Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Чихачев, Связанные состояния частицы в поле разбегающихся точечных потенциалов, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 385–392

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1907>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:51:06

© 2005 г.

А. С. Чихачев*

СВЯЗАННЫЕ СОСТОЯНИЯ ЧАСТИЦЫ В ПОЛЕ РАЗБЕГАЮЩИХСЯ ТОЧЕЧНЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Изучаются связанные состояния в нестационарной системе разбегающихся δ -центров. Рассмотрены состояния, характеризующиеся разной глубиной уровня точечных центров, в одномерной и трехмерной задачах.

Ключевые слова: уравнение Шредингера, точечный потенциал, связанное состояние.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представление о потенциале нулевого радиуса действия оказывается плодотворным для решения нестационарных задач квантовой механики. При помощи нестационарных моделей с точечными взаимодействиями, допускающих точное решение, изучались нуклонное туннелирование [1], нейтрализация и перезарядка атомных частиц [2], [3]. Большое число работ посвящено изучению рассеяния частиц на движущихся точечных центрах (см., например, работы [4]). Ряд работ посвящен решению различных вопросов, связанных с поиском точного решения нестационарного уравнения Шредингера [5]–[7]. При этом связанные состояния в системе разбегающихся центров представляются недостаточно изученными. Под “связанными” имеются в виду состояния, описываемые функциями, достаточно быстро (экспоненциально) убывающими по пространственным переменным. По-видимому, впервые связанное состояние в системе разбегающихся центров в одномерной задаче рассматривалось в работе [5]. В настоящей работе изучены связанные состояния для одномерной и трехмерной систем, причем рассматриваются системы, характеризующиеся разной глубиной уровня разбегающихся центров. Решения определяются при помощи опережающей функции Грина.

2. СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА В ОДНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ

Рассмотрим одномерное уравнение Шредингера следующего вида:

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\alpha[\delta(x-vt) + \delta(x+vt)]\psi(x, t). \quad (1)$$

*Всероссийский электротехнический институт им. В.И. Ленина, Москва, Россия. E-mail: churchnev@mail.ru

Здесь $\psi(x, t)$ – пси-функция, используется система единиц, в которой $m = \hbar = e = 1$. При $v = 0$ уравнение (1) имеет решение, описывающее единственное связанное состояние:

$$\psi(x, t) = \text{const} \cdot e^{-2\alpha|x|} e^{2i\alpha^2 t}.$$

Опережающая функция Грина свободного уравнения Шредингера имеет вид

$$G_0^{(-)} = \frac{-\sigma(t' - t)}{\sqrt{-2\pi i(t - t')}} \exp\left\{-\frac{i(x - x')^2}{2(t' - t)}\right\}, \quad (2)$$

где $\sigma(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\sigma(x) = 0$ при $x < 0$.

Уравнение (1) с учетом (2) может быть представлено в интегральной форме

$$\psi(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} \left\{ \exp\left[-\frac{i(x - vt)^2}{2(t' - t)}\right] + \exp\left[-\frac{(x + vt)^2}{2(t' - t)}\right] \right\} \psi(vt', t). \quad (3)$$

Рассмотрим симметричный случай $\psi(x, t) = \psi(-x, t)$. Если обозначить $f(t) = e^{-iv^2 t/2} \psi(vt, t)$, то из (3) следует интегральное уравнение для f :

$$f = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt' f(t')}{\sqrt{t' - t}} \left(1 + \exp\left[-\frac{2iv^2 tt'}{t' - t}\right] \right). \quad (4)$$

Это уравнение может быть приведено к уравнению с разностным ядром посредством замены $t = \tau^{-1}$, $t' = (\tau')^{-1}$, $g(\tau) \equiv f(\tau^{-1})\tau^{-3/2}$. Для образа Лапласа

$$h(p) = \int_0^\infty g(\tau) e^{-p\tau} d\tau$$

можно получить дифференциальное уравнение первого порядка, для решения которого удобно положить $p = q^2/(2i)$. Решение имеет вид

$$h(q) = C_0 \exp\left(i\alpha q - \frac{i\alpha}{2v} e^{-2vq} + \frac{i\alpha}{2v}\right), \quad (5)$$

где множитель $e^{i\alpha/(2v)}$ обеспечивает плавный переход к случаю $v \rightarrow 0$ (при этом C_0 не зависит от v). Обратное преобразование Лапласа позволяет получить следующее решение для $f(t)$:

$$f(t) = -\frac{C_0}{2\pi t^{3/2}} \int_{i\infty}^\infty q \exp\left\{-\frac{iq^2}{2t} + \frac{i\alpha}{2v} - \frac{i\alpha}{2v} e^{-2vq} + i\alpha q\right\} dq. \quad (6)$$

Контур интегрирования в комплексной плоскости q представляет собой два луча $(+\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Использование разложения

$$\exp\left(-\frac{i\alpha}{2v} e^{-2vq}\right) = \sum_s \frac{1}{s!} \left(-\frac{i\alpha}{2v}\right)^s e^{-2svq}$$

приводит к равенству

$$f(t) = \frac{C_0}{\sqrt{2\pi i}} \sum_s \frac{1}{s!} \left(-\frac{i\alpha}{2v}\right)^s (\alpha + 2ivs) \exp\left(\frac{it}{2}(\alpha + 2ivs)^2\right) e^{i\alpha/(2v)}. \quad (7)$$

Чтобы получить решение уравнения (1) в явном виде, следует вычислить интеграл

$$\psi(x, t) = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} f(t') e^{-iv^2 t'/2} \left(\exp\left(-\frac{i(x - vt')^2}{2(t' - t)}\right) + \exp\left(-\frac{i(x + vt')^2}{2(t' - t)}\right) \right).$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \psi(x, t) = \sum_s B_s \exp\left(\frac{it(\alpha + 2ivs)^2}{2} - \frac{iv^2 t}{2}\right) \times \\ \times \left\{ \exp(ivx - (\alpha + 2ivs)|x - vt|) + \exp(-ivx - (\alpha + 2ivs)|x + vt|) \right\}, \quad (8) \end{aligned}$$

где

$$B_s = \frac{\alpha C_0}{\sqrt{2\pi i}} \left(-\frac{i\alpha}{2v}\right)^s e^{i\alpha/2v} \frac{1}{s!}.$$

Выражение (8) совпадает с решением, полученным другим методом в работе [5].

Решение (8) является симметричным по x решением уравнения (1). Если в (8) сумму экспонент в фигурных скобках заменить на их разность, то полученное выражение также будет удовлетворять уравнению (1). Это решение, антисимметричное по x , найдено в работе [2]. Отметим, что если симметричное решение при $v \rightarrow 0$ переходит в связанное состояние одного δ -центра с удвоенной константой связи, то антисимметричное решение при $v \rightarrow 0$ переходит в $\psi \equiv 0$.

3. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ ЦЕНТРОВ С РАЗНОЙ ГЛУБИНОЙ

Рассмотрим несимметричный случай – разбегание δ -центров, характеризующихся различной глубиной связанного уровня. Уравнение Шредингера

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -[\alpha \delta(x - vt) + \beta \delta(x + vt)] \psi$$

в интегральной форме имеет вид

$$\psi = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} \left(\alpha f_1(t') \exp\left(-\frac{i(x - vt')^2}{2(t' - t)}\right) + \beta f_2(t') \exp\left(-\frac{i(x + vt')^2}{2(t' - t)}\right) \right),$$

где $f_1 = e^{-iv^2 t/2} \psi(vt, t)$, $f_2 = e^{-iv^2 t/2} \psi(-vt, t)$. Вместо одного уравнения (4) получим систему

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} f_1(t') + \frac{\beta}{\sqrt{t' - t}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} f_2(t') \exp\left(-\frac{2iv^2 tt'}{t' - t}\right), \\ f_2(t) &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} f_1(t') \exp\left(-\frac{2iv^2 tt'}{t' - t}\right) + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{\sqrt{t' - t}} f_2(t'). \end{aligned} \quad (9)$$

Положим $h_{1,2} = \int_0^\infty g_{1,2}(\tau) e^{-p\tau} d\tau$, где $g_{1,2} = f_{1,2}(\tau^{-1}) \tau^{-3/2}$. Для $h_{1,2}(q)$ (при $p = q^2/(2i)$) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} -\frac{i}{q} \frac{dh_1}{dq} &= \frac{\alpha}{q} h_1 + \frac{\beta}{q} h_2 e^{-2vq}, \\ -\frac{i}{q} \frac{dh_2}{dq} &= \frac{\alpha}{q} h_1 e^{-2vq} + \frac{\beta}{q} h_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Система (10) имеет решение следующего вида:

$$\begin{aligned} h_1 &= e^{(-v-i(\alpha+\beta)/2)} \left\{ C_1 J_{\frac{1}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{4v}}(z) + C_2 J_{\frac{1}{2}-i\frac{\alpha-\beta}{4v}}(z) \right\}, \\ h_2 &= e^{(-v-i(\alpha+\beta)/2)} \left\{ C_3 J_{\frac{1}{2}-i\frac{\alpha-\beta}{4v}}(z) + C_4 J_{\frac{1}{2}+i\frac{\alpha-\beta}{4v}}(z) \right\}, \end{aligned}$$

где $z = \sqrt{\alpha\beta} e^{-2vq}/(2v)$, $J_\nu(z)$ — функция Бесселя, C_i — произвольные константы. В случае $\alpha = \beta$ и симметричного состояния $h_1 \equiv h_2$ при $C_1 = iC_2$ можно получить, что

$$h_1 = h_2 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2v}{\alpha} \exp \left\{ -i\alpha q - e^{-2vq} \frac{i\alpha}{2v} \right\} C_*.$$

При $C_* \sim e^{i\alpha/(2v)}$ решение соответствует случаю, рассмотренному в предыдущем разделе. В общем случае разложение функций Бесселя в ряды позволяет получить решение, описывающее связанное состояние, в следующем виде:

$$\psi(x, t) = e^{-iv^2 t/2} \sum_s \left\{ C_s^{(1)} \varphi_s(z_-, t) e^{ivx} + C_s^{(2)} \chi_s(z_+, t) e^{-ivx} \right\}, \quad (11)$$

где $z_\pm = |x \pm vt|$, $\varphi_s = \exp(-a_s z + ia_s^2 t/2)$, $\chi_s = \exp(-b_s z + ib_s^2 t/2)$. Величины a_s и b_s определяются соотношениями

$$a_{2s+1} = \beta + 2iv(2s+1), \quad b_{2s+1} = \alpha + 2iv(2s+1), \quad a_{2s} = \alpha + 4ivs, \quad b_{2s} = \beta + 4ivs.$$

Коэффициенты $C^{(1)}$ имеют вид

$$C_{2l}^{(1)} = \left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2} \right) C_0 M_l, \quad C_{2l+1}^{(1)} = \frac{\alpha}{4iv} \left(-\frac{\alpha\beta}{16v^2} \right) C_0 N_l,$$

где

$$M_l = \frac{1}{l!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \frac{\alpha-\beta}{4iv})}{\Gamma(\frac{1}{2} + l + \frac{\alpha-\beta}{4iv})}, \quad N_l = \frac{1}{l!} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - \frac{\alpha-\beta}{4iv})}{\Gamma(\frac{3}{2} + l - \frac{\alpha-\beta}{4iv})}.$$

Коэффициенты $C^{(2)}$ получаются из $C^{(1)}$ заменой α на β и β на α . Справедливость выражения (11) может быть проверена непосредственной подстановкой в уравнение. Это решение также было найдено в работе [6].

4. ТРЕХМЕРНАЯ СИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА

В трехмерном случае одного движущегося с постоянной скоростью δ -центра связанное состояние описывается ψ -функцией следующего вида:

$$\psi = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|} \exp \left\{ -\kappa |\mathbf{r} - \mathbf{v}t| + i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) + i\frac{v^2 t}{2} + i\frac{\kappa^2 t}{2} \right\}. \quad (12)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta \psi = \frac{2\pi}{\kappa} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) [(1 - i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t))\psi + (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\nabla \psi]. \quad (13)$$

Константа κ характеризует глубину связанного уровня. Решение уравнения (13) может быть найдено с помощью опережающей функции Грина

$$G_0^{(-)} = \frac{\sigma(t' - t)}{[2\pi i(t' - t)]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2}{2(t' - t)}\right\}.$$

Правая часть уравнения (13) не равна нулю только в точке $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, а в окрестности этой точки $\psi \sim c(t)(1/|\mathbf{r} - \mathbf{v}t| - \kappa + i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)/|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|)$.

Из (13) следует, что

$$\psi = -\frac{2\pi}{(2\pi i)^{3/2}} \int_t^\infty \frac{dt' c(t')}{(t' - t)^{3/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right] \right\}. \quad (14)$$

Если $c(t) = \exp\{i\kappa^2 t/2 + iv^2 t/2\}$, то из (14) следует соотношение (12), т.е. выполнены граничные условия для ψ -функции в точке, где находится δ -центр.

В случае разбегающихся центров уравнение Шредингера имеет вид

$$i\frac{\partial\psi}{\partial t} + \frac{1}{2}\Delta\psi = \frac{2\pi}{\kappa} \left\{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) [(1 - i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t))\psi + (\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\nabla\psi] + \right. \\ \left. + \delta(\mathbf{r} + \mathbf{v}t) [(1 + i\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t))\psi + (\mathbf{r} + \mathbf{v}t)\nabla\psi] \right\}. \quad (15)$$

С учетом того, что $\mathbf{r} = \pm\mathbf{v}t$,

$$\psi \cong c(t) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t|} - \kappa \mp \frac{i\mathbf{v}(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t)}{|\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t|} \right),$$

из (15) следует, что

$$\psi = -\frac{2\pi}{(2\pi i)^{3/2}} \int_t^\infty \frac{dt' c(t')}{(t' - t)^{3/2}} \left\{ \exp\left[-\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right] + \exp\left[-\frac{i(\mathbf{r} + \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right] \right\}. \quad (16)$$

Для того чтобы получить уравнение для $c(t)$, вычислим $\{[1 - i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{r}t) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}t)\nabla]\psi\}|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}t}$. Имеем

$$-\kappa c(t) = -\frac{2\pi}{(2\pi i)^{3/2}} \int_t^\infty \frac{dt' c(t')}{(t' - t)^{3/2}} \left\{ \left[\left(1 - i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) - \frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')}{t' - t} \right) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \exp\left(-\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right) \right] \right|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}t} + \exp\left(-\frac{iv^2(t' + t)^2}{2(t' - t)}\right) \right\}.$$

Положим $c(t) = g(t)e^{iv^2 t/2}$. Первое слагаемое, заключенное в квадратные скобки, прежде чем переходить к пределу $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, проинтегрируем по частям. Подстановку

$$\frac{2}{(t' - t)^{3/2}} \exp\left\{\frac{iv^2 t}{2} - \frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)^2}{2(t' - t)}\right\} g(t') \Big|_{t'=t}^{t'=\infty}$$

будем считать равной нулю. Если записать показатель экспоненты в размерных переменных, то в знаменателе появится параметр $\hbar$. Следует сделать замену $\hbar \rightarrow \hbar(1 + i\varepsilon)$,

где ε — малая положительная величина. При вычислении подстановки при $t' > t$ следует сначала устремить t' к t , а затем положить $\varepsilon = 0$. Отметим, что эта процедура эквивалентна процедуре “вычитания бесконечностей”, описанной в книге [8].

В результате получим уравнение для $g(t)$:

$$g(t) = -\frac{2i}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{\dot{g}(t') dt'}{\sqrt{t' - t}} - \frac{i}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{g(t') dt'}{(t' - t)^{3/2}} \exp\left(\frac{-2iv^2 t}{t' - t}\right). \quad (17)$$

Делая замену $t = \tau^{-1}$, $t' = (\tau')^{-1}$, $g(\tau^{-1}) = h(\tau)\sqrt{\tau}$, можно переписать это уравнение в виде

$$h(\tau) = \frac{i}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int_0^\tau \frac{d\tau' (2h(\tau')\tau' + h(\tau'))}{\sqrt{\tau - \tau'}} - \frac{i\tau}{\kappa\sqrt{2\pi i}} \int_0^\tau \frac{d\tau' h(\tau') \exp\left(\frac{-2iv^2}{\tau - \tau'}\right)}{(\tau - \tau')^{3/2}}. \quad (18)$$

Данное интегральное уравнение характеризуется ядром, зависящим от разности, и может быть решено при помощи преобразования Лапласа. Если положить

$$H(p) = \int_0^\infty e^{-p\tau} h(\tau) d\tau,$$

то можно получить для $H(p)$ дифференциальное уравнение первого порядка

$$\kappa H(p) = -\frac{i}{\sqrt{2ip}} \left(H(p) + 2p \frac{dH}{dp} \right) + \frac{1}{2v} \frac{d}{dp} (H(p) e^{-vq\sqrt{2ip}}).$$

Положим $p = q^2/(2i)$. Тогда уравнение для H можно записать следующим образом:

$$i\kappa H(q)q = a'(q)H + a(q)H', \quad (19)$$

где $a(q) = q - e^{-2vq}/(2v)$, $a' = da/dq = 1 + e^{-2vq}$.

Решение уравнения (19) имеет вид

$$H = \frac{\text{const}}{a(q)} \exp\left(i\kappa \int_0^q \frac{q' dq'}{a(q')}\right). \quad (20)$$

При этом $g(t)$ определяется равенством

$$g(t) = \frac{\text{const}}{\sqrt{t}} \int_L e^{-iq^2/(2t)} q H(q) dq. \quad (21)$$

Контур L представляет собой лучи $(i\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$. Поскольку $c(t) = g(t)e^{iv^2 t/2}$, из (21) следует, что

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = \text{const} \int_t^\infty \frac{dt' e^{iv^2 t'/2}}{(t' - t)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{t'}} \int_L dq q e^{iq^2/(2t')} \frac{1}{a(q)} \exp\left(i\kappa \int_0^q \frac{q' dq'}{a(q')}\right) \times \\ \times \left\{ \exp\left(-\frac{i(\mathbf{r} - \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right) + \exp\left(-\frac{i(\mathbf{r} + \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right) \right\} \equiv \text{const}\{\psi_- + \psi_+\}, \end{aligned}$$

где

$$\psi_\pm = \int_t^\infty \frac{dt' e^{iv^2 t'/2}}{(t' - t)^{3/2} \sqrt{t'}} \int_L dq q e^{-iq^2/(2t')} \frac{1}{a(q)} \exp\left(i\kappa \int_0^q \frac{q' dq'}{a(q')}\right) \exp\left(-\frac{i(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)}\right).$$

Найдем эти функции. Если воспользоваться равенством

$$\frac{1}{\sqrt{t'}} e^{-iq^2/(2t')} = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int dp e^{ip^2 t'/2 - ipq},$$

то можно вычислить интеграл по времени:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{dt'}{(t' - t)^{3/2}} \exp \left\{ \frac{iv^2 t'}{2} + \frac{ip^2 t'}{2} - \frac{i(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)} \right\} = \\ & = \frac{1}{i|\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t|} \exp \left\{ \mp i\mathbf{v}(\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t) + \frac{ip^2 t}{2} + \frac{iv^2 t}{2} - p|\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t| \right\}. \end{aligned}$$

Далее, может быть вычислен интеграл по $p = q^2/(2i)$:

$$\int dp e^{ip^2 t/2 - ipq - pr_\pm} = \sqrt{\frac{2\pi i}{t}} e^{-i(q - ir_\pm)^2/(2t)},$$

где $r_\pm = |\mathbf{r} \pm \mathbf{v}t|$. В результате, опуская несущественный постоянный множитель, получим

$$\psi_\pm = \frac{\exp(iv^2 t/2 \pm i\mathbf{v}\mathbf{r}_\pm)}{r_\pm \sqrt{t}} \int_L \frac{q dq}{a(q)} \exp \left\{ -\frac{i(q - ir_\pm)^2}{2t} + i\kappa \int_0^q \frac{q' dq'}{a(q')} \right\}. \quad (22)$$

Непосредственная подстановка найденных функций в уравнение (15) показывает, что $\psi_- + \psi_+$ удовлетворяет этому уравнению. Отметим, что контур интегрирования L в комплексной плоскости $q = q_1 + iq_2$ должен огибать сверху полюс в точке $q: 2vq = e^{-2vq}$.

Решение (22) аналогично решению (8) для связанного состояния в одномерной задаче. В обоих случаях решение представляет собой сумму двух выражений, зависящих соответственно от r_- и r_+ .

Для трехмерной задачи, однако, связанное состояние не может быть представлено в виде ряда “метастабильных” затухающих уровней. Кроме того, в отличие от одномерной задачи, в пределе $v \rightarrow 0$ состояние не переходит непрерывным образом в связанное состояние одного центра. Это объясняется, по-видимому, наличием операции “вычитания бесконечностей”. При этом в стационарной задаче при стремлении к нулю расстояния между центрами состояние не переходит в связанное состояние одного центра.

5. РАЗБЕГАЮЩИЕСЯ ЦЕНТРЫ С РАЗНОЙ ГЛУБИНОЙ УРОВНЯ В ТРЕХМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ

Так же как и в случае одномерной задачи, для трехмерного случая разбегающихся центров с разной глубиной уровня задача определения связанного состояния может быть сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Вместо соотношения (16) для ψ -функции имеет место соотношение

$$\psi = -\frac{2\pi}{(2\pi i)^{3/2}} \int_t^\infty \frac{dt'}{(t' - t)^{3/2}} \left[\exp \left(-\frac{i(\mathbf{r}' - \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)} \right) c_1(t') + \exp \left(-\frac{i(\mathbf{r}' + \mathbf{v}t')^2}{2(t' - t)} \right) c_2(t') \right], \quad (23)$$

причем

$$\begin{aligned}\psi|_{\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{v}t} &= c_1(t) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|} - \kappa_1 + \frac{i\mathbf{v}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{v}t|} \right), \\ \psi|_{\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{v}t} &= c_2(t) \left(\frac{1}{|\mathbf{r} + \mathbf{v}t|} - \kappa_2 - \frac{i\mathbf{v}(\mathbf{r} + \mathbf{v}t)}{|\mathbf{r} + \mathbf{v}t|} \right).\end{aligned}$$

Пусть $g_{1,2}e^{iv^2t/2} = c_{1,2}(t)$. Тогда из (23) следуют уравнения

$$\begin{aligned}g_1(t) &= -\frac{2i}{\kappa_1\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{\dot{g}_1(t') dt'}{\sqrt{t'-t}} - \frac{i}{\kappa_2\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{g_2(t') \exp(-\frac{2iv^2tt'}{t'-t}) dt'}{(t'-t)^{3/2}}, \\ g_2(t) &= -\frac{i}{\kappa_1\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{g_1(t') \exp(-\frac{2iv^2tt'}{t'-t}) dt'}{(t'-t)^{3/2}} - \frac{2i}{\kappa_2\sqrt{2\pi i}} \int_t^\infty \frac{\dot{g}_2(t') dt'}{\sqrt{t'-t}}.\end{aligned}$$

Положим $g_{1,2}(\tau^{-1}) = h_{1,2}(\tau)\sqrt{\tau}$, тогда для образов Лапласа $H_{1,2}(p)$ функций $h_{1,2}(\tau)$ можно получить уравнения

$$\begin{aligned}i\kappa_1 q H_1(q) &= H_1(q) + q \frac{dH}{dq} - \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \frac{1}{2v} e^{-2vq} \frac{dH_2}{dq} + \frac{\kappa_1}{\kappa_2} e^{-2vq} H_2, \\ i\kappa_2 q H_2(q) &= H_2(q) + q \frac{dH_2}{dq} - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \frac{1}{2v} e^{-2vq} \frac{dH_1}{dq} + \frac{\kappa_2}{\kappa_1} e^{-2vq} H_1.\end{aligned}\tag{24}$$

Система (24) не имеет, по-видимому, достаточно простого решения, выражаемого через какие-либо известные функции.

При помощи соотношения (23) решение для ψ -функции может быть представлено в виде достаточно сложных интегралов от функций $H_{1,2}(q)$.

Список литературы

- [1] *G. Breit.* Ann. Phys. 1965. V. 34. P. 377; *G. Herling, Y. Nishida.* Ann. Phys. 1965. V. 34. P. 400; *Y. Nishida.* Ann. Phys. 1965. V. 34. P. 415.
- [2] *W. Däppen.* J. Phys. B. 1977. V. 10. P. 2399.
- [3] *С. К. Жданов, А. С. Чихачев.* Нейтрализация и перезарядка частиц в одномерной модели. Деп. ВИНТИ № 2221-74. М.: ВИНТИ; *H. Danared.* J. Phys. B. 1984. V. 17. P. 2619; *Е. А. Соловьев.* ТМФ. 1976. Т. 28. С. 240.
- [4] *J. H. Macek, S. Yu. Ovchinnikov, E. A. Solov'ev.* Phys. Rev. A. 1999. V. 60. № 2. P. 1140; *M. J. Rakovic, E. A. Solov'ev.* Phys. Rev. A. 1990. V. 41. № 1. P. 3635; *J. Burgdörfer, J. Wang, A. Barany.* Phys. Rev. A. 1988. V. 38. P. 4919; *J. Wang, J. Burgdörfer, A. Barany.* Phys. Rev. A. 1991. V. 43. P. 4036.
- [5] *С. К. Жданов, А. С. Чихачев.* ДАН СССР. 1974. Т. 218. С. 1323.
- [6] *В. И. Манько, А. С. Чихачев.* ЖЭТФ. 1998. Т. 113. С. 606.
- [7] *G. Scheitler, M. Kleber.* Phys. Rev. A. 1990. V. 42. P. 55; *В. И. Манько, А. С. Чихачев.* ЯФ. 2001. Т. 64. № 8. С. 1533; *А. С. Чихачев.* ЖЭТФ. 2004. Т. 125. С. 1012.
- [8] *Ю. Н. Демков, В. Н. Островский.* Метод потенциалов нулевого радиуса действия в атомной физике. Л.: Изд-во ЛГУ, 1975.

Поступила в редакцию 9.II.2005 г.,
после доработки 15.IV.2005 г.