые явные примеры матриц I и K , определяемых в основном тексте. В заключении кратко обсуждаются некоторые направления будущих исследований, например, развитие “двухвременного” гамильтонова формализма. Приложение содержит некоторые явные вычисления, необходимые для понимания статьи.

2. УПОРЯДОЧЕНИЕ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ТРИАНГУЛЯЦИИ

Для того чтобы ввести обозначения и дать представление об основных идеях нашего подхода, кратко опишем, как получается упорядочение по пути. Рассмотрим базу X векторного расслоения с N -мерными слоями V . Мы хотели бы найти матрицу голономии, соответствующую пути γ_{xy} , которая связывает N -векторы в слоях над двумя точками x и y пространства X . Мы приведем здесь несколько необычный способ определения упорядоченной вдоль пути экспоненты, который, однако, легко обобщается на двумерный случай. Для определения матрицы голономии аппроксимируем путь γ_{xy} ломаной

Рис. 2. Ломанная $\tilde{\gamma}_{xy}$ является дискретизацией пути γ_{xy} . Каждому ребру $\tilde{\gamma}$ приписана матрица $U_{k_l}^{k_{(l+1)}}$.

линией $\tilde{\gamma}_{xy}$, состоящей из набора малых прямых линий (рис. 2).

Рассматриваемая голономия имеет вид

$$U(\tilde{\gamma}_{xy})_i^j \equiv \sum_{k_1, k_2, \dots, k_L}^N U(x, \Delta_1 x)_i^{k_1} U(x_1, \Delta_2 x)_{k_1}^{k_2} \dots U(y, \Delta_L x)_{k_L}^j, \quad (3)$$

где L – число звеньев ломаной; $x_1 = x + \Delta_1 x$, и т.д., а $\Delta_l x - l$ -е звено ломаной линии; каждая величина U в (3) является оператором $\hat{U}: V \rightarrow V$. Всюду в дальнейшем малые латинские буквы (i, j, k и т.п.) представляют собой “цветовые” индексы, пробегающие значения от 1 до N . Чтобы получить голономию для самого пути γ_{xy} , следует взять непрерывные пределы $L \rightarrow \infty$ и $|\Delta_l x| \rightarrow 0$, $l = 1, \dots, L$. Определение (3) не зависит от одномерной триангуляции, т.е. от конкретного выбора последовательности $\tilde{\gamma}_{xy}$ для аппроксимации γ_{xy} при $L \rightarrow \infty$, поскольку каждое U в произведении (3) можно представить как экспоненту элемента алгебры (связности в векторном расслоении). Экспонента определяется следующим образом (не следует путать ее с экспонентой, упорядоченной вдоль пути):

$$\begin{aligned} U_i^j &= (e^{\hat{A}})_i^j \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\prod_{\text{graph}}^M \left[1 + \frac{\hat{A}}{M} \right] \right)_i^j \equiv \\ &\equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \left(\delta_i^{j_1} + \frac{A_i^{j_1}}{M} \right) \left(\delta_{j_1}^{j_2} + \frac{A_{j_1}^{j_2}}{M} \right) \dots \left(\delta_{j_M}^j + \frac{A_{j_M}^j}{M} \right) = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[\left(\prod_{\text{graph}}^M \delta \right)_i^j + \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M A_k^m(a) \left(\prod_{\text{graph}(a)}^{M-1} \delta \right)_{mi}^{kj} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{M^2} \sum_{a \neq b=1}^M A_k^m(a) A_n^l(b) \left(\prod_{\text{graph}(a,b)}^{M-2} \delta \right)_{lmi}^{nkj} + \\
& + O\left(\frac{1}{M^3}\right) \Big] = \delta_i^j + A_i^j + \frac{1}{2!} (\hat{A}^2)_i^j + O\left(\frac{1}{3!}\right), \quad (4)
\end{aligned}$$

где интересующий нас случай возникает, когда $A_i^j = A_{\mu i}^j(x) \Delta x^\mu$, но в формуле (4) мы рассматриваем A как постоянную матрицу. В этом выражении предел берется по последовательности открытых, связных графов (ломаных линий)³⁾ с M звеньями³⁾; каждому звену припишем матрицу $(1 + \hat{A}/M)$ и склеим их посредством свертки нижних и верхних индексов; сумма по $a = 1, \dots, M$ берется по всем возможным вставкам (пронумерованным буквой a) в граф одного $\hat{A}$, $A(a)$ означает матрицу A , помещенную в a -е звено, $\text{graph}(a)$ является несвязной ломаной линией – исходным графом без a -го звена; сумма по $a \neq b = 1, \dots, M$ берется по всем возможным вставкам пары матриц $\hat{A}$ в граф; $\text{graph}(a, b)$ является несвязной ломаной линией – исходным графом без a -го и b -го звеньев. Произведения множителей δ в (4) берутся по этим графам очевидным образом, а именно, посредством свертки нижних и верхних индексов.

Именно это определение экспоненты делает упорядочение по пути (3) не зависящим от триангуляции в пределе $L \rightarrow \infty$. Действительно, матрица δ_i^j является решением уравнения

$$\kappa_i^j \kappa_j^k = \kappa_i^k, \quad (5)$$

графически представленного на рис. 3. В результате всюду в (4) $\prod \delta = \delta$.

Рис. 3. Одномерное условие независимости от триангуляции.

Любое решение уравнения (5) подходит для определения экспоненты от матрицы с двумя индексами, а потому и для не зависящего от триангуляции упорядочения. Общее решение этого уравнения есть проекционный оператор. Поэтому определение экспоненты с таким проектором совпадает со стандартным при ограничении на собственное пространство проектора. Используя (5), с очевидностью получаем, что в рассматриваемом пределе

$$\begin{aligned}
U(\gamma_{xy})_i^j = & \left(P \exp \left\{ \int_0^{2\pi} ds \hat{A}_\mu(x) \dot{x}^\mu(s) \right\} \right)_i^j \equiv \delta_i^j + \int_0^{2\pi} ds A_{\mu i}^j(x) \dot{x}^\mu(s) + \\
& + \int_0^{2\pi} ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 A_{\mu i}^k(x) \dot{x}^\mu(s_1) A_{\nu k}^j(x) \dot{x}^\nu(s_2) + \dots, \quad (6)
\end{aligned}$$

где $x(s)$ – отображение (переводящее $s \in [0, 2\pi)$ в X), образом которого является кривая γ_{xy} , $x(0) = x$, $x(2\pi) = y$.

³⁾ Просим не путать эти графы с теми, которыми аппроксимируется кривая γ_{xy} .

Мы хотели бы обобщить эту конструкцию на случай упорядочения по двумерной поверхности. Естественно рассмотреть в данном контексте триангуляционную аппроксимацию $\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)$ ориентированной римановой поверхности $\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)$ с L граничными замкнутыми петлями γ , которые аппроксимируются замкнутыми ломаными $\tilde{\gamma}$ (рис. 4).

Рис. 4. $\tilde{\Sigma}$ – дискретизация Σ ; $\tilde{\gamma}$ – дискретизации γ .

Аналогично одномерному случаю, в котором мы приписываем матрицы U_i^j каждому симплексу (ребру), в данном двумерном случае мы приписываем U_{ijk} каждому симплексу (треугольнику). При этом индексы i, j и k приписываются всем трем ребрам соответствующего треугольника. Поэтому в данном случае $\hat{U}: V^3 \rightarrow \mathbb{C}$ для N -мерного векторного пространства V – “слоя” нашего “расслоения”.

Если рассмотреть циклически симметричные U_{ijk} , то определение упорядочения по поверхности оказывается однозначным. Упорядочение по поверхности получается склейкой (с помощью билинейной формы $\kappa^{ij}: \mathbb{C} \rightarrow V^2$) матриц U_{ijk} на каждом симплексе по всей симплициальной поверхности (рис. 5):

$$U[\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)]_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} j_1^{(2)} \dots j_{n_2}^{(2)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}} \equiv \sum_{k_1, k_2, \dots, k_w} U_{j_1^{(1)} k_1 k_2}^{(1)}(x_1, \Delta\sigma_1) U_{k_4 k_3}^{k_1 k_3}(x_2, \Delta\sigma_2) U_{j_2^{(1)} j_3^{(1)}}^{k_3}(x_3, \Delta\sigma_3) \dots, \quad (7)$$

где w – полное число внутренних ребер графа; $j^{(l)}$ – индексы, соответствующие ребрам l -й ломаной линии $\tilde{\gamma}_l$, а n_l – полное число ее ребер. Мы поднимаем (опускаем) индек-

Рис. 5. Часть триангуляционной аппроксимации $\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)$. Каждому треугольнику приписана матрица U с тремя индексами и производится суммирование по индексам, приписанным внутренним ребрам графа.

Рис. 6. В каждой точке s кривой γ имеется слой V .

сы с помощью вышеупомянутой билинейной формы κ^{ij} ($\kappa_{ij}\kappa^{jk} = \delta_i^k$); $\Delta\sigma$ являются элементарными ориентированными площадями, связанными с треугольниками.

В континуальном пределе дискретные индексы $1, \dots, n_l$ переходят в континуальные индексы $s_l \in [0, 2\pi)$, и соответственно,

$$\begin{aligned} U[\tilde{\Sigma}(\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_L)]_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} j_1^{(2)} \dots j_{n_2}^{(2)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}} &\longrightarrow \\ \longrightarrow U[\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)]_{j^{(1)}(s_1) | j^{(2)}(s_2) | \dots | j^{(L)}(s_L)}, \end{aligned} \quad (8)$$

где $\widehat{U}(\Sigma): V^\infty(1) \otimes \dots \otimes V^\infty(L) \rightarrow \mathbb{C}$ и $j^{(l)}(s_l)$ – “цветовой” индекс, приписанный непрерывному числу точек, занумерованных индексами s_l (параметризация l -й петли γ_l). Такой оператор $\widehat{U}(\Sigma)$ при $L = 1$ графически представлен на рис. 6. Для тех, кто работает в области теории струн, выражение (8) не является столь незнакомым, каким оно могло бы показаться с первого взгляда. В самом деле, если заменить $j^{(l)}(s_l)$ на $x^{(l)}(s_l)$, то $U[\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)]$ можно рассматривать как струнную амплитуду, петли γ на концах которой отображаются посредством $x(s)$. Эта аналогия полезна в понимании того, как наше рассмотрение могло бы помочь в определении “двухвременного” гамильтонова формализма – формализма для струноподобных объектов. Краткое обсуждение этой темы можно найти в заключительном разделе.

Таким образом, мы определили упорядочение по поверхности. Но это еще не все: нам надо определить U_{ijk} таким образом, чтобы предел (8) существовал и не зависел от способа триангуляции.

3. ЭКСПОНЕНЦИРОВАНИЕ МАТРИЦЫ С ТРЕМЯ ИНДЕКСАМИ

В данном разделе мы покажем, что для независимости континуального выражения в (8) от триангуляции каждая матрица U_{ijk} должна представляться экспонентой,

$$U_{ijk} = (E^{\widehat{B}})_{ijk}, \quad (9)$$

где $\widehat{B}$ – матрица с тремя индексами. Нам особо интересен случай $B^{ijk}(x, \Delta\sigma) = B_{\mu\nu}^{ijk}(x) \Delta x^\mu \Delta x^\nu$. Естественно предполагать, что B , как и U , имеет три, а не какое-то другое число индексов.

Примем следующее обобщение формулы (4) за определение *экспоненты матрицы с тремя индексами*:

$$\text{Tr}(E_{g,I,\kappa}^{\widehat{B}}) \equiv \lim_{M \rightarrow \infty} \prod_{\text{graph}, g}^M \left(\hat{I} + \frac{\widehat{B}}{M} \right), \quad (10)$$

где предел берется по *любой* последовательности *замкнутых* (поскольку мы взяли след в левой части равенства), связанных ориентированных триангулирующих графов⁴⁾ рода g с M гранями (треугольниками). Для взятия предела $M \rightarrow \infty$ следует выбрать последовательность графов. Выделенной последовательности графов не существует, поэтому следует потребовать, чтобы результат взятия предела (10) не зависел от выбора этой последовательности.

Объясним теперь условия (включая и те, что наложены на матрицы κ^{ij} и I_{ijk}), при которых выполнено указанное требование. Во-первых, потребуем, чтобы в этих графах любые два треугольника не могли бы склеиваться более чем по одному ребру (рис. 7). Во-вторых, при взятии предела $M \rightarrow \infty$ число треугольников, встречающихся в любой вершине графа, должно быть значительно меньше M . Это условие необходимо для преодоления трудности, обсуждаемой в приложении.

⁴⁾Под “триангулирующими графами” мы понимаем графы, которые триангулируют римановы поверхности. Просим не путать эти графы с упоминавшимися ранее, которые аппроксимируют поверхность $\Sigma(\gamma_1, \dots, \gamma_L)$ в объемлющем пространстве X .

Рис. 7. Конфигурации, которые не должны присутствовать внутри графов, определяющих экспоненту.

Как мы покажем ниже, определение экспоненты (10) зависит от выбора матриц $\hat{I}$, κ и рода g графов в последовательности, по которой берется предел $M \rightarrow \infty$. Из-за этого мы снабжаем экспоненту (10) соответствующими индексами. При фиксированном M произведение берется по рассматриваемому графу: в каждую грань графа мы помещаем матрицу $(I + B/M)_{ijk}$ и склеиваем индексы этих матриц с помощью билинейной формы κ^{ij} . Матрицы I_{ijk} и κ^{ij} будут определены ниже.

Начнем наш анализ с произвольного ориентированного графа со сферической топологией ($g = 0$) и M гранями: все дальнейшие рассуждения легко обобщаются на случай произвольных графов с высшей топологией. Разложим произведение в (10) для такого частного выбора графа:

$$\begin{aligned}
 \prod_{\text{graph}, 0}^M \left(\hat{I} + \frac{\hat{B}}{M} \right) &= \prod_{\text{graph}}^M \hat{I} + \frac{1}{M} \sum_{a=1}^M B^{j_1 j_2 j_3}(a) \left(\prod_{\text{graph}(a)}^{M-1} \hat{I} \right)_{j_3 j_2 j_1} + \\
 &+ \frac{1}{M^2} \left[\sum_{a \neq b}^{(I)} B^{j_1 j_2 j_3}(a) B^{j_4 j_5 j_6}(b) \left(\prod_{\text{graph}(I, a, b)}^{M-2} \hat{I} \right)_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4} + \right. \\
 &+ \sum_{a \neq b}^{(II)} B^{j_1 j_2 j_3}(a) B^{j_4 j_5 j_6}(b) \left(\prod_{\text{graph}(II, a, b)}^{M-2} \hat{I} \right)_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1} + \\
 &\left. + \sum_{a \neq b}^{(III)} B^{j_1 j_2 k}(a) B_k^{j_3 j_4}(b) \left(\prod_{\text{graph}(III, a, b)}^{M-2} \hat{I} \right)_{j_4 j_3 j_2 j_1} \right] + O\left(\frac{1}{M^3}\right). \quad (11)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части равенства представляет собой произведение $\hat{I}$ по графу и является константой, не зависящей от $\hat{B}$. Второе слагаемое является суммой по граням графа, занумерованным с помощью a ; $\hat{B}(a)$ означает матрицу $\hat{B}$, помещенную в грань a , а произведение множителей $\hat{I}$ в этом члене берется по $\text{graph}(a)$, являющемуся исходным графом без грани a (рис. 8). В третьем члене сумма $(\sum^{(I)})$ берется по удаленным граням a и b (рис. 9). Поэтому $\text{graph}(I, a, b)$ (исходный граф без граней a и b)

имеет цилиндрическую топологию с тремя внешними ребрами на каждом краю цилиндра. По этой причине мы разбили индекс в соответствующем члене на две группы $j_1 j_2 j_3$ и $j_4 j_5 j_6$ (мы еще вернемся к этому обстоятельству). В то же время в четвертом и пятом членах суммы ($\sum^{(II)}, \sum^{(III)}$) берутся по соседним граням a и b . Поэтому $\text{graph}(\Pi, a, b)$, $\text{graph}(\Pi, a, b)$ имеют топологию диска (рис. 10 (а) и (б)). В третьем члене грани a и b касаются друг друга через одну общую вершину (рис. 10 (а)). В четвертом члене грани a и b касаются друг друга через одно общее ребро (рис. 10 (б)). Члены вида $\propto B_{ik_1 k_2} B_j^{k_1 k_2}$ не появляются в (11) по той причине, что мы не рассматриваем графы с конфигурацией треугольников, показанной на рис. 7.

Рис. 8. Часть графа с топологией диска – исходный сферический граф без грани a .

Мы хотели бы выбрать такие матрицы I_{ijk} и κ^{ij} , чтобы выражение (11) имело предел при $M \rightarrow \infty$. Оказывается, что достичь этой цели – это то же самое, что сделать континуальное выражение (8) независимым от триангуляции [3]. Именно здесь необходимо вспомнить уравнение (5). Следует записать аналог этого уравнения для $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ таким образом, чтобы произведения $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ по различным триангуляциям графов с одной и той же топологией были бы равны друг другу. Аналогом уравнения (5) в этом случае является⁵⁾ I_{ijk} :

$$\sum_{j,k=1}^N I_{ij}^k I_{lk}^j = \kappa_{il}, \quad \sum_{n=1}^N I_{inl} I_{jk}^n = \sum_{n=1}^N I_{ijn} I_{kl}^n. \quad (12)$$

Графическое представление этих уравнений в терминах дуальных трехвалентных графов приведено на рис. 11 (в дальнейшем мы часто переходим от триангулирующих графов к дуальным трехвалентным графам, которые можно получить следующим образом: поместим вершины дуального графа в центрах граней (треугольников) исходного графа

⁵⁾Заметим, что здесь мы рассматриваем только циклически симметричные I_{ijk} . В этом случае произведения по графам определяются однозначно.

Рис. 9. Часть графа с цилиндрической топологией – исходный сферический граф без границ a и b .

Рис. 10. Две возможности того, как треугольники могут встречаться внутри триангулирующего графа.

и соединим вершины с помощью ребер дуального графа, пересекающих ребра исходного (см. рис. 12); таким образом, граф, дуальный к триангулирующему, является трехвалентным, т.е. в каждой его вершине сходятся по три ребра). Мы обсудим различные решения уравнения (12) в следующем разделе. В отличие от одномерного случая, где имеется по существу единственное решение уравнения (5), в данном случае получается целый зоопарк решений. Посмотрим теперь, как эти наблюдения влияют на определение экспоненты.

$$\begin{aligned}
 \sum_{jk} \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ k \end{array} &= \begin{array}{c} i \quad l \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \kappa \end{array} \\
 \sum_n \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ l \quad k \end{array} &= \sum_n \begin{array}{c} i \quad j \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ l \quad k \end{array}
 \end{aligned}$$

Рис. 11. Двумерные условия для независимости от триангуляции.

Рис. 12. Соотношение дуальности между графами. Дуальный граф показан здесь как ленточный.

Если условия (12) выполнены, можно отобразить произведение I по любому графу в произведение I по любому другому графу с той же топологией [3] (того же рода, с тем же числом дырок и распределением внешних ребер по дыркам). Это непосредственно следует из явных действий с дуальными графами. Например, любой граф с топологией диска и n внешними ребрами можно отобразить в граф, показанный на рис. 13. В то

же время, любой граф с кольцевой топологией, с m ребрами на одном краю и k ребрами на другом можно отобразить в граф, показанный на рис. 14. Выражения для двух подобных умножений матриц $\hat{I}$ не эквивалентны друг другу даже при $n = k + m$. Именно вследствие этого нам следует различать третий и четвертый члены в формуле (11) и фиксировать род g графов в последовательности для определения экспоненты.

Рис. 13. Топология диска.

Таким образом, если матрицы I_{ijk} и κ^{ij} подчиняются уравнению (12), то

$$\begin{aligned} \prod_{\text{graph}, 0}^M \left(\hat{I} + \frac{\hat{B}}{M} \right) &= N + B^{j_1 j_2 j_3} I_{j_3 j_2 j_1} + \\ &+ \frac{1}{M^2} [C_1(M) B^{j_1 j_2 j_3} B^{j_4 j_5 j_6} I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4} + C_2(M) B^{j_1 j_2 j_3} B^{j_4 j_5 j_6} I_{j_6 \dots j_1} + \\ &+ C_3(M) B^{j_1 j_2 k} B_k^{j_3 j_4} I_{j_4 \dots j_1}] + O\left(\frac{1}{M^3}\right), \end{aligned} \quad (13)$$

где та же буква I обозначает произведение трилинейной формы I_{ijk} по соответствующим графам. Матрица $I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4}$ строится по кольцевому графу, изображенному на рис. 15, где в каждой грани стоит матрица I_{ijk} . Как можно явно видеть из представления дуального графа, матрица $I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4}$ циклически симметрична по индексам j_1, j_2, j_3 и j_4, j_5, j_6 по отдельности, но в остальном положения индексов из этих двух групп можно переставлять в любом порядке (см. подпись к рис. 14). Это свойство отличается от свойства матрицы $I_{j_6 \dots j_1}$, задаваемой дисковым графом на рис. 16. Матрица $I_{j_6 \dots j_1}$ симметрична относительно циклической перестановки всех шести индексов $j_1, \dots, j_6$, но для общего выбора I_{ijk} другой симметрии нет. Это также верно и для матрицы $I_{j_4 \dots j_1}$, которая задается графом с топологией диска, но с четырьмя внешними ребрами: она симметрична относительно циклической перестановки всех четырех своих индексов.

Рис. 14. Кольцевая топология. Дуальный граф показан для удобства понимания симметрий соответствующих матриц: можно переставить положения, скажем, линий под номерами m и k с помощью второго соотношения, приведенного на рис. 11. Этот факт следует сравнить со свойством графа на рис. 13. В общем случае у нас нет средств для перестановки положений, скажем, n -й и 1-й внешних линий.

Рис. 15. Граф для $I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4}$. Дуальный граф показан для объяснения свойств симметрии соответствующих матриц.

Константы $C_1(M)$, $C_2(M)$ и $C_3(M)$ представляют собой число членов в соответствующих суммах в (11). Они вычислены в приложении, где также показано, что при условиях, приведенных после формулы (10), константы $C_2(M)$ и $C_3(M)$ пропорциональны M

 Рис. 16. Граф для $I_{j_6 j_5 j_4 j_3 j_2 j_1}$.

и не выживают в пределе $M \rightarrow \infty$, причем

$$\frac{C_1(M)}{M^2} \rightarrow \frac{1}{2!}, \quad \frac{C_2(M)}{M^2} \rightarrow 0, \quad \frac{C_3(M)}{M^2} \rightarrow 0.$$

Подобное стремление к нулю имеет место для высших членов по степеням $\hat{B}$ и высших родов (см. приложение). В результате получаем следующее выражение для экспоненты матрицы с тремя индексами:

$$\text{Tr}(E_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g, \quad (14)$$

где $I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g$ — матрица с $3F$ индексами, полученная перемножением I_{ijk} по *любому* ориентированному графу с g ручками, F дырками и тремя внешними ребрами для каждой дырки (рис. 17). В то же время, $I^g (F=0)$ есть просто число, полученное перемножением $\hat{I}$ по замкнутому графу рода g . Например, $I^0 = \sum_i \delta_i^i = N$ в силу первого соотношения в (12).

Аналогично можно получить определение экспоненты для открытого графа с любым числом внешних ребер:

$$(E_{g,I,\kappa}^{\hat{B}})_{m_1^{(1)} \dots m_{n_1}^{(1)} | \dots | m_1^{(L)} \dots m_{n_L}^{(L)}} = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} \times \\ \times I_{m_1^{(1)} \dots m_{n_1}^{(1)} | \dots | m_1^{(L)} \dots m_{n_L}^{(L)} | j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g, \quad (15)$$

Рис. 17. Триангулирующий граф, определяющий I^g .

где $I^g_{m_1^{(1)} \dots m_{n_1}^{(1)} | \dots | m_1^{(L)} \dots m_{n_L}^{(L)} | j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_3^{(F)} j_2^{(F)} j_1^{(F)}}$ – матрица с $3F + n_1 + \dots + n_L$ индексами, полученная перемножением $\hat{I}$ по *любому* ориентированному графу с g ручками, $L + F$ дырками, тремя внешними ребрами при F дырках и n_l внешними ребрами при l -й дырке ($l = 1, \dots, L$).

4. СВОЙСТВА УПОРЯДОЧЕНИЯ ПО ПОВЕРХНОСТИ И ДРУГИЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЭКСПОНЕНТЫ

Теперь посмотрим, какого вида упорядочение по поверхности получается при таком определении экспоненты. Упорядоченная по поверхности экспонента неабелева B -поля по диску D имеет вид

$$U_{j(s)}(D, \hat{B}) = (AE_{g,I,\kappa}^{\int_D \hat{B}_{\mu\nu} dx_\mu dx_\nu})_{j(s)} \equiv \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} I^g_{j(s) | j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)} | \dots | j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} \times \\ \times \iint_D B_{\mu_1 \nu_1}^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} dx_{\mu_1} dx_{\nu_1} \dots \iint_D B_{\mu_F \nu_F}^{j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}} dx_{\mu_F} dx_{\nu_F}, \quad (16)$$

где s – параметризация границы, а $j(s)$ – индексная функция на границе ∂D . Честно сказать, у нас нет уверенности в том, можно ли произведение матриц I , приводящее к $I^g_{j(s) | \dots}$ с непрерывным индексом, сделать полностью осмысленным в случае, когда j принимает дискретные значения. Этот вопрос требует отдельного тщательного изучения. Для наших рассуждений в данном разделе можно регуляризовать (16), для того чтобы превратить s в дискретный набор.

Во всяком случае, такое упорядочение по поверхности является достаточно тривиальным, поскольку нет необходимости ничего упорядочивать. В действительности из-за специальных свойств (упомянутых выше для случая $I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4}$) матрицы $I^g_{j(s) | j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)} | \dots | j_1^{(F)} j_2^{(F)} j_3^{(F)}}$ можно легко переставить порядок интегралов по B в выражении (16). В результате неабелево тензорное поле $\hat{B}$ оказывается просто набором N^3 абелевых полей B , пронумерованных тремя индексами i, j и k : можно

найти, что для каждой тройки i, j, k калибровочные преобразования⁶⁾ и напряженность поля такие же, как и для обыкновенного струнного два-тензорного B -поля. Действительно, с учетом поведения констант $C_2(M)$ и $C_3(M)$, все нетривиальные (контактные) члены в (13) обратились в нуль.

Однако это не означает, что мы получили тривиальное расслоение! На самом деле, если мы рассмотрим поверхность Σ с одной отмеченной точкой x и двумя внешними ребрами в этой точке, то соответствующая $U(\Sigma_x)_{ij}$ (или $U(\Sigma_x)_i^j = U(\Sigma_x)_{ik} \kappa^{kj}$) дает нетривиальное неабелево отображение. В этом состоит радикальное отличие от случая, когда обыкновенная калибровочная связность $\hat{A}_\mu$ принимает вид набора из N абелевых калибровочных полей. Нечего и говорить, что более сложные $U(\Sigma_x)_{ijm\dots}^{kl\dots}$ дают полностью нетривиальные нелинейные отображения.

Единственный способ определения более сложного упорядочения по поверхности состоит в определении экспоненты матрицы с тремя индексами другим способом (если это вообще возможно): так, чтобы такие члены, как C_2 и C_3 , оставались отличными от нуля в пределе $M \rightarrow \infty$. Например, можно отказаться от второго условия, приведенного после формулы (10), и принять, что графы ромбовидного типа (см. рис. 18) определяют искомую экспоненту. Тогда члены C_2 остаются отличными от нуля, и мы получим нетривиальную экспоненту (см. приложение)

$$\begin{aligned} \text{Tr}(E_{g,I,\kappa,K}^{\hat{B}}) = & I^g + B^{j_1 j_2 j_3} I_{j_3 j_2 j_1}^g + \frac{1}{2!} \left[\left(1 - \frac{1}{2(K+1)^2} \right) B^{j_1 j_2 j_3} B^{j_4 j_5 j_6} I_{j_3 j_2 j_1 | j_6 j_5 j_4}^g + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2(K+1)^2} B^{j_1 j_2 j_3} B^{j_4 j_5 j_6} I_{j_6 \dots j_1}^g \right] + O\left(\frac{1}{3!}\right), \quad K \in \mathbb{Z}_+. \end{aligned} \quad (17)$$

Однако подробное определение экспоненты представляется нам насилием над природой экспоненты. Мы предпочли бы более естественное определение нетривиальной экспоненты: напоминающее то, которое дано в предыдущем разделе.

На этой стадии можно предложить единственную иную возможность определения экспоненты, мотивированную формулой (10). Мы можем поставить в грани графов в (10) матрицу I_{ijk} , а не $I_{ijk} + B_{ijk}/M$, но склеить их с помощью $\kappa^{ij} + B^{ij}/L$, а не с помощью κ^{ij} , т.е.

$$\text{Tr}(\tilde{E}_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) \equiv \lim_{L \rightarrow \infty} \prod_{\text{graph}(g)}^L \left(\hat{\kappa} + \frac{\hat{B}}{L} \right), \quad (18)$$

где $\text{graph}(g)$ является триангулирующим графом рода g с L ребрами; матрица B в этом случае, очевидно, имеет два индекса, а не три. В свете приведенного выше обсуждения это определение приводит к не зависящему от триангуляции упорядочению по поверхности. Результат для экспоненты имеет вид

$$\text{Tr}(\tilde{E}_{g,I,\kappa}^{\hat{B}}) = \sum_{F=0}^{\infty} \frac{1}{F!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)}} \dots B^{j_1^{(F)} j_2^{(F)}} I_{j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g, \quad (19)$$

⁶⁾ Обсуждению калибровочных преобразований для таких объектов, как (16), будет посвящена отдельная публикация.

где $I_{j_2^{(1)} j_1^{(1)} | \dots | j_2^{(F)} j_1^{(F)}}^g$ — матрица с $2F$ индексами, полученная перемножением I_{ijk} по *любой* ориентированному графу с g ручками, F дырками и двумя внешними линиями у каждой дырки.

Однако мы думаем (но не можем доказать), что это новое определение экспоненты связано с выражением (10) калибровочным преобразованием:

$$g^3 \left(\hat{I}' + \frac{\hat{B}'}{M} \right) = \hat{I} \quad \text{и} \quad \hat{\kappa}' g^{-2} = \hat{\kappa} + \frac{\hat{B}}{M}, \quad (20)$$

где κ' и I' подчиняются также уравнению (12), а $\hat{B}'$ имеет три индекса. Обсуждению таких калибровочных преобразований будет посвящена отдельная публикация.

5. ЯВНЫЕ ПРИМЕРЫ МАТРИЦ $\hat{I}$ И $\hat{\kappa}$

Обсудим некоторые явные решения уравнения (12). Например, простейший способ задания матриц $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ состоит в том, чтобы положить $I_{ijk} = \delta_{ijk}$, $\kappa^{ij} = \delta^{ij}$, где δ_{ijk} — кубичная матрица, единственные ненулевые элементы которой — единицы, стоящие на главной диагонали куба. При таком выборе $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ получаем

$$I_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}}^g = \delta_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}},$$

где $\delta_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}}$ есть n -мерная кубичная матрица ($n = n_1 + \dots + n_L$), единственные ненулевые элементы которой — единицы, стоящие на главной диагонали. Действительно, если, скажем, любые два из индексов j в $I_{j_1^{(1)} \dots j_{n_1}^{(1)} \dots j_1^{(L)} \dots j_{n_L}^{(L)}}^g$ не равны друг другу, то на одной из граней внутри графа, определяющего эту матрицу, имеются два несовпадающих индекса. Это означает, что соответствующий элемент δ_{ijk} , сидящий в этой грани, обращается в нуль, а потому и I^g обращается в нуль. Тогда для того чтобы I^g не равнялась нулю, все ее индексы j должны быть равны друг другу.

В результате при таком выборе I_{ijk} и κ_{ij} определение экспоненты выглядит следующим образом:

$$\text{Tr}(E_{\delta_{(3)}, \delta_{(2)}}^{\hat{B}}) = \sum_{L=0}^{\infty} \frac{1}{L!} \sum_j (B^{jjj})^L = \sum_j e^{B^{jjj}}, \quad (21)$$

т.е. не зависит от рода g . Такая экспонента является тривиальной, потому что она зависит только от диагональных элементов матрицы $\hat{B}$.

Другой простой способ задания матриц состоит в том, чтобы положить $\kappa^{ij} = \delta^{ij}$ и взять I_{ijk} в виде диагональной кубичной матрицы с $+1$ или -1 в каждой позиции на диагонали, причем допустимы все возможные распределения ± 1 . Тогда мы также получаем тривиальную экспоненту, зависящую только от диагональных элементов B (с чередующимися знаками). Более того, если взять диагональные матрицы I_{ijk} и κ^{ij} , то легко видеть, что все соответствующие матрицы $\hat{I}^g$ (для любых графов и любых комбинаций внешних концов) диагональны, а потому соответствующая экспонента зависит только от диагональных элементов $\hat{B}$. Наконец, если матрица I_{ijk} симметрична относительно любой перестановки своих индексов, то все $\hat{I}^g$ для любых графов и любых

внешних концов также симметричны относительно любой перестановки своих внешних индексов и не зависят от g .

Чтобы получить менее тривиальные экспоненты, следует вспомнить, что условия (12) связаны с правилами слияния [3], [4]: рассмотрим группу, *все* элементы которой суть φ_i , $i = \overline{1, N}$ (для неконечных групп i принимает непрерывные значения). Рассмотрим произведение в этой групповой алгебре,

$$\varphi_i \circ \varphi_j = \sum_k I_{ij}^k \varphi_k, \quad (22)$$

где матрица I_{ij}^k состоит из N^2 ненулевых элементов, распределенных по кубичной матрице, причем все остальные элементы равны нулю. Выберем $\kappa_{ij} = I_{il}^k I_{kj}^l$ в качестве метрики на этой групповой алгебре. Тогда матрица $I_{ijk} = I_{ij}^l \kappa_{lk}$ всегда является циклически симметричной. Условие ассоциативности для произведения (22) есть просто второе условие в (12). Это дает рецепт построения возможных явных пар I_{ijk} , κ^{ij} .

В качестве нетривиального, но симметричного по всем трем индексам примера можно рассмотреть абелеву группу Z_N . Тогда I_{ij}^k имеет ненулевые элементы, только если $k = i + j \pmod{N}$. Чтобы получить $\kappa_{ij} = \delta_{ij}$, следует взять эти ненулевые элементы равными $1/\sqrt{N}$. Видно, что I_{ijk} симметрична относительно любой перестановки своих индексов. Например, явная формула для $\hat{I}$ в случае $N = 2$ имеет следующий вид ($i = 0, 1$ и $\varphi_0 = 1$):

$$\begin{aligned} I_{000} = I_{110} = I_{101} = I_{011} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ I_{111} = I_{001} = I_{010} = I_{100} &= 0. \end{aligned} \quad (23)$$

При таком выборе $\hat{I}$ и $\hat{\kappa}$ экспонента (14) зависит от недиагональных значений матрицы $\hat{B}$. При этом, однако, она зависит только от симметричной части матрицы $\hat{B}$.

Чтобы получить несимметричные $\hat{I}$ с конечным числом индексов, можно рассмотреть любую конечную неабелеву группу, скажем, S_n – группу перестановок n элементов ($n! = N$). Коль скоро ясна идея нахождения $\hat{I}$ и κ , легко получить явные значения I_{ijk} и κ_{ij} для S_n или любой другой группы, несущественные, однако, для рассмотрения в данной статье. Вычисление явных значений матриц $\hat{I}^g$ с различными распределениями индексов является технически несколько более сложным упражнением, но алгоритм очевиден, и компьютер легко справится с этой задачей. Заметим, что эти матрицы связаны с двумерными топологическими инвариантами [3].

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ И НАПРАВЛЕНИЯ БУДУЩИХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Мы получили явное определение упорядочения по поверхности, которое дает нетривиальные расслоения на пространстве петель. Как легко видеть, при $N = 1$ эта конструкция редуцируется к обыкновенному струнному два-тензорному B -полю. Интересно увидеть, как неабелевы B -поля редуцируются к обыкновенным неабелевым калибровочным связностям, когда поверхность Σ с цилиндрической топологией (и одним внешним индексом на каждом краю цилиндра) вырождается в кривую γ . Обсуждению этого случая будет посвящена отдельная публикация.

Наше рассмотрение можно легко обобщить на высшие размерности. При этом треугольники заменяются на симплексы высших размерностей. Тогда соответствующие тензорные поля должны нести четыре, пять и т. д. индексов. Мы должны как-то экспоненцировать такие тензорные поля. Определения соответствующих экспонент используют многоиндексные обобщения матриц $\hat{I}$. Условия (12) также заменяются на условия, следующие из многомерных движений Матвеева или Александра (см., например, [5]).

Интересно также было бы рассмотреть, как наши рассмотрения связаны с ренормализационной группой в КТП [6].

И, наконец, последнее по порядку, но не по значимости. По всей видимости, наиболее важное свойство обычной экспоненты состоит в том, что она является решением простого дифференциального уравнения. В этом контексте естественно спросить, решением какого дифференциального уравнения является экспонента, определенная в данной статье? Этот вопрос естественным образом связан с гамильтоновой динамикой струноподобных объектов. Действительно, рассмотрим квантово-механическую амплитуду $\langle x | e^{-T H} | y \rangle$. Она является решением очевидного дифференциального уравнения, описывающего квантовую гамильтонову эволюцию системы. Амплитуду можно рассмотреть как голономию для связности, заданную гамильтонианом H . Мы имеем в виду связность на расслоении, базой которого является мировая линия (пространство переменной T), а не объемлющее пространство. Слой является гильбертовым пространством рассматриваемой квантово-механической системы. С этой точки зрения x и y играют роль индексов.

Подобным образом можно представить трехточечную струнную амплитуду в виде

$$E_{0, \hat{f}, \hat{\kappa}}^{-} \int_{\Sigma} \mathcal{H}^{d\sigma d\tau} |x\rangle |y\rangle |z\rangle,$$

где теперь $\mathcal{H}$ – два-тензорный гамильтониан с тремя цветовыми индексами (x , y и z), который будет рассмотрен в отдельной публикации (в духе работ [7], [8]). При этом базой расслоения является мировой лист (пространство переменных σ и τ), а не объемлющее пространство. Слой также является гильбертовым пространством. Интересно было бы узнать, какому дифференциальному (вариационному) уравнению удовлетворяет такая амплитуда. Это уравнение определит “двухвременную” гамильтонову эволюцию.

Почему такой подход лучше, чем другие, хорошо обоснованные? Мы надеемся, что наш подход позволит исследовать струнную теорию поля непосредственно в терминах “ Φ^3 ”-действия, а не в терминах пертурбативного разложения вокруг “ $\Phi Q \Phi$ ”. Если такой подход будет успешным, то окажется возможным обобщить его на случай высших “бранных теорий поля”, что приведет к не зависящему от фона описанию теорий: различные поля B ($\mathcal{H}$) будут приводить к различным выборам фона. Поля B , в свою очередь, будут решениями уравнений движения в теории неабелевых тензоров.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим константы $C_1(M)$, $C_2(M)$ и $C_3(M)$. Сумма этих констант, очевидно, определяется выбором двух граней из M ,

$$C_1(M) + C_2(M) + C_3(M) = C_M^2,$$

где $C_M^2 = M(M-1)/2$ – биномиальный коэффициент. В то же время $C_3(M)$ равняется числу ребер в графе (числу пар соседних граней в графе):

$$C_3(M) = \frac{3}{2}C_M^1 = \frac{3}{2}M.$$

Коэффициент $3/2$ возникает по следующей причине. Для триангулирующих графов имеет место соотношение $2 \times (\text{число ребер}) = 3 \times (\text{число граней})$. Таким образом, в пределе $M \rightarrow \infty$ получаем, что

$$\frac{C_3(M)}{M^2} \rightarrow 0.$$

В результате слагаемое, пропорциональное $1/M^2$, в формуле (13) в пределе равно нулю.

Чтобы найти $C_2(M)$, в каждой вершине следует вычислить число способов, которыми два треугольника могут встретиться таким образом, как показано на рис. 10(а), и далее просуммировать по всем вершинам. Число пар треугольников в каждой вершине есть $C_{n_v}^2$, где n_v – полное число треугольников, встречающихся в v -й вершине. Отсюда необходимо вычесть число способов, которыми треугольники могут встретиться так, как показано на рис. 10(б). Это число l_v есть число ребер, встречающихся в v -й вершине. При суммировании по вершинам мы учитываем каждое ребро дважды. В результате имеем

$$C_2(M) = \sum_{v=1}^V \left(C_{n_v}^2 - \frac{l_v}{2} \right),$$

где $V = M/2 - 2 + 2g$ – полное число вершин в графе. Заметим, что в замкнутом графе $n_v = l_v$ для любого v . Более того, $\sum_v l_v = 2L$, где $L = 3M/2$ – полное число ребер в графе. Поэтому

$$C_2(M) = \sum_{v=1}^V \frac{n_v^2}{2} - 2L.$$

К сожалению, мы не можем выразить это значение через число граней M и род g графа. Однако можно выполнить явное вычисление для регулярных графов, двойственных к триангулирующим графам. Например, для графов типа футбольного мяча (12 пятиугольников, или 8 квадратов, или 4 треугольника, симметрично растворенных в гексагональной решетке) имеем

$$C_2(M) = 12 \frac{5^2}{2} + \left(\frac{M}{2} - 2 - 12 \right) \frac{6^2}{2} - 3M$$

для случая “12 пятиугольников”. Отсюда

$$\frac{C_2(M)}{M^2} \rightarrow 0$$

при $M \rightarrow \infty$. В более общем случае, если числа n_v ограничены сверху неким $n_{\max}$ при $M \rightarrow \infty$, то $C_2(M) < n_{\max}^2 M/4$ при $M \rightarrow \infty$, а потому $C_2(M)/M^2 \rightarrow 0$.

Рис. 18. Графы ромбовидного типа. На рисунке имеются K слоев последовательностей прямоугольников, построенных из пар треугольников.

Пусть n_v не ограничено сверху. Рассмотрим графы ромбовидного типа (как на рис. 18(a)). Тогда предел $M \rightarrow \infty$ берется путем симметричного увеличения числа треугольников, встречающихся в нижней и верхней вершинах.

Для таких графов

$$C_2(M) = 2 \frac{(M/2)^2}{2} + M \frac{4^2}{2} - 3M,$$

и поэтому $C_2(M)/M^2 \rightarrow 1/4$ в пределе $M \rightarrow \infty$, а член C_2 в пределе отличен от нуля. Эти рассуждения означают, что предел (10) зависит от выбора последовательности графов.

Однако если мы рассмотрим графы типа приведенных на рис. 18 с фиксированным K , то получим, что

$$C_2(M) = \frac{2}{2} \left(\frac{M}{2(K+1)} \right)^2 + \frac{M}{K+1} \frac{5^2}{2} + \left(\frac{M}{2} - 2 - \frac{M}{K+1} \right) \frac{6^2}{2} - 3M.$$

Поэтому если $M \rightarrow \infty$, а K фиксировано, то

$$\frac{C_2(M)}{M^2} \rightarrow \frac{1}{4(K+1)^2},$$

и член C_2 снова в пределе отличен от нуля. Заметим, однако, что для фиксированного K число треугольников, встречающихся в полюсах ромба 18 (б), имеет порядок M .

Если мы теперь возьмем предел $K \rightarrow \infty$, то $C_2(M)/M^2 \rightarrow 0$, и число треугольников, встречающихся в полюсах ромба много меньше M . Поэтому во избежание сложностей, связанных с зависимостью предела $M \rightarrow \infty$ от выбора графов в формуле (10), мы

должны взять такие графы, в которых число треугольников, встречающихся в каждой вершине, много меньше M . Тогда $C_2(M)$ равно нулю в пределе $M \rightarrow \infty$, и формула (10) не будет зависеть от выбора графов в последовательности. При этом $C_1(M)/M^2 \rightarrow C_M^2/M^2 \rightarrow 1/2!$.

Представленные здесь аргументы верны для графов любого рода, т.е. члены C_2 и C_3 обращаются в нуль для любого рода. Аналогичное, но несколько более сложное вычисление мы провели для членов $\widehat{B}^3$. Оказывается, что единственный отличный в пределе от нуля член (если $n_{\max}(M)/M \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$) есть

$$\frac{1}{3!} B^{j_1^{(1)} j_2^{(1)} j_3^{(1)}} B^{j_1^{(2)} j_2^{(2)} j_3^{(2)}} B^{j_1^{(3)} j_2^{(3)} j_3^{(3)}} I_{j_3^{(1)} j_2^{(1)} j_1^{(1)} | j_3^{(2)} j_2^{(2)} j_1^{(2)} | j_3^{(3)} j_2^{(3)} j_1^{(3)}}^g.$$

Мы ожидаем аналогичного развития событий для высших порядков по степеням $\widehat{B}$. Действительно, рассмотрим F матриц $\widehat{B}$, распределенных по графу с M гранями. Тогда на общих основаниях можно ожидать, что если $M \rightarrow \infty$, то число конфигураций, где $\widehat{B}$ встречаются друг друга (при условиях, выписанных ниже формулы (10)), много меньше, чем число тех конфигураций, где $\widehat{B}$ разделены. В результате получаем формулу (14).

Благодарности. Автор хотел бы отметить ценные обсуждения с А. Морозовым, А. Забродным, М. Зубковым, Ф. Губаревым, Т. Пиллингом, А. Скиржевски, Н. Амбургом, Д. Васильевым, А. Лосевым, А. Рослым, Л. Андерсеном, Г. Николаи, С. Тайсеном и особенно с И. Рункелем и Г. Шарыгиным. Автор хотел бы также поблагодарить В. Долотина и А. Герасимову за очень интенсивные, глубокие и полезные обсуждения и Г. Николаи и С. Тайсена за гостеприимство в Институте Макса Планка, Гольм, Германия, где эта работа была закончена. Данная работа частично поддержана РФФИ (грант № 04-02-16880), INTAS (грант № 03-51-5460) и грантом Президента Российской Федерации МК-2097.2004.2.

Список литературы

- [1] Yu. Chernyakov, V. Dolotin. Operations and identities in tensor algebra. math.ra/0501206.
- [2] V. Dolotin. Groups of flagged homotopies and higher Gauge theory. math.gt/9904026.
- [3] M. Fukuma, S. Hosono, H. Kawai. Commun. Math. Phys. 1994. V. 161. P. 157.
- [4] E. Verlinde. Nucl. Phys. B. 1988. V. 300. P. 360.
- [5] V. G. Turaev, O. Y. Viro. Topology. 1992. V. 31. P. 865.
- [6] A. Gerasimov, A. Morozov, K. Selivanov. Int. J. Mod. Phys. A. 2001. V. 16. P. 1531; hep-th/0005053.
- [7] E. T. Akhmedov. Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. С. 247; hep-th/0407018.
- [8] E. T. Akhmedov. Simplicial vs. continuum string theory and loop equations. hep-th/0502174.

Поступила в редакцию 30.III.2005 г.