Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Карасев, Поляризационная томография квантового излучения: теоретические аспекты. Операторный подход, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 344–357

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1904>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:40:30

ПОЛЯРИЗАЦИОННАЯ ТОМОГРАФИЯ КВАНТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ: ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ. ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД

Даны теоретические основы квантовой томографии поляризационных состояний световых полей как метода измерения их поляризационного оператора плотности $\hat{R}$, характеризующего только поляризационные степени свободы излучения. Главное внимание уделяется методу, где томографические наблюдаемые (“измерители” $\hat{R}$) имеют собственно поляризационную природу. Показано, что его квантовая сущность адекватно выражается с помощью квазиспектральных томографических разложений $\hat{R}$ по специальным операторным базисам – конечным суммам частично-ортогональных проекторов, определяющих вероятностные распределения томографических наблюдаемых как коэффициентов разложения. Получены матричные версии таких “томографических” представлений $\hat{R}$, в частности путем их проектирования на квазиклассические операторные базисы, определяющие поляризационные функции квазивероятностей. Кратко обсуждаются информационные аспекты представленных схем.

Ключевые слова: квантовая томография, поляризационный оператор плотности излучения, измерение, томографические наблюдаемые, квазиспектральные разложения операторов, частично-ортогональные проекторы, вероятностные распределения, функции квазивероятностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние два десятилетия большое внимание уделяется квантовой томографии состояний световых полей – методам реконструкции оператора плотности $\hat{\rho}$ излучения по экспериментально зарегистрированным вероятностным распределениям “томографических наблюдаемых” (ТН) [1]–[9]. Это обусловлено как повышенным интересом к фундаментальной (восходящей к фон Нейману [10] и существенно разработанной Холво [11]) физической проблеме – измеримости квантовых состояний, так и интенсивной разработкой прикладных аспектов квантовой информатики, где измерение состояний играет одну из ключевых ролей [12]–[17].

Первоначально метод квантовой томографии был разработан и экспериментально реализован для одномодового излучения [1]–[3]. В его основе лежит представление

$$W_{\rho}(\alpha) = \int_0^{\pi} \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx p_{\rho}(x, \phi) K_W(x, \phi; \alpha), \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx p_{\rho}(x, \phi) = 1, \quad (1)$$

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: vkaras@sci.lebedev.ru

функции квазивероятностей (ФКВ) Вигнера $W_\rho(\alpha)$, задающей квазиклассическое описание оператора плотности $\hat{\rho}$ поля [18], [19], через получаемые в гомодинных измерениях [3] распределения вероятностей

$$p_\rho(x, \phi) \equiv \text{Tr} [\hat{\Pi}_x(\phi) \hat{\rho}] = \langle x_\phi | \hat{\rho} | x_\phi \rangle$$

“повернутых” полевых квадратур

$$\hat{X}_\phi \equiv \frac{1}{2} [\hat{a}^\dagger e^{i\phi} + \hat{a} e^{-i\phi}] = \int_{-\infty}^{\infty} x \hat{\Pi}_x(\phi) dx$$

в качестве ТН. При этом коэффициенты $K_W(x, \phi; \alpha)$ были получены как ядра обратного преобразования Радона для ФКВ $W_\rho(\alpha)$ [1], [2], [8], что и дало (маскирующее его квантово-статистическую суть) название самому методу.

Затем томографическая схема (1) была обобщена в разных направлениях [5]–[8]. Среди них необходимо отметить получение ее операторной формы – разложения [8]

$$\hat{\rho} = \int_0^\pi \frac{d\phi}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx p_\rho(x, \phi) \hat{K}(x; \phi), \quad \hat{K}(x; \phi) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P} \frac{1}{(x' - x)^2} \hat{\Pi}_{x'}(\phi) dx', \quad (2)$$

оператора $\hat{\rho}$ по сверхполному (за счет наличия “классического” параметра ϕ) базису сингулярных “томографических ядер” $\hat{K}(x; \phi)$. Исходная версия (1) получается из (2) путем проектирования $\hat{\rho} \rightarrow W_\rho(\alpha) \equiv \text{Tr} [\hat{\rho} \hat{W}(\alpha)]$ на квазиклассический базис операторов Вигнера [18]

$$\hat{W}(\alpha) = \pi^{-1} \int_{C^1} d^2\beta e^{\beta^* \alpha - \beta \alpha^*} \hat{D}(\beta), \quad \hat{D}(\beta) = e^{\beta \hat{a}^\dagger - \beta^* \hat{a}} = e^{2i|\beta| \hat{X}_\phi - \pi/2}, \quad \beta = |\beta| e^{i\phi},$$

нумеруемых координатами α фазового пространства C^1 .

Формула (2) наиболее адекватно выражает квантовую сущность метода как специфического (косвенного) измерения состояния $\hat{\rho}$ ввиду очевидного сходства (2) и спектрального разложения фон Неймана [10] для самосопряженных операторов, отвечающих наблюдаемым (см., например, выражение для $\hat{X}_\phi$). Главное различие этих двух разложений обусловлено особой ролью оператора $\hat{\rho}$ (как носителя полной квантовой информации [11]) и заключается в использовании в формуле (2) двух сверхполных дуальных базисных систем: задающих “разложение единицы” проекторов $\hat{\Pi}_x(\phi)$ и “томографических ядер” $\hat{K}(x; \phi)$, как это имеет место при введении Q - и P -представлений в квантовой оптике – фактических прототипов квантовой томографии [7]. Принимая также во внимание вероятностную природу используемых экспериментальных данных и отсутствие каких-либо априорных сведений о квантовом состоянии объекта (кроме фиксации определяющего гильбертова пространства), метод квантовой томографии излучения можно отнести в рамках современной статистической теории квантового измерения [11] к классу непараметрических (в отличие от используемых, например, в работах [7], [20]) процедур квантово-статистической оценки состояния квантового объекта при отсутствии априорной информации. Существенной чертой, отличающей его от других

квантово-статистических процедур и обеспечивающей высокую практическую эффективность в указанных условиях (см. по этому поводу, например, [20]), является использование семейства однотипных (унитарно-эквивалентных) “измерителей”, нумеруемых классическим (!) параметром.

Впоследствии соотношение (2) послужило основой для распространения обсуждаемого метода на другие квантовые системы [9], [21]. Так, в квантовой оптике для анализа многомодовых полей была разработана многомодовая версия [4] гомодинной полевой томографии. Однако во многих случаях, кроме полного описания состояний поля с помощью $\hat{\rho}$, представляют интерес его частичная характеристика (редуцированное состояние) в терминах некоторых коллективных переменных и соответствующая частичная томография [9], [22]–[24]. Очевидный пример такой редукции дает поляризационный анализ излучения в терминах компонент P -квасиспина $\hat{\mathbf{P}} \equiv (\hat{P}_1, \hat{P}_2, \hat{P}_3)$ – коллективных наблюдаемых, ассоциированных с (описывающими поляризацию света в классической оптике) векторными параметрами Стокса [22], [25]. Отметим, что анализ поляризационных состояний света играет важную роль в обсуждении фундаментальных проблем квантовой теории, начиная с известной работы Эйнштейна–Подольского–Розена [26] и по настоящее время (см., например, [12]–[15] и приведенную в них литературу), а поляризационные ФКВ оказались эффективным средством изучения неклассических состояний и явлений поляризационной оптики [27]. Поэтому актуальна задача построения адекватного теоретического аппарата квантовой томографии поляризационного состояния световых полей.

Эту задачу можно решать на основе многомодового обобщения [4] одномодовой полевой томографии путем выделения поляризационных и неполяризационных переменных и редукции последних [22], [23]. Такой способ страдает информативной избыточностью, а также сложностью вычислений и экспериментальной реализации (многомодовое гомодинирование). Эти недостатки устраняются в альтернативном подходе [22], который можно назвать собственно методом поляризационной томографии излучения (ПТИ). В его рамках осуществляется реконструкция **поляризационного оператора плотности** (ПОП) $\hat{R}$, характеризующего только поляризационные степени свободы световых полей, на основе данных измерений ТН, имеющих собственно поляризационную природу. “Каноническая” версия метода ПТИ была сформулирована в работах [9], [22] и экспериментально реализована в работе [24]. В качестве таких ТН использовались прямые аналоги $\hat{X}_\phi$ – P -квасиспиновые наблюдаемые

$$\hat{S}(\theta, \phi) = 2\hat{T}(\mathbf{n})\hat{P}_3\hat{T}^\dagger(\mathbf{n}) = 2\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{P}} \equiv 2(\hat{P}_1 \sin \theta \cos \phi + \hat{P}_2 \sin \theta \sin \phi + \hat{P}_3 \cos \theta), \quad (3)$$

где вектор $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$ определяет положение $\langle \hat{\mathbf{P}} \rangle$ на сфере Пуанкаре $S_{\hat{\mathbf{P}}}^2 \equiv \{ \langle \hat{\mathbf{P}} \rangle : \sum_{i=1,2,3} \langle \hat{P}_i^2 \rangle = \text{const} \}$, а оператор

$$\hat{T}(\mathbf{n}) \equiv \exp \left(-\frac{\theta}{2} e^{-i\phi} \hat{P}_+ + \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \hat{P}_- \right) = \exp [-i\theta (-\hat{P}_1 \sin \phi + \hat{P}_2 \cos \phi)]$$

описывает вращения на этой сфере.

Однако главное внимание в указанных работах уделялось операциональным аспектам, тогда как теоретический анализ не был достаточно полон (и ограничивался только канонической версией метода ПТИ). В данной работе, восполняющей этот пробел, анализируются общие структурные свойства поляризационной томографии, выводятся аналоги соотношений (1), (2) в “канонической” и неканонической версиях метода ПТИ и кратко обсуждается их теоретико-информационный смысл.

2. ПОП ИЗЛУЧЕНИЯ: ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ГРУППОВОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

2.1. Определение ПОП. Исходный пункт в разработке теоретических схем поляризационной томографии – определение ПОП $\hat{R}$ квантового излучения – осуществляется в рамках формализма P -квазиспина, чьи компоненты $\hat{P}_{i=1,2,3}$ суть генераторы группы $SU(2)_P = \{\hat{U}(\omega, \mathbf{n}) = \exp(-i\omega \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{P}})\}$ поляризационной динамической симметрии световых полей. Этот формализм дает адекватное описание поляризации квантового излучения, поскольку обычный спин теряет свое физическое значение для безмассовых полей, а операторные аналоги $\hat{\Sigma}_i$ векторных параметров Стокса определены корректно лишь для плосковолнового излучения [9], [22], [25].

В рамках P -квазиспинового формализма многообразие поляризационных квантовых состояний излучения описывается с помощью базиса $\{|P; \mu\rangle\}$ собственных состояний операторов $\hat{\mathbf{P}}^2 = \hat{P}_1^2 + \hat{P}_2^2 + \hat{P}_3^2$ и $\hat{P}_3$:

$$\hat{\mathbf{P}}^2 |P; \mu\rangle = P(P+1) |P; \mu\rangle, \quad \hat{P}_3 |P; \mu\rangle = \mu |P; \mu\rangle, \quad 2P = 0, 1, \dots, \infty, \quad |\mu| \leq P. \quad (4)$$

В случае монохроматического плосковолнового излучения, когда имеются только две поляризационные моды с одинаковыми волновыми векторами $\mathbf{k}$, операторы $\hat{P}_i$ пропорциональны операторам Стокса $\hat{\Sigma}_i$ (а $2\hat{P}_3$ совпадает с оператором спиральности) и определяются через разности операторов $\hat{n}_\alpha = \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha$ чисел фотонов в стандартных парах (двух линейных и циркулярной) ортогональных поляризационных мод:

$$2\hat{P}_1 \equiv \hat{n}_x - \hat{n}_y = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+, \quad 2\hat{P}_2 \equiv \hat{n}_{x'} - \hat{n}_{y'} = i(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_-), \quad 2\hat{P}_3 \equiv \hat{n}_+ - \hat{n}_-. \quad (5)$$

Задание базиса $\{|P; \mu\rangle\}$ в гильбертовом пространстве $L_F(1) = \text{Span}\{|n_+, n_-\rangle\}$ поля излучения сводится к перенумерации фоковских состояний с круговой поляризацией:

$$|P; \mu\rangle \equiv |n_+ = P + \mu, n_- = P - \mu\rangle = \frac{(\hat{a}_+^\dagger)^{P+\mu} (\hat{a}_-^\dagger)^{P-\mu}}{[(P+\mu)! (P-\mu)!]^{1/2}} |0\rangle, \quad \hat{a}_\pm |0\rangle = 0, \quad (6)$$

что соответствует разложению

$$L_F(1) = \sum_{2P=0}^{\infty} L(P), \quad L(P) = \text{Span}\{|P; \mu\rangle : P = \text{const}\} \quad (7)$$

пространства $L_F(1)$ на $SU(2)_P$ -неприводимые подпространства – “поляризационные долины” $L(P)$ [9], [25]. При этом справедливо соотношение

$$\hat{\mathbf{P}}^2 = \hat{P}^2 + \hat{P} = \frac{\hat{N}^2}{4} + \frac{\hat{N}}{2} \iff \hat{P} = \frac{\hat{N}}{2} \quad (8)$$

между операторами P -квазиспина $\hat{P}$ и полного числа фотонов $\hat{N} = \hat{n}_+ + \hat{n}_-$.

Задание поляризационного базиса (4) позволяет ввести ПОП [22]

$$\hat{R} = \sum_{P, \mu, \mu'} R_{\mu', \mu}^P \hat{\Pi}_{\mu', \mu}^P, \quad R_{\mu', \mu}^P \equiv \langle P; \mu | \hat{\rho} | P; \mu' \rangle, \quad \hat{\Pi}_{\mu', \mu}^P \equiv |P; \mu' \rangle \langle P; \mu|, \quad (9)$$

как редукцию полного оператора плотности излучения $\hat{\rho} : R_{\mu', \mu}^P = \delta_{P, P'} \langle P; \mu | \hat{\rho} | P'; \mu' \rangle$. Очевидно, что ПОП $\hat{R}$ факторизуется (т.е. описывает “чистое” поляризационное состояние) только (!) в случае, когда $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, $|\Psi\rangle \in L(P)$, тогда как для лазерного излучения, описываемого когерентными состояниями $|\{\alpha_{\pm}\}\rangle = \hat{D}(\alpha_+) \hat{D}(\alpha_-) |0\rangle \in L_F(1)$, он соответствует “смешанному” поляризационному состоянию.

Введение ПОП $\hat{R}$ мотивировано тем, что для всякой поляризационной переменной ее оператор $\hat{A}(\hat{a}_{\pm}^{\dagger}, \hat{a}_{\pm})$ зависит только от билинейных комбинаций полевых операторов $\hat{a}_{\alpha}$ и $\hat{a}_{\alpha}^{\dagger}$ вида (5): $\hat{A} = \hat{A}(\hat{\mathbf{P}})$. Тогда ее матричные элементы в базисе $\{|P, \mu\rangle\}$ имеют блочно-диагональную форму: $\langle P', \mu' | \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) | P, \mu \rangle = \delta_{P', P} A_{\mu', \mu}^P$, а квантовое среднее

$$\langle \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) \rangle \equiv \text{Tr}[\hat{\rho} \hat{A}(\hat{\mathbf{P}})] = \sum_{2P=0}^{\infty} \sum_{\mu=-P}^P \sum_{\mu'=-P}^P A_{\mu', \mu}^P R_{\mu', \mu}^P \equiv \text{Tr}[\hat{R} \hat{A}(\hat{\mathbf{P}})] \quad (10)$$

выражается только через матричные элементы $R_{\mu', \mu}^P$ ПОП $\hat{R}$, а не полного полевого оператора $\hat{\rho}$. Выражение (10) аналогично формуле усреднения для спиновых систем [28], но в отличие от последней в общем случае оно содержит (в силу (7)) бесконечные суммы по квазиспину P (что часто необоснованно игнорируется).

Данное выше описание легко обобщается на случай произвольного числа m пространственно-временных (с разными $\mathbf{k}_j$) мод. При этом возможны две схемы определения полного ПОП $\hat{R}$, отвечающие случаям независимых и связанных $\mathbf{k}$ -мод. В первой из них полный ПОП $\hat{R} = \prod_{j=1}^{m \otimes} \hat{R}(\mathbf{k}_j)$ задается тензорным произведением “парциальных” ПОП $\hat{R}(\mathbf{k}_j)$ из формулы (9). Вторая схема, адекватная для описания коллективных явлений, определяется заданием полных P -квазиспиновых величин $\hat{P}_i = \sum_j \hat{P}_i(\mathbf{k}_j)$ путем суммирования “парциальных” компонент $\hat{P}_i(\mathbf{k}_j)$ из формулы (5) [22]. При этом соотношение (8) нарушается, P -квазиспин $\hat{P}$ становится самостоятельной наблюдаемой, а разложение (7) для $L_F(m) = \text{Span}\{|n_+(\mathbf{k}_j), n_-(\mathbf{k}_j)\rangle\}$ модифицируется путем замены $L(P) \longrightarrow L(P; \lambda) = \text{Span}\{|P; \mu; \lambda\rangle\}$, где определяемые соотношениями (4) векторы $|P; \mu; \lambda\rangle$ строятся путем связывания парциальных векторов из (6) с помощью обобщенных коэффициентов Клебша–Гордана группы $SU(2)$ и содержат дополнительные квантовые числа λ , задаваемые схемой связи $\mathbf{k}$ -мод [25]. В то же время сохраняется соотношение (10), хотя теперь $R_{\mu', \mu}^P = \sum_{\lambda} \langle P; \mu; \lambda | \hat{\rho} | P; \mu'; \lambda \rangle$ (в силу диагональности

$\langle P'; \mu'; \lambda' | \hat{A}(\hat{\mathbf{P}}) | P; \mu; \lambda \rangle$ по λ), а ПОП $\hat{R}$ в формуле (9) и след в последнем равенстве (10) задаются не в полном полеом пространстве $L_F(m)$, а в его факторпространстве $L_P(m) \sim L_F(1)$, формально эквивалентном гильбертову пространству $L_F(1)$ и получаемом путем редукции $L(P; \lambda) \longrightarrow L(P)$ [22].

2.2. $SU(2)$ -групповое разложение для ПОП. Помимо исходного представления (9), для ПОП $\hat{R}$ возможны и другие формы, определенные в $L_P(m) \sim L_F(1)$ [22]. Для разработки метода ПТИ наиболее важно его разложение по операторам сдвига $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$ группы $SU(2)$, которые в базисе диадик $\hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P$ задаются [28] соотношением

$$\hat{U}(\omega, \mathbf{n}) = \sum_{P, \mu, \mu'} \hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P U_{\mu, \mu'}^P(\omega, \mathbf{n}).$$

Здесь матричные элементы $U_{\mu, \mu'}^P(\omega, \mathbf{n})$, определяемые через сферические функции $Y_{lm}(\mathbf{n})$, обобщенные характеры $\chi_l^P(\omega)$ и коэффициенты Клебша–Гордана $C_{P, \mu; l, m}^{P, \mu'}$ группы $SU(2)$, образуют полную ортонормированную систему на трехмерной сфере $S^3(\omega; \mathbf{n}) = S^1(\omega) \times S^2(\mathbf{n}(\theta, \phi))$. Это позволяет выразить диадики $\hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P$ через интеграл от $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$:

$$\hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P = \frac{2\hat{P} + 1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \left[\int_{S^2} d^2 \mathbf{n} \equiv \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \right] U_{\mu, \mu'}^{P*}(\omega, \mathbf{n}) \hat{U}(\omega, \mathbf{n}), \quad (11)$$

где $2\hat{P} + 1 \equiv [1 + 4\hat{\mathbf{P}}^2]^{1/2}$. Подставляя выражение (11) в (9), получим интегральное представление

$$\hat{R} = \frac{2\hat{P} + 1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int_{S^2} d^2 \mathbf{n} \chi_R(\omega, \mathbf{n}) \hat{U}(\omega, \mathbf{n}), \quad \chi_R(\omega, \mathbf{n}) \equiv \text{Tr}[\hat{R} \hat{U}^\dagger(\omega, \mathbf{n})], \quad (12)$$

для ПОП $\hat{R}$, где поляризационную характеристическую функцию $\chi_R(\omega, \mathbf{n})$ можно вычислять согласно (10) как в $L_P(m) \sim L_F(1)$, так и в $L_F(m)$.

Полученные представления ПОП $\hat{R}$ позволяют приступить к решению общей задачи поляризационной томографии – нахождению томографических представлений для $\hat{R}$ и поляризационных ФКВ.

3. ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПОП $\hat{R}$

3.1. Редукция полевой квантовой томографии. Как отмечалось выше, возможны разные, обусловленные выбором типа ТН, пути нахождения томографических представлений $\hat{R}$. Так, например, выбирая в случае одной пространственно-временной моды в качестве ТН “повернутые” квадратуры $\hat{X}_{\phi\pm} = (1/2)[\hat{a}_\pm^\dagger e^{i\phi\pm} + \hat{a}_\pm e^{-i\phi\pm}]$ двух

циркулярных поляризационных мод $(\pm)$, получим с помощью соотношений (2) и (9) выражение

$$\begin{aligned}\hat{R} &= \int_0^\pi \int_0^\pi \frac{d\phi_+ d\phi_-}{\pi^2} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty dx_+ dx_- p_\rho(\{x_\pm, \phi_\pm\}) \hat{K}_R^{rf}(\{x_\pm, \phi_\pm\}), \\ p_\rho(\{x_\pm, \phi_\pm\}) &= \langle x_{+\phi_+} | \hat{\rho} | x_{+\phi_+} \rangle \langle x_{-\phi_-} |, \\ \hat{K}_R^{rf}(\{x_\pm, \phi_\pm\}) &= \sum_{P, \mu, \mu'} \prod_{\alpha=\pm} K_{\mu, \mu'}^P(x_\alpha, \phi_\alpha) \hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P, \\ K_{\mu, \mu'}^P(x_\pm, \phi_\pm) &= \langle P \pm \mu | \hat{K}(x_\pm, \phi_\pm) | P \pm \mu' \rangle,\end{aligned}\tag{13}$$

которое можно назвать редуцированным полевым (порожденным ТН $\hat{X}_{\phi_\pm}$) томографическим представлением ПОП $\hat{R}$. Из (13) видно, что с экспериментальной точки зрения это представление задается массивом томограмм $p(\{x_\pm, \phi_\pm\})$, зависящим от двух квантовых $(x_\pm)$ и двух классических $(\phi_\pm)$ параметров, тогда как исходная форма (9) ПОП $\hat{R}$ определяется трехпараметрическим семейством $\{R_{\mu', \mu}^P\}$. Принимая во внимание также аналитическую сложность структурных функций $K_{\mu, \mu'}^P(x_\pm, \phi_\pm)$ [8], можно сделать вывод о практической неэффективности такого представления (ср. с работой [23]), которая, очевидно, усугубляется в случае многих пространственно-временных мод. Значительно более перспективен в этом плане метод ПТИ, который базируется на использовании ТН, имеющих чисто поляризационную природу [9], [22].

3.2. Каноническая версия метода ПТИ. В качестве ТН здесь используются “повернутые” P -квазиспиновые наблюдаемые $\hat{S}(\theta, \phi)$. В силу определения (3) каждая наблюдаемая $\hat{S}(\theta, \phi)$ имеет дискретный спектр $S = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ с вырожденными собственными состояниями $|P; \mu; \mathbf{n}\rangle = \hat{T}(\mathbf{n})|P; \mu\rangle$: $\hat{S}(\theta, \phi)|P; \mu; \mathbf{n}\rangle = 2\mu|P; \mu; \mathbf{n}\rangle$ – обобщенными когерентными состояниями [29] группы $SU(2)_P$, которые задают в $L_P(m) \sim L_F(1)$ полные ортонормированные базисы, унитарно-эквивалентные стандартному базису $\{|P; \mu\rangle\}$. Совокупность базисов $\{|P; \mu; \mathbf{n}\rangle\}$ определяет семейство частично-ортogonalных проекторов (“альтернатив” (*Eigenschaften*) фон Неймана [10])

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) &\equiv \left|P; \frac{S}{2}; \mathbf{n}\right\rangle \left\langle P; \frac{S}{2}; \mathbf{n}\right| = \sum_{\mu, \mu'} \hat{\Pi}_{\mu, \mu'}^P \Pi_{\mu, \mu'}^P(P, S; \mathbf{n}), \\ \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) \hat{\Pi}_{S'}^{P'}(\mathbf{n}) &= \delta_{PP'} \delta_{SS'} \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}),\end{aligned}\tag{14}$$

где $\Pi_{\mu, \mu'}^P(P, S; \mathbf{n})$ вычисляются с помощью $SU(2)$ -формализма [28] и имеют вид

$$\Pi_{\mu, \mu'}^P(P, S; \mathbf{n}) = (-1)^{S/2-\mu} \sum_{l, m} C_{P, \mu'; P, -\mu}^{l, m} C_{P, S/2; P, -S/2}^{l, 0} Y_{lm}(\mathbf{n}) \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}.\tag{15}$$

Проекторы $\hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n})$ задают “разложение единицы” в $L_P(m) \sim L_F(1)$

$$\begin{aligned}\sum_{S=-\infty}^\infty \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) &\equiv \sum_{S=-\infty}^\infty \sum_{P \geq |S/2|}^\infty \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) = \\ &= \hat{T}(\mathbf{n}) \left(\sum_{S=-\infty}^\infty \sum_{P \geq |S/2|}^\infty \left|P; \frac{S}{2}\right\rangle \left\langle P; \frac{S}{2}\right| \right) \hat{T}^\dagger(\mathbf{n}) = \hat{I}\end{aligned}\tag{16}$$

и спектральные разложения физических величин $\hat{S}(\theta, \phi)$, $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$

$$\hat{S}(\theta, \phi) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} S \hat{\Pi}_S(\mathbf{n}), \quad \hat{U}(\omega, \mathbf{n}) = \hat{T}(\mathbf{n}) e^{-i\omega \hat{P}_3} \hat{T}^\dagger(\mathbf{n}) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} e^{-i\omega S/2} \hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) \quad (17)$$

по “суммарным” проекторам $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) (\hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) \hat{\Pi}_{S'}(\mathbf{n}) = \delta_{SS'} \hat{\Pi}_S(\mathbf{n}))$. Последние определяют распределения вероятностей

$$p_R(S; \mathbf{n}) \equiv \text{Tr} [\hat{R} \hat{\Pi}_S(\mathbf{n})] = \sum_{P \geq |S/2|}^{\infty} \left\langle P, \frac{S}{2}; \mathbf{n} \left| \hat{R} \right| P, \frac{S}{2}; \mathbf{n} \right\rangle = \left\langle P, \frac{S}{2} \left| \hat{R}(\mathbf{n}) \right| P, \frac{S}{2} \right\rangle$$

для значений наблюдаемых $\hat{S}(\theta, \phi)$ в состоянии $\hat{R}$, либо наблюдаемой $\hat{S}(0, 0) = 2\hat{P}_3$ в “повернутых” состояниях $\hat{R}(\mathbf{n})$. Отметим, что регистрируемые экспериментально методами фотодетектирования [24] поляризационные томограммы $p_R(S; \mathbf{n}) \equiv p_R(S; \theta, \phi)$ в отличие от гомодинных томограмм $p(\{x_\pm, \phi_\pm\})$ зависят только от одного (дискретного) квантового параметра S (и двух классических параметров θ, ϕ) и при этом в силу (16) удовлетворяют нормировке $\sum_{S=-\infty}^{\infty} p_R(S; \mathbf{n}) = 1$.

Найдем теперь томографическое представление ПОП $\hat{R}$, альтернативное выражению (13) и использующее $p_R(S; \mathbf{n})$ в качестве координат. Для этого, вычисляя квантовые средние $\langle \hat{U}^\dagger(\omega, \mathbf{n}) \rangle$ в базисе $\{|P; \mu; \mathbf{n}\rangle$, получим соотношение $\chi_R(\omega, \mathbf{n}) = \sum_{S=-\infty}^{\infty} p_R(S; \mathbf{n}) e^{i\omega S/2}$. Подставляя его в (12) и используя (следующие из (3)) свойства симметрии $\hat{S}(\pi - \theta, \phi + \pi) = -\hat{S}(\theta, \phi) \implies \hat{U}(\omega, \mathbf{n}(\pi - \theta, \phi + \pi)) = \hat{U}(\omega, \mathbf{n}(\theta, \phi))^\dagger$, $p_R(S; \theta, \phi) = p_R(-S; \pi - \theta, \phi + \pi)$, находим томографическое представление ПОП $\hat{R}$ в форме разложения

$$\begin{aligned} \hat{R} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi/2} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \sum_{S=-\infty}^{\infty} p_R(S; \mathbf{n}) \hat{K}(S; \mathbf{n}) \equiv \\ &\equiv \int_{S_+^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{2\pi} \sum_{S=-\infty}^{\infty} p_R(S; \mathbf{n}) \hat{K}(S; \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \hat{K}(S; \mathbf{n}) &= \hat{T}(\mathbf{n}) \left[\hat{K}_0(S) = \frac{2\hat{P} + 1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \left[\omega \left(\frac{S}{2} - \hat{P}_3 \right) \right] \sin \omega^2 \frac{\omega}{2} d\omega \right] \hat{T}^\dagger(\mathbf{n}) = \\ &= (2\hat{P} + 1) \left[\hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{S+2}(\mathbf{n}) - \frac{1}{2} \hat{\Pi}_{S-2}(\mathbf{n}) \right] \quad (\neq [\hat{K}(S; \mathbf{n})]^2) \end{aligned} \quad (19)$$

по конечным суммам (ненормированных) проекторов $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})$, задающим (в отличие от $\hat{K}(x; \phi)$ из (2) несингулярные) операторные томографические ядра $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ (с конечным следом $\text{Tr} \hat{K}(S; \mathbf{n}) = 1$, но не проекторного типа). Ядра $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ биортогональны к $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})$: $\text{Tr} [\hat{K}(S; \mathbf{n}) \hat{\Pi}_{S'}(\mathbf{n}')] = 4\pi \delta_{SS'} [\delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}') \equiv \sum_{l,m} Y_{lm}(\mathbf{n}) Y_{lm}^*(\mathbf{n}')]]$, как это следует из интегральных представлений

$$\hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{4\pi} \hat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega S/2} d\omega$$

(в силу (17)) и $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ (см. (19)), а также свойств ортогональности $\hat{U}(\omega, \mathbf{n})$ [28]. Поэтому, используя эту биортогональность, можно получить дуальное к (18) представление

$$\hat{R} = \int_{S_+^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{2\pi} \sum_{S=-\infty}^{\infty} k_R(S; \mathbf{n}) \hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) \quad (20)$$

ПОП $\hat{R}$, где

$$\begin{aligned} k_R(S; \mathbf{n}) &\equiv \text{Tr}[\hat{R} \hat{K}(S; \mathbf{n})] = \\ &= \sum_P (2P+1) [p_R(P; S; \mathbf{n}) - \frac{1}{2}(p_R(P; S-2; \mathbf{n}) + p_R(P; S+2; \mathbf{n}))], \\ p_R(P; S; \mathbf{n}) &\equiv \text{Tr}[\hat{R} \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n})]. \end{aligned}$$

Обе формулы (18) и (20) сходны со спектральными разложениями (17) ТН $\hat{S}(\theta, \phi)$ по полному ортогональному (при фиксированном $\mathbf{n}$) базису $\{\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})\}$, но имеют и очевидные отличия, характеризующие специфику косвенного измерения: 1) в (18) и (20) используются сверхполные и неортогональные (при разных $\mathbf{n}$) множества $\{\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})\}$; 2) $p_R(S; \mathbf{n}) \neq \text{Tr}[\hat{R} \hat{K}(S; \mathbf{n})]$, $k_R(S; \mathbf{n}) \neq \text{Tr}[\hat{R} \hat{\Pi}_S(\mathbf{n})]$. Однако если с (18) ассоциировано каноническое разложение единицы $\int_{S_+^2} (d^2 \mathbf{n}/2\pi) \sum_{S=-\infty}^{\infty} \hat{\Pi}_S(\mathbf{n}) = \hat{I}$ (в силу $\text{Tr} \hat{K}(S; \mathbf{n}) = 1$), то ядра $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ не задают такого разложения (так как $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})$ не имеют конечного следа) и, кроме того, коэффициенты $k_R(S; \mathbf{n})$ могут быть отрицательными (для положительного оператора $\hat{R}$). Поэтому разложение (18) можно назвать квазиспектральным томографическим, а разложение (20) – только квазиспектральным (и далее оно не рассматривается).

3.3. Неканонические версии метода ПТИ. Помимо разложения (18), для $\hat{R}$ возможно получить и другие томографические представления, используя модификацию подхода, развитого в работе [30] для квантовой томографии ансамбля двухуровневых атомов (описываемых квазиспиновым $SU(2)$ -формализмом, но на гильбертовом пространстве, эквивалентном $L(P)$ в (7)).

В качестве ТН здесь используются P -квазиспин $\hat{P} = (1/2)([1 + 4\hat{\mathbf{P}}^2]^{1/2} - 1)$ и коммутирующие с ним “повернутые” операторы $\hat{S}_{\pm P}(\theta, \phi)$ доминантных $SU(2)$ -весов, задаваемые спектральным разложением $\hat{S}_{\pm P}(\theta, \phi) = \pm 2 \sum_{P \geq 0}^{\infty} P \hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n})$ по доминантным проекторам $\hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n})$, показывающим эквивалентность $\hat{S}_{\pm P}(\theta, \phi)$ каноническим ТН $\hat{S}(\theta, \phi)$ с “выколотыми” спектральными точками. Проекторы $\hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n})$ задают альтернативное разложению (16) и выражающее полноту множества обобщенных когерентных состояний $|P; \pm P; \mathbf{n}\rangle$ [29] на $L_P(m)$ (квазиспектральное) “разложение единицы”:

$$\int_{S^2} d^2 \mathbf{n} \sum_{2P \geq 0}^{\infty} \frac{2P+1}{4\pi} \hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n}) = \frac{2\hat{P}+1}{4\pi} \int_{S^2} d^2 \mathbf{n} \sum_{2P \geq 0}^{\infty} \hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n}) = \hat{I}, \quad (21)$$

а также определяют вероятности $Q_R^{\pm}(P; \mathbf{n}) \equiv \text{Tr}[\hat{R} \hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n})] = p_R(P; \pm 2P; \mathbf{n})$ значений P -квазиспина $\hat{P}$ и ТН $\hat{S}_{\pm P}(\theta, \phi)$ в состоянии $\hat{R}$.

Вероятности $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$ определяют на $L_P(m)$ аналоги квазиклассического Q -представления для спиновых систем [29], которые и задают неканонические томографические представления $\hat{R}$:

$$\hat{R} = \int_{S^2} \frac{d^2 \mathbf{n}}{4\pi} \sum_{2P=0}^{\infty} Q_R^\pm(P; \mathbf{n}) \hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n}), \quad \sum_{2P=0}^{\infty} (2P+1) Q_R^\pm(P; \mathbf{n}) = 1. \quad (22)$$

Здесь томографические ядра $\hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n})$ даются выражением (ср. [29], [30])

$$\hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n}) = \sum_{l,S} (2l+1) [C_{P,\pm P;l,0}^{P,\pm P}]^{-1} C_{P,S/2;l,0}^{P,S/2} \hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) \quad (\neq [\hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n})]^2) \quad (23)$$

и удовлетворяют (легко проверяемым с помощью (14)) соотношениям биортогональности для $\hat{\mathcal{P}}_\pm(\mathbf{n})$ и $\hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n})$

$$\text{Tr}[\hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n}) \hat{\Pi}_{\pm 2P}^P(\mathbf{n}')] = 4\pi \delta_{P,P'} \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}')$$

и нормировке $\text{Tr} \hat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n}) = 2P+1$. Это позволяет определить по аналогии с (20) представления $\hat{R}$, дуальные к (22) (и аналогичные P -представлению для спиновых систем), но они здесь не приводятся, поскольку имеют те же недостатки, что и (20).

4. МАТРИЧНЫЕ ТОМОГРАФИЧЕСКИЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ $\hat{R}$

4.1. Общие замечания. По аналогии с полевой томографией завершает поляризационную томографическую схему проектирование операторных равенств типа (18), (22) на некоторый операторный базис $\{\hat{B}(a)\}$ и получение их c -числовых версий путем замен $\hat{R} \rightarrow R_B(a) \equiv \text{Tr}[\hat{R}\hat{B}(a)]$, $\hat{K}(S; \mathbf{n}) \rightarrow K_B(S, \mathbf{n}; a) \equiv \text{Tr}[\hat{K}(S; \mathbf{n})\hat{B}(a)]$, $\hat{\mathcal{P}}(P; \mathbf{n}) \rightarrow \mathcal{P}(P, \mathbf{n}; a) \equiv \text{Tr}[\hat{\mathcal{P}}(P; \mathbf{n})\hat{B}(a)]$ и т.п.

В принципе достаточно осуществить такое проектирование на стандартный базис диадик $\hat{\Pi}_{\mu,\mu'}^P$ (в силу его полноты). Нахождение соответствующих c -числовых томографических ядер $K_\Pi(S, \mathbf{n}; P, \mu, \mu') = \text{Tr}[\hat{K}(S; \mathbf{n})\hat{\Pi}_{\mu,\mu'}^P]$ и $\hat{\mathcal{P}}_\pm^\Pi(P, \mathbf{n}; \mu, \mu') = \text{Tr}[\hat{\mathcal{P}}_\pm(P, \mathbf{n})\hat{\Pi}_{\mu,\mu'}^P]$ сводится просто к подстановке в формулы (19) и (23) вместо операторов $(2\hat{P}+1)\hat{\Pi}_{M=S,S\pm 2}(\mathbf{n})$ и $\hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n})$ их матричных элементов $\sum_P (2P+1)\Pi_{\mu,\mu'}^P(P, M; \mathbf{n})$ и $\Pi_{\mu,\mu'}^P(P, S; \mathbf{n})$, определенных формулой (15).

Однако для томографии в узком смысле (получение аналогов (1)) необходимо ввести в томографическую схему поляризационные ФКВ, обеспечивающие визуализацию квантовых состояний [27].

4.2. Поляризационные ФКВ и их томографические представления. Поляризационные ФКВ $R_B(\mathbf{p}) \equiv \text{Tr}[\hat{R}\hat{B}_{qc}(\mathbf{p})]$ ассоциированы с “квазиклассическими” [18] базисами $\{\hat{B}_{qc}(\mathbf{p})\}$ эрмитовых операторов, нумеруемых точками поляризационного фазового пространства $R_P^3 = \{\mathbf{p}\} = S_P^2 \times R_+^1$ ($S_P^2 = \{\mathbf{n} : |\mathbf{n}| = 1\}$ – единичная сфера Пуанкаре, $R_+^1 = \{|\mathbf{p}|\}$ соответствует средним значениям P -квасиспина $\hat{P}$) [9], [22]. Отметим, что по отношению к базису $\{\hat{\Pi}_{\mu,\mu'}^P\}$ базис $\{\hat{B}_{qc}(\mathbf{p})\}$ играет ту же роль, что и когерентные состояния $|\{\alpha_\pm\}\rangle$ относительно фоковского базиса $|\{n_\pm\}\rangle \in L_F(1)$. Конкретный

выбор базиса $\{\widehat{B}_{qc}(\mathbf{p})\}$ обычно определяется близостью квазиклассического анализа к классическому описанию и полезностью для приложений [9], [27].

Так, по аналогии с полевой томографией в канонической версии метода ПТИ в качестве базисных операторов $\widehat{B}_{qc}(\mathbf{p})$ были выбраны фурье-образы оператора сдвига $\widehat{U}(\omega, \mathbf{n})$ в фазовое пространство $R_P^3 = \{\mathbf{p}\}$ [9]. При этом в силу геометрической неизоморфности поляризационного фазового пространства R^3 и группового многообразия S^3 динамической группы $SU(2)_p$ возможны два типа таких операторов $\widehat{B}_{qc}(\mathbf{p})$:

$$\widehat{B}_{qc}^1(\mathbf{p}) = \widehat{W}(\mathbf{p}) = \int_{R^3} \frac{d^3\omega \mathbf{n}}{(2\pi)^3} \widehat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p})} = \int_0^\infty \omega^2 \frac{d\omega}{(2\pi)^3} \int_{S^2} d^2\mathbf{n} \widehat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}, \quad (24)$$

$$\widehat{B}_{qc}^2(\mathbf{p}) = \widehat{V}(\mathbf{p}) = \frac{2\widehat{P} + 1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \sin^2 \frac{\omega}{2} d\omega \int_{S^2} d^2\mathbf{n} \widehat{U}(\omega, \mathbf{n}) e^{i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}}, \quad (25)$$

которые биортогональны друг к другу: $\text{Tr}[\widehat{W}(\mathbf{p})\widehat{V}(\mathbf{p}')] = \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}')$. Это свойство позволяет получить две дуальные формы квазиклассических представлений ПОП $\widehat{R}$:

$$\widehat{R} = \int_{R_P^3} R_W(\mathbf{p}) \widehat{V}(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p} = \int_{R_P^3} R_V(\mathbf{p}) \widehat{W}(\mathbf{p}) d^3\mathbf{p}, \quad (26)$$

где $R_W(\mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{R}\widehat{W}(\mathbf{p})]$, $R_V(\mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{R}\widehat{V}(\mathbf{p})]$. Однако только базис $\{\widehat{W}(\mathbf{p})\}$ обеспечивает каноническое “разложение единицы”: $\int_{R^3} d^3\mathbf{p} \widehat{W}(\mathbf{p}) = \hat{I}$, а ФКВ $R_W(\mathbf{p})$ соответствует определению совместного распределения вероятностей в классической картине (так как $R_W(\mathbf{p}) = \int_{R^3} d^3\omega \mathbf{n} \chi_R(\omega, \mathbf{n}) e^{-i\omega \mathbf{n} \cdot \mathbf{p}} / (2\pi)^3$ и $\int_{R^3} d^3\mathbf{p} R_W(\mathbf{p}) = 1$). Поэтому именно эта ФКВ использовалась для практической реализации метода ПТИ [24] и квазиклассического анализа ряда состояний квантового света [27].

Соответствующие (18) и (22) томографические представления ФКВ $R_W(\mathbf{p})$ выражают их через вероятности $p_R(S; \theta, \phi)$, $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$ и c -числовые ядра $K_W(S, \mathbf{n}; \mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{K}(S; \mathbf{n})\widehat{W}(\mathbf{p})]$, $\mathcal{P}_W^\pm(P, \mathbf{n}; \mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n})\widehat{W}(\mathbf{p})]$, которые вычисляются с помощью формализма $SU(2)$ и имеют вид

$$\begin{aligned} K_W(S, \mathbf{n}; \mathbf{p}) &= \int_0^\infty \frac{\omega^2 d\omega}{2(\pi)^2} \cos\left[\omega\left(\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - \frac{S}{2}\right)\right] = -\frac{1}{2\pi} \frac{d^2}{dx^2} \delta(x) \Big|_{x=\mathbf{n} \cdot \mathbf{p} - S/2}, \quad (27) \\ \mathcal{P}_W^\pm(P, \mathbf{n}; \mathbf{p}) &= \sum_{L, S} (2L+1) [C_{P, \pm P; L, 0}^{P, \pm P}]^{-1} C_{P, S/2; l, 0}^{P, S/2} \times \\ &\quad \times \int_{R^3} \frac{d^3\omega_1 \mathbf{n}_1}{(2\pi)^3} e^{i\omega_1 \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{p}} \text{Tr}[\widehat{\Pi}_S^P(\mathbf{n}) \widehat{U}(\omega, \mathbf{n}_1)] = \\ &= \sum_{L=0}^{2P} \frac{(2L+1)}{|\mathbf{p}|^L (2\pi|\mathbf{p}|)^{3/2}} [C_{P, \pm P; L, 0}^{P, \pm P}]^{-1} \times \\ &\quad \times \frac{d}{d|\mathbf{p}|} [|\mathbf{p}|^{L+1} \mathcal{H}_{L+3/2}(P, L; |\mathbf{p}|)] \mathcal{P}_L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_p), \quad \mathbf{n}_p \equiv \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|}, \quad (28) \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция, $\mathcal{H}_{L+3/2}(P, L; y) = \int_0^\infty d\omega \sqrt{\omega y} \chi_L^P(\omega) J_{L+3/2}(\omega y)$ – преобразование Ханкеля для характера $\chi_L^P(\omega)$ группы $SU(2)$, $\mathcal{P}_L(z)$ – полином Лежандра.

Другую физически мотивированную s -числовую спецификацию томографических схем (18), (22) можно найти с помощью их проектирования на базис “поляризационных” операторов Вигнера $\widehat{B}_{qc}^3(\mathbf{p}) = \widehat{W}^{rf}(\mathbf{p})$:

$$\widehat{W}^{rf}(\mathbf{p}) = \widehat{T}(\mathbf{n}_p) \widehat{W}^{rf}(|\mathbf{p}|) \widehat{T}(\mathbf{n}_p)^\dagger = 4 \sum_{P,\mu} \widehat{\Pi}_{2\mu}^P(\mathbf{n}_p) (-1)^{2P} e^{-4|\mathbf{p}|} L_{P+\mu}(8|\mathbf{p}|), \quad (29)$$

где $L_m(x)$ – полиномы Лагерра. Выражение (29) находится редуцированием много-модовых полевых операторов Вигнера $\widehat{W}(\{\alpha_{\pm, \mathbf{k}_j}\})$ при вычислении символов Вейля $A_W(\{\alpha_{\pm, \mathbf{k}_j}\}) \equiv \text{Tr}[\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}}) \widehat{W}(\{\alpha_{\pm, \mathbf{k}_j}\})] = \text{Tr}[\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}}) \widehat{W}^{rf}(\mathbf{p})]$ поляризационных операторов $\widehat{A}(\widehat{\mathbf{P}})$ (ср. с (10)) путем введения “поляризационно-параметризованной” формы многомодового полевого оператора сдвига

$$\widehat{D}(\{\alpha_{\pm, \mathbf{k}_j}\}) = \widehat{T}(\mathbf{n}_p) \widehat{S}(\{\zeta_i, \kappa_j\}) e^{i\varphi \widehat{N}} \widehat{D}(\alpha_+, \mathbf{k}_1 = \sqrt{2|\mathbf{p}|}) e^{-i\varphi \widehat{N}} \widehat{S}(\{\zeta_i, \kappa_j\})^\dagger \widehat{T}(\mathbf{n}_p)^\dagger,$$

где φ – полная фаза поля, $\widehat{S}(\{\zeta_i, \kappa_j\})$ – оператор сдвига группы $SO^*(2m)$, коммутирующей с $SU(2)_p$, а параметры ζ_i, κ_j соответствуют λ в определении $L(P; \lambda)$ [22], [27]. Принимая во внимание эквивалентность $L_P(m) \sim L_F(1)$, для явного нахождения $\widehat{W}^{rf}(\mathbf{p})$ достаточно осуществить такую редукцию в случае $L_P(1) = L_F(1)$, когда все вычисления упрощаются. Тогда, используя для этой цели представление $\widehat{W}(\alpha_{\pm}) = 2\widehat{D}(\alpha_{\pm}) e^{i\pi \widehat{n}_{\pm}} \widehat{D}(\alpha_{\pm})^\dagger$ [6] полевых операторов Вигнера и учитывая (8), находим

$$\begin{aligned} \widehat{W}^{rf}(|\mathbf{p}|) &\equiv 4 \sum_{P,\mu,\mu'} \widehat{\Pi}_{\mu,\mu'}^P \langle P; \mu | \widehat{D}(\alpha_+ = \sqrt{2|\mathbf{p}|}) e^{i\pi 2\widehat{P}} \widehat{D}(\alpha_+ = \sqrt{2|\mathbf{p}|})^\dagger | P; \mu' \rangle = \\ &= 4 \sum_{P,\mu} \widehat{\Pi}_{\mu,\mu}^P (-1)^{2P} e^{-4|\mathbf{p}|} L_{P+\mu}(8|\mathbf{p}|), \end{aligned}$$

откуда и следует выражение (29), с помощью которого по аналогии с (27), (28) легко можно вычислить числовые ядра $K_{Wrf}(S, \mathbf{n}; \mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{K}(S; \mathbf{n}) \widehat{W}^{rf}(\mathbf{p})]$, $\mathcal{P}_{Wrf}^\pm(P, \mathbf{n}; \mathbf{p}) = \text{Tr}[\widehat{\mathcal{P}}_\pm(P; \mathbf{n}) \widehat{W}^{rf}(\mathbf{p})]$. В качестве примера выпишем выражение для $K_{Wrf}(S, \mathbf{n}; \mathbf{p})$:

$$\begin{aligned} K_{Wrf}(S, \mathbf{n}; \mathbf{p}) &= 4 \sum_{P,\mu} (2P+1) (-1)^{S/2+\mu} e^{-4|\mathbf{p}|} L_{P+\mu}(8|\mathbf{p}|) \sum_{L=0}^{2P} C_{P,\mu;P,-\mu}^{L,0} \mathcal{P}_L(\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_p) \times \\ &\times \left[C_{P,S/2;P,-S/2}^{L,0} + \frac{1}{2} C_{P,S/2+1;P,-S/2-1}^{L,0} + \frac{1}{2} C_{P,S/2-1;P,-S/2+1}^{L,0} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, выше были получены три томографических представления (13), (18), (22) ПОП $\widehat{R}$, которые выражают квантово-статистическую сущность поляризационной томографии и могут трактоваться как преобразования полуклассической информации, задаваемой вероятностями $p(\{x_{\pm}, \phi_{\pm}\})$, $p_R(S; \mathbf{n})$, $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$, в полностью квантовую информацию, задаваемую $\widehat{R}$ (ср. с работами [13]–[15]). Показано было также практическое

преимущество двух версий (18), (22) метода ПТИ по сравнению с редукционной схемой (13), что важно для приложений, поскольку полученные s -числовые версии разложений (18), (22) могут быть полезны при разработке устройств вывода информации в квантовых компьютерах (ср. [12], [13], [17]) и в компьютерной обработке изображений [17], [27]. Поэтому кратко обсудим некоторые особенности полученных схем метода ПТИ.

Квазиспектральные томографические разложения (18), (22) сходны с выражением для полной вероятности [31] через условную вероятность и вероятности полной системы элементарных событий, представляемых в (18), (22) соответственно полуклассическими вероятностями $p_R(S; \mathbf{n})$, $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$ и ансамблями $\{\hat{K}(S; \mathbf{n})\}$, $\{\hat{P}_\pm(P; \mathbf{n})\}$ базисных квантовых состояний, которые, однако, не совпадают с базисными проекторами $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})$, $\hat{\Pi}_{2P}^P(\mathbf{n})$, определяющими “собственные значения” $\hat{R}$ (вероятности $p_R(S; \mathbf{n})$, $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$), а задаются суммами $\hat{\Pi}_S(\mathbf{n})$ и $\hat{\Pi}_S^P(\mathbf{n})$. Все это характеризует специфику квантовой томографии как косвенного измерения и статистическую природу состояния в квантовой теории (ср. [10], [11], [17]). Сравнивая томографические представления (18) и (22), заметим, что в общем случае для практических целей предпочтительнее использовать каноническую версию метода ПТИ, поскольку ядра (23) и (28) имеют более сложную, чем (19) и (27), аналитическую структуру. Кроме того, экспериментальное получение томограмм $Q_R^\pm(P; \mathbf{n})$ технически более сложно по сравнению с регистрацией $\{p_R(S; \mathbf{n})\}$ (за исключением состояний спинного типа с $\hat{R} = \hat{R}(P) = \sum_{\mu, \mu'} R_{\mu', \mu}^P \hat{\Pi}_{\mu', \mu}^P$ – ср. с работой [30]). Однако детальный анализ сделанных выше наблюдений и других свойств разложений (18), (22) требует отдельного рассмотрения.

В заключение укажем некоторые другие пути развития полученных результатов. Во-первых, это разработка томографических представлений в поляризационной квантовой оптике с помощью использования (18), (22) и дуальных к ним разложений (типа (20)) для наблюдаемых $\hat{A}(\hat{\mathbf{P}})$. Во-вторых, это дискретизация соотношений (18), (22) (ввиду дискретности параметров массива $\{R_{\mu', \mu}^P\}$), для чего можно использовать редукцию переполненности томографических ядер $\hat{K}(S; \mathbf{n})$ и $\hat{P}(P; \mathbf{n})$ по аналогии с получением полных дискретных подсистем для обычных когерентных состояний [29].

Благодарности. Автор благодарит рецензента за замечание, способствовавшее уточнению постановки задачи. Работа выполнена при поддержке программы INTAS (грант № 01-2122) и РФФИ (грант № 04-02-17165).

Список литературы

- [1] J. Bertrand, P. Bertrand. Found. Phys. 1987. V. 17. P. 397.
- [2] K. Vogel, H. Risken. Phys. Rev. A. 1989. V. 40. P. 2847.
- [3] D. T. Smithey, M. Beck, M. G. Raymer, A. Faridani. Phys. Rev. Lett. 1993. V. 70. P. 1244.
- [4] H. Kühn, D.-G. Welsh, W. Vogel. Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 4240.
- [5] U. Leonhardt, H. Paul, G. M. D'Ariano. Phys. Rev. A. 1995. V. 52. P. 4899.
- [6] K. Banaszek, K. Wodkiewicz. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 4344.
- [7] V. Buzek, G. Adam, G. Drobny. Ann. Phys. 1996. V. 245. P. 37.
- [8] A. Wüensche. J. Mod. Optics. 1997. V. 44. P. 2293.
- [9] В. П. Карасев, А. В. Масалов. ЖЭТФ. 2004. Т. 126. С. 63.

- [10] *И. фон Нейман*. Математические основы квантовой механики. М.: Наука, 1964.
- [11] *А. С. Холево*. Вероятностные и статистические аспекты квантовой теории. М.: Наука, 1980.
- [12] *Б. Б. Кадомцев*. УФН. 1994. Т. 164. С. 449; *С. Я. Кулин*. УФН. 1999. Т. 169. С. 507.
- [13] *Д. Боумейстер, А. Экерт, А. Цайлингер*. Физика квантовой информации. М.: Постмаркет, 2002.
- [14] *М. Б. Менский*. УФН. 2000. Т. 170. С. 631.
- [15] *I. V. Volovich*. Quantum information in space and time. quant-ph/0108073; *I. V. Volovich*. Quantum Computers, Teleportation, Cryptography. Lectures. М.: Steklov Mathematical Institute, 2001–2002.
- [16] *Б. А. Гриванин, В. Н. Заджов*. Радиотехн. и электрон. 2002. Т. 47. С. 1029.
- [17] *К. А. Валиев*. УФН. 2005. Т. 175. С. 3.
- [18] *Р. Л. Стратонович*. ЖЭТФ. 1956. Т. 31. С. 1012.
- [19] *В. И. Татарский*. УФН. 1983. Т. 139. С. 587; *M. Hillery, R. F. O'Connell, M. O. Scully, E. P. Wigner*. Phys. Rep. 1984. V. 106. P. 121.
- [20] *K. Banaszek, G. M. D'Ariano, M. G. A. Paris, M. F. Sacchi*. Phys. Rev. A. 1999. V. 61. P. 010304(R).
- [21] *A. B. Klimov, O. V. Man'ko, V. I. Man'ko, Yu. F. Smirnov, V. N. Tolstoy*. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 6101.
- [22] *В. П. Карасев*. Кр. сообщ. физ. 1999. № 9. С. 34.
- [23] *M. G. Raymer, A. C. Funk, D. F. McAlister*. Measuring the quantum polarization state of light. In: Quantum Communications, Computing and Measurement. V. 2. Eds. P. Kumar et al. New York: Kluwer, 2000. P. 147.
- [24] *П. А. Бушев, В. П. Карасев, А. В. Масалов, А. А. Путилин*. Опт. и спектр. 2001. Т. 91. С. 558.
- [25] *V. P. Karassiov*. J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 4345; *J. Rus. Laser Res.* 1994. V. 15. P. 391; 2000. V. 21. P. 370.
- [26] *A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen*. Phys. Rev. 1935. V. 47. P. 777.
- [27] *V. P. Karassiov, A. V. Masalov*. Las. Phys. 2002. V. 12. P. 948; *J. Opt. B.* 2002. V. 4. P. S366.
- [28] *Д. А. Варшалович, А. Н. Москалев, В. К. Херсонский*. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975.
- [29] *А. М. Переломов*. Обобщенные когерентные состояния и их применения. М.: Наука, 1987.
- [30] *G. S. Agarwal*. Phys. Rev. A. 1998. V. 57. P. 671.
- [31] *Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов*. Теория вероятностей. основные понятия. Предельные теоремы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 29.III.2005 г.,
после доработки 10.VI.2005 г.