Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Кукулин, О. А. Рубцова, Решение задачи рассеяния заряженных частиц с помощью пакетной дискретизации континуума, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 393–410

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1908>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 03:40:28

© 2005 г.

В. И. Кукулин*, О. А. Рубцова*

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПОМОЩЬЮ ПАКЕТНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ КОНТИНУУМА

Проводится обобщение метода пакетной дискретизации континуума, развитого авторами ранее, для учета дальнего кулоновского отталкивания при взаимодействии заряженных частиц. Выводится аналитическая конечномерная аппроксимация точной кулоновской резольвенты в базисе кулоновских стационарных волновых пакетов. Нахождение так называемых дополнительных парциальных фазовых сдвигов рассеяния, возникающих за счет дополнительного короткодействующего взаимодействия, в развитом подходе сводится к простой матричной алгебре, причем для расчетов может быть использован произвольный полный L_2 -базис.

Ключевые слова: квантовая теория рассеяния, волновые пакеты, дискретизация континуума, вычислительные методы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хорошо известно, что при решении квантовых задач рассеяния при наличии кулоновского дальнего взаимодействия возникает ряд сложностей, особенно для многочастичного рассеяния. В частности, трехчастичные интегральные уравнения Фаддеева, имеющие компактные ядра в случае короткодействующих взаимодействий [1], становятся нефредгольмовыми при рассеянии заряженных частиц в области энергий выше трехчастичного порога. Большинство методов, предложенных до сих пор для обхода этих сложностей, основано на замене чисто кулоновских потенциалов с бесконечным радиусом действия на потенциалы Юкавы $V \sim e^{-\mu r}/r$ с конечным (но большим) радиусом действия $r_0 \sim \mu^{-1}$ с дальнейшим переходом к пределу $\mu \rightarrow 0$ в конечном выражении для амплитуды рассеяния [2]. Однако переход к кулоновскому пределу в таком подходе требует большой осторожности и далеко не всегда ясно определен.

Можно, однако, попытаться решить эти задачи рассеяния на основе совсем другого подхода, основанного на дискретизации континуума, в том числе и кулоновского, с помощью техники волновых пакетов (ВП), предложенной нами в серии предыдущих работ [3]–[5]. Идея применения пакетной техники к кулоновским задачам связана с двумя важными моментами. Во-первых, использование стационарных ВП аналогично решению задачи рассеяния в конечном ящике, вне которого пакетные волновые функции

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: kukulin@nucl-th.sinp.msu.ru, rubtsova@nucl-th.sinp.msu.ru

быстро спадают к нулю. При этом все потенциалы взаимодействия, включая далекодействующие, проецируются на полный базис пакетных состояний и тем самым естественным образом эффективно обрезаются. Во-вторых, в такой дискретизации возможен переход к чисто дискретному энергетическому спектру, в котором каждому значению энергии отвечает энергетический интервал в разбиении исходного непрерывного спектра на дискретные полосы, причем ширины этих полос прямо связаны с эффективным радиусом потенциала в соответствующем конечномерном подпространстве стационарных ВП. Поскольку в реальных экспериментах по рассеянию разрешающая способность (по энергии и углам рассеяния) регистрирующей аппаратуры всегда конечна, то именно формулировка теории рассеяния в терминах конечных ВП в наиболее близкой степени отвечает экспериментальной ситуации.

В нестационарной теории рассеяния такое соответствие давно известно [6] и широко используется для строгого обоснования формализма в терминах in- и out-состояний. В отличие от этого временного подхода, мы используем формализм стационарных, т.е. не зависящих от времени, ВП (их первоначальное название – собственные дифференциалы [7], [8]) и применяем этот подход в настоящей работе для решения задач рассеяния в случае суперпозиции короткодействующего и кулоновского потенциалов взаимодействия частиц.

В наших предыдущих работах мы показали, что этот подход, который мы будем называть здесь *методом пакетной дискретизации континуума* (МПДК), основан на двух следующих положениях.

Первое положение связано с использованием формализма стационарных ВП – базисных функций, представляющих собой интегралы от функций непрерывного спектра некоторого гамильтониана H по узким энергетическим полосам, определяющим разбиение (*дискретизацию*) этого спектра. Были подробно изучены свойства ВП. Главное из этих свойств состоит в том, что матрица оператора Грина, отвечающего гамильтониану взаимодействия, является диагональной в базисе ВП, причем ее собственные значения определяются аналитически и зависят только от параметров дискретизации. Такое конечномерное матричное представление оператора Грина позволяет использовать интегральную формулировку теории рассеяния и избежать явного учета граничных условий при нахождении амплитуд рассеяния. На основе МПДК были получены конечномерные аппроксимации других операторов теории рассеяния, при этом определение наблюдаемых величин в случае короткодействующих операторов взаимодействия было сведено к простой матричной алгебре (см. [4]).

Второе положение МПДК связано с новой интерпретацией собственных состояний матрицы гамильтониана H , найденных в некотором конечномерном L_2 -базисе и отвечающих области непрерывного спектра H . В данной работе мы будем называть их *псевдосостояниями*. На примере осцилляторного базиса было показано [3]–[5], что такие функции можно рассматривать как аппроксимации для ВП, если параметры разбиения непрерывного спектра, порождаемые этими двумя типами дискретизации, совпадают. Поэтому, заменяя ВП в аналитических представлениях для операторов теории рассеяния на функции псевдосостояний, можно получить представления для этих операторов в выбранном L_2 -базисе. Таким образом, МПДК позволяет эффективно использовать L_2 -базисы в комбинации с интегральными уравнениями для нахождения наблюдаемых в задаче рассеяния.

Нами были рассмотрены разные варианты пакетного формализма [3]–[5]. Были введены, в частности, два типа пакетных состояний: возмущенные и свободные. *Возмущенные* волновые пакеты (ВВП) строятся из собственных функций непрерывного спектра *полного* гамильтониана системы. При этом матрица полного оператора Грина имеет аналитический диагональный вид в этом базисе. При замене ВВП псевдосостояниями, полученными на основе диагонализации матрицы полного гамильтониана в некотором L_2 -базисе, задача нахождения парциальных амплитуд рассеяния или фазовых сдвигов в широком диапазоне энергий сводится к однократной диагонализации матрицы гамильтониана в выбранном базисе. Таким образом, даже чисто вычислительный аспект задачи рассеяния кардинально упрощается. *Свободные* волновые пакеты (СВП) отвечают *свободному* гамильтониану системы. Решение задачи здесь сводится к однократной диагонализации матрицы свободного гамильтониана и последующему обращению матрицы перехода при каждом значении энергии. Техника СВП при численной реализации несколько более трудоемка, чем техника ВВП, однако она позволяет рассматривать системы с комплексными или явно зависящими от энергии операторами взаимодействия.

В данной работе мы проводим обобщение развитого метода на случай, когда потенциал взаимодействия является суперпозицией дальнегодействующего кулоновского отталкивания и короткодействующего потенциала. Для этого вводится базис стационарных кулоновских волновых пакетов (КВП), которые строятся из регулярных кулоновских функций. Как оказалось, такие состояния уже были использованы Бете много лет назад для нахождения нормировки (в явном виде) функций непрерывного спектра кулоновского гамильтониана [9]. Мы же используем L_2 -базис таких состояний для решения кулоновской задачи рассеяния. В настоящей работе демонстрируется, что свойства КВП такие же, как и у других типов пакетных состояний. В частности, матрица кулоновского оператора Грина является диагональной и имеет явный аналитический вид в этом базисе. Весь формализм в точности повторяет развитый нами ранее формализм СВП. Поэтому большая часть данной работы посвящена рассмотрению общих вопросов пакетной дискретизации, не изученных ранее в работах [3]–[5].

Структура работы следующая. В разделе 2 излагается формализм КВП, изучаются их свойства, пространственное поведение, строятся конечномерные аппроксимации полной резольвенты системы и оператора перехода. Раздел 3 посвящен численным иллюстрациям. Для построения базиса КВП используется неортогональный комплексный гауссов базис, который оказывается чрезвычайно удобным и универсальным для построения пакетных состояний. В этом базисе находятся парциальные фазовые сдвиги $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния, которые хорошо согласуются с результатами прямого численного решения уравнения Шредингера. В разделе 4 сформулированы основные выводы данной работы.

2. ФОРМАЛИЗМ КУЛОНОВСКИХ ВОЛНОВЫХ ПАКЕТОВ

2.1. КВП и их свойства. Гамильтониан, описывающий взаимодействие пары заряженных частиц в атомной или ядерной физике, имеет вид

$$H = H_0 + \frac{Z_1 Z_2 e^2}{r} + V_S(r) \equiv H_C + V_S(r), \quad (1)$$

где H_0 – оператор кинетической энергии относительного движения пары, V_S – короткодействующий оператор взаимодействия между частицами (сферически-симметричный

для простоты), Z_1 и Z_2 – величины зарядов частиц и H_C – гамильтониан, учитывающий только кулоновское отталкивание между частицами.

При фиксированном значении орбитального момента l набор регулярных кулоновских функций $|F_l(E)\rangle$ образует полный базис с условием нормировки на δ -функцию

$$\langle F_l(E)|F_l(E')\rangle = \delta(E - E'). \quad (2)$$

Разобьем непрерывный спектр кулоновского гамильтониана H_C (в парциальной волне l) на энергетические полосы:

$$0 = \mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_1 < \dots < \mathcal{E}_i < \dots < \mathcal{E}_N, \quad \Delta_i = \mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{i-1}, \quad (3)$$

где Δ_i – ширины энергетических полос. В каждой полосе определим стационарные КВП $|X_i^C\rangle$ как интегралы от регулярных кулоновских функций $|F_l(E)\rangle$ по энергии:

$$|X_i^C\rangle = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i}} \int_{\mathcal{E}_{i-1}}^{\mathcal{E}_i} |F_l(E)\rangle dE, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4)$$

Свойства КВП аналогичны свойствам свободных и возмущенных стационарных ВП, изученным подробно в работах [3]–[5]. Повторим их здесь кратко для наглядности.

Функции $\{|X_i^C\rangle\}_{i=1}^N$ образуют ортонормированный набор:

$$\langle X_i^C | X_j^C \rangle = \delta_{ij}, \quad (5)$$

что следует непосредственно из определения (4) и ортогональности функций $|F_l(E)\rangle$. Определим проектор $\hat{P}_C$ на подпространство КВП:

$$\hat{P}_C = \sum_{i=1}^N |X_i^C\rangle \langle X_i^C|. \quad (6)$$

Из определения (4) также следует проекционное свойство (см. [4]):

$$\hat{P}_C |F_l(E)\rangle = \begin{cases} \frac{|X_k^C\rangle}{\sqrt{\Delta_k}}, & E \in (\mathcal{E}_{k-1}, \mathcal{E}_k), \\ 0, & E \notin (0, \mathcal{E}_N), \end{cases} \quad (7)$$

которое означает, что проекция регулярных кулоновских функций на подпространство ВП не зависит от энергии внутри каждого интервала.

Покажем, что КВП являются точными собственными состояниями конечномерной проекции любого оператора, зависящего функционально от H_C , на пакетное подпространство. Рассмотрим операторную функцию $R(H_C)$. Запишем для нее спектральное представление по полному набору состояний $|F_l(E)\rangle$ (при фиксированном l):

$$R(H_C) = \int_0^\infty dE' R(E') |F_l(E')\rangle \langle F_l(E')|.$$

Действуя справа и слева на это выражение оператором проектирования $\hat{P}_C$ и применяя проекционное свойство (7), получаем конечномерное “пакетное представление” оператора $R(H_C)$:

$$\hat{R}(H_C) \equiv \hat{P}_C R(H_C) \hat{P}_C = \sum_{i=1}^N |X_i^C\rangle \langle X_i^C| R_i. \quad (8)$$

Таким образом, $|X_i^C\rangle$ являются собственными состояниями конечномерного оператора $\hat{R}(H_C)$, причем соответствующие собственные значения имеют явный вид

$$R_i \equiv \frac{1}{\Delta_i} \int_{\mathcal{E}_{i-1}}^{\mathcal{E}_i} dE' R(E').$$

Из свойства (8), в частности, следует, что КВП являются собственными состояниями конечномерной проекции самого гамильтониана H_C :

$$\hat{H}_C \equiv \hat{P}_C H_C \hat{P}_C = \sum_{i=1}^N \mathcal{E}_i^* |X_i^C\rangle \langle X_i^C|, \quad (9)$$

причем соответствующие собственные значения оператора $\hat{H}_C$ — это средние точки энергетических интервалов $\mathcal{E}_i^*$:

$$\mathcal{E}_i^* = \frac{1}{2}(\mathcal{E}_i + \mathcal{E}_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (10)$$

Аналогично могут быть найдены в явном виде собственные значения матрицы кулоновского оператора Грина, которые мы рассмотрим ниже.

Следует отметить, что свойства КВП схожи со свойствами псевдосостояний, получаемых при диагонализации матрицы кулоновского гамильтониана H_C в некотором L_2 -базисе. Ранее мы показали, что для свободного гамильтониана эти два типа состояний практически совпадают в ограниченной области пространства (на конечном носителе), если совпадают соответствующие дискретные наборы собственных значений матриц гамильтониана в пакетном и выбранном L_2 -базисах. В разделе 3 мы покажем, что это свойство сохраняется и в случае кулоновского взаимодействия.

2.2. Поведение КВП в координатном пространстве. Как следует из свойства (5), КВП — квадратично-интегрируемые функции, в отличие от исходных регулярных кулоновских функций. Однако, как будет показано ниже, они почти точно совпадают с точными регулярными кулоновскими волновыми функциями в большой области конфигурационного пространства, причем эта область тем шире, чем меньше ширины энергетических полос разбиения.

Раскладывая ряд по энергии подынтегральное выражение в определении (4), получаем следующее соотношение между точными и пакетными состояниями:

$$|X_i^C\rangle \approx \sqrt{\Delta_i} \{ |F_l(\mathcal{E}_i^*)\rangle + O(\Delta_i^2) \}. \quad (11)$$

Это соотношение выполняется только в ограниченной области координатного пространства $r < R_{\max}$. Далее пакетные функции, будучи квадратично-интегрируемыми, должны быстро спадать к нулю. Посмотрим, каким образом это происходит. Подставим в определение КВП выражение для регулярных кулоновских функций $F_l(E, r)$ в асимптотической области:

$$X_i^C(r) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_i}} \int_{\mathcal{E}_{i-1}}^{\mathcal{E}_i} dE \sqrt{\frac{2m}{\pi k \hbar^2}} \frac{\sin(kr + \eta \ln(kr) + \sigma_l(E) - l\pi/2)}{r}, \quad kr \gg 1,$$

где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ – волновое число, $\eta = Z_1 Z_2 m / (k\hbar^2)$ – кулоновский параметр. При достаточно малой ширине интервала Δ_i можно приближенно считать, что основное изменение подынтегральной функции на интервале интегрирования происходит за счет аргумента kr функции синуса. Интегрируя и упрощая, получаем приближенное выражение для КВП в асимптотической области:

$$X_i^C(r) \approx \sqrt{\Delta_i} F_l(\mathcal{E}_i^*, r) \frac{\sin(\delta_i r)}{\delta_i r}, \quad kr \gg 1, \quad \delta_i = \frac{\Delta_i}{\sqrt{8\mathcal{E}_i^*}} \sqrt{\frac{m}{\hbar^2}}. \quad (12)$$

Отметим, что соотношение (12) в точности соответствует формуле (7) из работы [3], отражающей связь между ВВП и точными функциями рассеяния на короткодействующем потенциале.

Таким образом, КВП отличаются от исходных регулярных кулоновских функций убывающим множителем $\sin(\delta_i r)/(\delta_i r)$. При этом область, внутри которой это убывание не проявляется, определяется неравенством

$$r \ll R_{\max}^i, \quad R_{\max}^i = \frac{1}{\delta_i} = \frac{\sqrt{8\mathcal{E}_i^*}}{\Delta_i} \sqrt{\frac{\hbar^2}{m}}. \quad (13)$$

Заметим, что условие $kR_{\max}^i \gg 1$, необходимое для того, чтобы ВП содержал асимптотическую часть исходной функции рассеяния, сводится к неравенству для отношения ширины i -го интервала к собственному значению энергии на этом интервале

$$\frac{\Delta_i}{4\mathcal{E}_i^*} \ll 1, \quad (14)$$

которое выполняется в разной степени для всех интервалов $i = 1, 2, \dots, N$. Хуже всего условие (14) выполняется для первого интервала, поскольку $\Delta_1 = 2\mathcal{E}_1^*$. Вместе с тем с увеличением номера интервала отношение ширины к среднему значению энергии уменьшается.

Подчеркнем здесь, что для границы конечного носителя $R_{\max}^i$ на каждом интервале в случае СВП и ВВП мы получили точно такое же выражение (см. формулу (9) в работе [3]). Таким образом, дальнодействующий характер кулоновского взаимодействия не вносит существенных изменений в общий пакетный формализм.

2.3. Конечномерное представление резольвенты. Определим, как обычно, кулоновский оператор Грина:

$$G_C^{(\pm)}(E) = [E + i0 - H_C]^{-1}. \quad (15)$$

Используя формулу (8), получаем конечномерную проекцию кулоновской резольвенты на подпространство КВП:

$$\hat{G}_C^{(\pm)}(E) = \sum_{k=1}^N g_k^{(\pm)}(E) |X_k^C\rangle \langle X_k^C|, \quad (16)$$

где собственные значения $g_k^{(\pm)}(E)$ равны

$$\begin{aligned} g_k^{(\pm)}(E) &\equiv \frac{1}{\Delta_k} \int_{\mathcal{E}_{k-1}}^{\mathcal{E}_k} dE' \frac{1}{E + i0 - E'} = \\ &= \frac{1}{\Delta_k} \ln \left| \frac{\mathcal{E}_{k-1} - E}{\mathcal{E}_k - E} \right| - i\pi \frac{\delta_{kk_0}}{\Delta_{k_0}}, \quad E \in (\mathcal{E}_{k_0-1}, \mathcal{E}_{k_0}). \end{aligned} \quad (17)$$

Подчеркнем, что такой явный вид для проекции резольвенты является следствием определения КВП, поэтому собственные значения g_k зависят только от параметров разбиения спектра $\mathcal{E}_k$ и имеют вид, аналогичный виду собственных значений проекции резольвенты свободного гамильтониана на подпространство СВП (см. [4]).

Резольвента полного гамильтониана

$$G^{(\pm)}(E) = [E + i0 - H]^{-1} \quad (18)$$

связана с кулоновской резольвентой $G_C^{(\pm)}(E)$ известным тождеством:

$$G^{(\pm)}(E) = G_C^{(\pm)}(E) + G_C^{(\pm)}(E)V_S G^{(\pm)}(E).$$

Для короткодействующего потенциала взаимодействия V_S можно записать приближенную аппроксимацию через проекцию $\hat{V}_S$ этого оператора на подпространство КВП:

$$V_S \rightarrow \hat{V}_S = \hat{P}_C V_S \hat{P}_C. \quad (19)$$

Тогда, действуя справа и слева проекторами $\hat{P}_C$ на резольвентное тождество, получаем следующее уравнение с конечномерным ядром для проекции полной резольвенты:

$$\hat{G}^{(\pm)} = \hat{G}_C^{(\pm)} + \hat{G}_C^{(\pm)} \hat{V}_S \hat{G}^{(\pm)}, \quad (20)$$

которое является по сути матричным. Его решение имеет вид

$$\hat{G}^{(\pm)} = [(\hat{G}_C^{(\pm)})^{-1} - \hat{V}_S]^{-1}, \quad (21)$$

где обратные операторы определены в подпространстве КВП.

Подчеркнем, что $\hat{G}^{(\pm)}$ – это пакетная проекция *точного* оператора Грина, отвечающего суперпозиции *точного* кулоновского потенциала и проекции короткодействующего потенциала $\hat{V}_S$. Однако она имеет особенности в граничных точках интервалов, как и проекция чисто кулоновской резольвенты $\hat{G}_C^{(\pm)}$. Для уменьшения влияния этих особенностей в работе [5] было предложено использовать поправочные слагаемые для аппроксимации резольвенты. В настоящей работе мы предлагаем другой способ исключения указанных особенностей.

2.4. Полностью дискретный подход. Вместо непрерывной по энергии аппроксимации $\hat{G}_C^{(+)}(E)$ на каждом интервале будем рассматривать некоторый усредненный по энергии оператор, например

$$\hat{G}_C^i = \frac{1}{\Delta_i} \int_{\mathcal{E}_{i-1}}^{\mathcal{E}_i} \hat{G}_C^{(+)}(E) dE, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

Разложения для этих операторов по базисному набору пакетных состояний имеют вид, аналогичный (16):

$$\hat{G}_C^i = \sum_{k=1}^N g_k^i |X_k^C\rangle \langle X_k^C|, \quad (23)$$

где соответствующие собственные значения g_k^i уже не зависят непрерывным образом от энергии, а являются чисто дискретными величинами (т.е. числами):

$$g_k^i = -\frac{1}{\Delta_i \Delta_k} [(\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_k) \ln |\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_k| + (\mathcal{E}_{i-1} - \mathcal{E}_{k-1}) \ln |\mathcal{E}_{i-1} - \mathcal{E}_{k-1}| - (\mathcal{E}_{i-1} - \mathcal{E}_k) \ln |\mathcal{E}_{i-1} - \mathcal{E}_k| - (\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{k-1}) \ln |\mathcal{E}_i - \mathcal{E}_{k-1}|] - i \frac{\pi}{\Delta_i} \delta_{ik}. \quad (24)$$

Ниже мы покажем, что такое усреднение позволяет полностью исключить влияние логарифмических особенностей по энергии в пакетном представлении для резольвенты гамильтониана. При этом все основные операторы теории рассеяния становятся чисто дискретными по энергии объектами, т.е. числовыми матрицами, все элементы которых зависят от энергии чисто дискретным “гистограммным” образом. Соответственно T -матрица или амплитуда рассеяния также становятся чисто дискретными объектами. Поэтому при параметризации амплитуды рассеяния через парциальные фазовые сдвиги последние также становятся чисто дискретными функциями энергии, которые могут быть представлены гистограммами (см. иллюстрации в разделе 3).

2.5. T -матрица. Согласно [10] в случае, когда полное взаимодействие является суперпозицией кулоновского и короткодействующего потенциалов, удобно разбить T -матрицу на две части: чисто кулоновскую и добавочную, связанную с добавочным фазовым сдвигом:

$$T(E_1, E_2; E) = T_C(E_1, E_2; E) + T_{ad}(E_1, E_2; E). \quad (25)$$

Добавочная T -матрица, обусловленная влиянием короткодействующей части потенциала, определяется согласно известной формуле:

$$\begin{aligned} T_{ad}(E_1, E_2; E) &= \langle F_l^{(-)}(E_1) | \tilde{T}(E) | F_l^{(+)}(E) \rangle = \\ &= e^{i(\sigma_l(E_1) + \sigma_l(E_2))} \langle F_l(E_1) | \tilde{T}(E) | F_l(E_2) \rangle, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\sigma_l(E)$ – парциальный кулоновский фазовый сдвиг, $F_l^{(-)}$ и $F_l^{(+)}$ – кулоновские функции, представляющие на асимптотике сходящиеся и расходящиеся волны, $\tilde{T}(E)$ – добавочный оператор перехода, определяемый как

$$\tilde{T}(E) = V_S + V_S G^{(+)}(E) V_S. \quad (27)$$

Этот оператор удовлетворяет интегральному уравнению

$$\tilde{T}(E) = V_S + V_S G_C^{(+)}(E) \tilde{T}(E). \quad (28)$$

В случае конечномерного потенциала взаимодействия (19) последнее уравнение становится матричным. Применяя рассмотренную выше чисто дискретную конечномерную аппроксимацию кулоновского оператора Грина, вместо непрерывного по энергии оператора перехода получаем набор конечномерных операторов:

$$\hat{\tilde{T}}_k = \hat{V}_S + \hat{V}_S \hat{G}_C^k \hat{\tilde{T}}_k, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (29)$$

где операторы $\hat{G}_C^k$ определяются согласно (22). Для элемента добавочной T -матрицы вне массовой поверхности получаем следующую полностью дискретизованную по всем трем энергиям аппроксимацию:

$$T_{\text{ad}}(E_1, E_2; E) \approx e^{i(\sigma_l(E_1) + \sigma_l(E_2))} \frac{\langle X_{k_1}^C | [(\hat{V}_S)^{-1} - \hat{G}_C^k]^{-1} | X_{k_2}^C \rangle}{\sqrt{\Delta_{k_1} \Delta_{k_2}}}, \quad (30)$$

$$E_1 \in (\mathcal{E}_{k_1-1}, \mathcal{E}_{k_1}), \quad E_2 \in (\mathcal{E}_{k_2-1}, \mathcal{E}_{k_2}), \quad E \in (\mathcal{E}_{k-1}, \mathcal{E}_k).$$

На массовой поверхности элемент T -матрицы связан с добавочным парциальным фазовым сдвигом $\delta_l(E)$ соотношением

$$T_{\text{ad}}(E_1, E_2; E) \big|_{E_1=E, E_2=E} = - \frac{e^{i(2\sigma_l(E) + \delta_l(E))} \sin \delta_l(E)}{\pi}.$$

Используем формулу (30) на массовой поверхности и факторизуем множитель, включающий чисто кулоновский парциальный фазовый сдвиг. Тогда аппроксимация добавочного парциального фазового сдвига может быть найдена в пакетном подходе из равенства

$$\frac{e^{i\delta_l(E)} \sin \delta_l(E)}{\pi} \approx - \frac{\langle X_k^C | [(\hat{V}_S)^{-1} - \hat{G}_C^k]^{-1} | X_k^C \rangle}{\Delta_k}, \quad E \in (\mathcal{E}_{k-1}, \mathcal{E}_k). \quad (31)$$

Эта формула аналогична соотношению, полученному в формализме СВП для чисто короткодействующего взаимодействия нейтральных частиц [4].

Таким образом, мы показали, что алгоритм нахождения дополнительных парциальных фазовых сдвигов также сводится к матричному обращению в случае, когда взаимодействие частиц является суперпозицией дальнегодействующего кулоновского и короткодействующего потенциалов.

3. ЧИСЛЕННЫЕ ИЛЛЮСТРАЦИИ

В качестве конкретной физической задачи мы будем рассматривать рассеяние двух α -частиц, взаимодействующих посредством дальнегодействующего кулоновского отталкивания и короткодействующего ядерного притяжения.

3.1. Построение КВП в гауссовом базисе. Для нахождения парциальных фазовых сдвигов кулон-ядерного рассеяния построим сначала базис КВП, отвечающих чисто кулоновскому гамильтониану

$$H_C = H_0 + \frac{4e^2}{r},$$

описывающему отталкивание двух точечных α -частиц.

В работах [3]–[5] было показано, что хорошим приближением для точных ВП являются дискретные псевдосостояния, представляющие собой собственные состояния матрицы гамильтониана в некотором полном L_2 -базисе. Проверим это свойство и для случая КВП, используя предложенный в [11] комплексный гауссов базис.

3.1.1. *Комплексный гауссов базис и его свойства.* Рассмотрим неортогональный полный базис гауссова типа:

$$\psi_{ln}(r) = r^l e^{-\alpha_n r^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (32)$$

где α_n – масштабные параметры. Условие полноты такого базиса можно сформулировать как условие на параметры α_n [12]. Базисы (32) с различными распределениями параметров α_n широко используются в квантово-механических расчетах, в частности в атомной физике и квантовой химии. Однако при использовании таких сильно перекрывающихся базисных функций возникают проблемы, связанные с тем, что функции $\psi_{nl}(r)$ численно становятся почти линейно зависимыми при увеличении размерности базиса (при заданной точности вычислений). В результате в практических расчетах приходится ограничивать размерность такого базиса несколькими десятками функций.

Можно попытаться обойти эту проблему, вводя в базисные функции (32) дополнительные осциллирующие множители. Так, в работе [11] был предложен модифицированный набор функций следующего вида:

$$\phi_{ln}(r) = r^l e^{-\alpha_n r^2} \cos \beta_n r^2, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (33)$$

где β_n – дополнительные масштабные параметры. Функции (33) определяются через гауссианы с комплексными параметрами:

$$\phi_{nl}(r) = \frac{1}{2} r^l \{ e^{-(\alpha_n + i\beta_n)r^2} + e^{-(\alpha_n - i\beta_n)r^2} \}.$$

Поэтому базис (33) называют комплексным гауссовым базисом. Он является очень гибким, так как в каждой базисной функции можно легко регулировать соотношение между скоростью спада и частотой осцилляций при $r \rightarrow \infty$ путем выбора подходящих значений α_n и β_n , причем число членов ряда N с различными α_n и β_n может быть взято равным нескольким сотням. Более того, благодаря своему осциллирующему поведению функции комплексного гауссова базиса должны хорошо подходить для описания спектров сильно возбужденных состояний квантовых систем и состояний рассеяния. При этом видно, что для нахождения матричных элементов гамильтонианов и операторов взаимодействия в базисе (33) можно пользоваться теми же общими формулами, что и для чисто гауссова базиса (32), которые для широкого класса потенциалов взаимодействия имеют аналитический вид (см., например, [13]).

Таким образом, комплексный базис является очень удобным именно для аппроксимации пакетных состояний. Некоторой проблемой остается весьма большой произвол в выборе параметров α_n и β_n . Поэтому введем некоторую связь между ними.

Именно, будем считать, что параметры β_n связаны с параметрами α_n простым соотношением $\beta_n = \xi \alpha_n$, где ξ – некоторое число, общее для всех n . Оценим, какими должны быть значения этого параметра, исходя из того условия, чтобы поведение каждой базисной функции $\psi_{nl}(r)$ исходного базиса (32) не сильно менялось на ее характерном радиальном масштабе за счет осциллирующего множителя при построении функции $\phi_{nl}(r)$ комплексного базиса (33). Прежде всего заметим, что с ростом ξ период осцилляций будет уменьшаться, а их влияние усиливаться (см. рис. 1). Характерный радиальный масштаб каждой гауссовой функции определяется как $r_0 = 1/\sqrt{\alpha_n}$ при $l = 0$ и $r_l = \sqrt{2l/\alpha_n}$ при $l \neq 0$. В то же время первый нуль функции $\phi_{nl}(r)$ расположен на

расстоянии $R = \sqrt{\pi/(2\xi\alpha_n)}$. Приравнявая $R = r_l$, получаем предельные значения для параметра ξ :

$$\xi_l = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & l = 0, \\ \frac{\pi}{4l}, & l \neq 0, \end{cases}$$

ниже которых влияние осциллирующих множителей на исходные гауссианы будет очень слабым, и поэтому следует ожидать, что результаты, полученные при использовании базисов (32) и (33), будут похожими. При увеличении ξ выше указанных предельных значений функции комплексного базиса будут все более заметно отличаться от чистых гауссиан.

При $l \neq 0$ можно сделать верхнюю оценку для значения ξ , предполагая, что первый нуль функции комплексного базиса находится дальше максимума вещественной гауссовой функции. Функция $\psi_{nl}(r)$ имеет максимум при

$$r = R_{\max} = \sqrt{\frac{l}{2\alpha_n}}.$$

Сравнивая значения R и $R_{\max}$ и учитывая предельное значение ξ_l , получаем, что при $l \neq 0$ “интересная” область значений параметров ξ , в которой функции комплексного базиса хотя и отличаются от функций исходного вещественного базиса, но не слишком сильно, определяется неравенством

$$\frac{\pi}{4l} \leq \xi < \frac{\pi}{l}, \quad l \neq 0. \quad (34)$$

Для случая $l = 0$ такого строгого условия для верхней границы уже нет. Однако ясно, что ξ должна быть величиной, не сильно превышающей π .

Для наглядности на рис. 1 приведены волновые функции комплексного гауссова базиса

$$\phi_l(r) = r^l e^{-\alpha r^2} \cos(\xi \alpha r^2)$$

в сравнении с исходными функциями вещественного гауссова базиса ($\xi = 0$) при разных значениях ξ для разных парциальных волн. Для каждого $l \neq 0$ значения ξ выбраны из интервала (34).

Следует подчеркнуть, что оценки для параметра ξ мы делали исходя из условия, что исходный гауссов базис $\psi_{nl}(r)$ является полным (что определяется распределением значений параметров α_n), и его функции должны не сильно искажаться, чтобы результирующий комплексный базис был также близок к полному. Конечно же, можно построить полные комплексные базисы и при других соотношениях между нелинейными параметрами базиса α_n и β_n , однако это требует отдельного исследования.

Отметим также, что выбор параметров базиса несложно контролировать в пакетном подходе, как и в обычных вариационных вычислениях, а именно исследуя минимум энергетического функционала для слабосвязанных (околопороговых) уровней. В нашем примере (α - α)-рассеяния имеется очень узкий 0^+ -резонанс, близкий к порогу ($E_{\text{res}} = 0.095$ МэВ, $\Gamma = 6 \cdot 10^{-6}$ МэВ), который в очень хорошем приближении можно считать стационарным состоянием, а тогда можно искать оптимальные параметры базиса на основе вариационного принципа Ритца, т.е. по сути использовать диагонализацию матрицы полного гамильтониана в выбранном базисе.

Рис. 1. Функции комплексного гауссова базиса при разных значениях параметра ξ в сравнении с функциями гауссова базиса ($\xi = 0$) для различных парциальных волн: $l = 0$ (а), $l = 1$ (б), $l = 2$ (в) и $l = 4$ (г); $r_0 = 1/\sqrt{\alpha}$ – характерный масштаб гауссовых функций.

3.1.2. Сравнение точных КВП и псевдосостояний. Для сравнения пакетного решения задачи рассеяния с точным были найдены дискретные собственные состояния матрицы чисто кулоновского гамильтониана H_C в выбранном комплексном гауссовом базисе при $l = 0$. При этом для масштабных параметров базиса α_n использовалось обобщенное распределение Чебышева

$$\alpha_n = \alpha_0 \left[\operatorname{tg} \left(\frac{2n-1}{4N} \pi \right) \right]^t, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (35)$$

где α_0 – некоторый общий параметр, задающий радиальный масштаб задачи, а показатель степени t определяет плотность узлов распределения. Можно показать [12], что базис чистых гауссиан с параметрами (35) обладает полнотой в пространстве L_2 в пределе $N \rightarrow \infty$. Затем были численно построены точные КВП (отвечающие тем же параметрам разбиения спектра) из регулярных кулоновских функций $|F_l(E)\rangle$ таким образом, чтобы собственные значения матрицы гамильтониана совпадали со средними точками $\mathcal{E}_k^*$ интервалов.

На рис. 2 показано сравнение координатного поведения точных КВП (найденных численно) и соответствующих функций псевдосостояний, полученных с использованием комплексного гауссова базиса, для четырех различных энергетических интервалов: при

малых энергиях столкновения $E \sim 0.1$ МэВ (а) и $E \sim 1.0$ МэВ (б), средних энергиях $E \sim 10$ МэВ (в) и относительно высоких $E \sim 50$ МэВ (г). При этом были выбраны следующие параметры базиса: $\alpha_0 = 0.01$ Фм $^{-2}$, $t = 4$, $N = 80$. Впрочем, такой выбор не критичен, и примерно те же результаты получаются и для других значений параметров базиса. В частности, мы использовали в этом случае значение параметра $\xi = \pi$. Как видно из рисунка, оба типа базисных функций практически совпадают даже при достаточно большой энергии $E \sim 50$ МэВ вплоть до расстояний $r \sim 10$ Фм, намного превышающих радиус ядерного (α - α)-потенциала.

Рис. 2. Сравнение точных КВП (штриховые линии) и соответствующих псевдосостояний, построенных с использованием комплексного гауссова базиса (сплошные линии), для четырех разных энергетических интервалов со следующими собственными значениями энергии $\mathcal{E}_k^*$ и ширинами Δ_k : $\mathcal{E}_k^* = 0.109$ МэВ, $\Delta_k = 2.4 \cdot 10^{-2}$ МэВ (а); $\mathcal{E}_k^* = 1.01$ МэВ, $\Delta_k = 1.9 \cdot 10^{-1}$ МэВ (б); $\mathcal{E}_k^* = 10.6$ МэВ, $\Delta_k = 1.65$ МэВ (в); $\mathcal{E}_k^* = 49.9$ МэВ, $\Delta_k = 7.8$ МэВ (г).

Отметим, что небольшое различие в величинах максимумов между точными ВП и соответствующими псевдосостояниями легко объяснить. В самом деле, точные пакетные функции, будучи нормированы на единицу, убывают на асимптотике как $\sin(\delta_i r)/(\delta_i r)$, т.е. степенным образом, тогда как функции псевдосостояний (нормированные также на единицу) спадают к нулю экспоненциально. В результате этого более быстрого убывания при $r \rightarrow \infty$ и при той же нормировке амплитуда осцилляций для функций псевдосостояний будет всегда несколько выше, чем соответствующая амплитуда для более

медленно убывающих точных ВП. Однако при $\Delta_i \rightarrow 0$ область расстояний, где проявляется это различие, будет сдвигаться к бесконечности. Более того, если это различие проявляется вне области действия короткодействующего ядерного потенциала, то оно не играет никакой роли, как это следует из рис. 2 для всех четырех рассмотренных здесь значений энергии. Напомним, что радиус короткодействующего $(\alpha-\alpha)$ -потенциала не превосходит $r \sim 4$ фм.

Замечательное свойство совпадения псевдосостояний с КВП позволяет строить конечномерные аппроксимации для кулоновской резольвенты практически в любом базисе. При этом требуется всего лишь однократная диагонализация матрицы кулоновского гамильтониана в этом базисе. Поэтому при использовании вещественного (или комплексного) гауссова базиса для построения ВП в задаче рассеяния нескольких частиц (чему будет посвящена наша последующая работа) матричные элементы многочастичного оператора рассеяния (и операторов резольвент) могут быть вычислены на таком базисе в аналитическом виде с использованием известных формул преобразования к другим наборам координат Якоби. Заметим, что в других известных методах решения квантовых задач рассеяния с участием заряженных частиц в дискретном базисе почти исключительно используется специальный L_2 -базис, построенный из так называемых функций Штурма–Кулона [14], который в задаче нескольких частиц не допускает простого преобразования к другим наборам координат Якоби.

3.2. Парциальные фазовые сдвиги $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния. Рассмотрим T -матрицу рассеяния двух α -частиц, взаимодействующих посредством суперпозиции отталкивающего кулоновского и чисто ядерного потенциалов:

$$V_{\alpha\alpha}(r) = V_C(r) + \frac{V_0}{1 + e^{(r-R_v)/a}}, \quad (36)$$

причем в качестве кулоновского $(\alpha-\alpha)$ -взаимодействия берется потенциал

$$V_C(r) = \frac{4e^2}{r} \operatorname{erf}(\gamma r),$$

отвечающий электростатическому взаимодействию двух протяженных зарядов $2e$ с гауссовым пространственным распределением плотности для каждого заряда, при этом параметр ширины $\gamma = 0.75$ фм $^{-1}$.

Глубокий ядерный потенциал $(\alpha-\alpha)$ -взаимодействия (так называемый потенциал с запрещенными состояниями), использованный в формуле (36), был впервые предложен в работе [15]. Он имеет следующие значения параметров:

$$V_0 = -125 \text{ МэВ}, \quad R_v = 1.78 \text{ фм}, \quad a = 0.66 \text{ фм}.$$

Характерной особенностью этого потенциала является наличие низколежащих связанных состояний в S - и D -волнах и трех ярко выраженных резонансов при $(\alpha-\alpha)$ -рассеянии в S -, D - и G -парциальных волнах. Предложенный МПДК в сочетании с исключительно гибким комплексным гауссовым базисом позволяет весьма точно воспроизвести резонансное поведение фазовых сдвигов $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния.

Найдем так называемые кулон-ядерные фазовые сдвиги $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния из элемента T -матрицы на массовой поверхности по формуле (31), используя описанный выше формализм КВП и заменяя в реальных расчетах точные пакетные состояния псевдосостояниями матрицы гамильтониана H_C в базисе (33).

Выделяя из полного взаимодействия $V_{\alpha\alpha}$ чисто кулоновскую часть потенциала для точечных частиц (учитываемую в базисе КВП), получаем выражение для полного короткодействующего потенциала притяжения:

$$V_S(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-R_v)/a}} - \frac{4e^2}{r} \operatorname{erfc}(\gamma r). \quad (37)$$

Чтобы сделать вычисления фазовых сдвигов почти полностью аналитическими, можно заменить потенциал Вудса–Саксона на полностью эквивалентный ему гауссов потенциал Бака [16]

$$U(r) = U_0 e^{-\beta r^2}$$

с параметрами $U_0 = -122.7 \text{ МэВ}$ и $\beta = 0.22 \text{ Фм}^{-2}$, для которого матричные элементы в комплексном базисе имеют аналитический вид.

Рис. 3. Сравнение точных (пунктирная кривая) и построенных “пакетным” методом (сплошная кривая) S -волновых фазовых сдвигов $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния, найденных с помощью комплексного гауссова базиса (а). Абсолютные ошибки определения фазовых сдвигов $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния в средних точках энергетических интервалов (б).

На рис. 3а представлена энергетическая зависимость найденных на основе МПДК S -волновых парциальных фазовых сдвигов в сравнении с “точными” значениями, полученными путем прямого численного интегрирования уравнения Шредингера. Видно, что при расчетах в пакетном базисе хорошо воспроизводится резонансное поведение S -волновой фазы рассеяния. На рис. 3б представлены абсолютные ошибки определения фазовых сдвигов относительно их точных значений. Как видно, относительная точность вычислений фазовых сдвигов при размерности базиса $N = 80$ составляет в среднем десятые доли процента, т. е. практически такая же, как и при использовании техники СВП

Рис. 4. D -волновые (кривые 1) и G -волновые (кривые 2) фазовые сдвиги $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния, найденные с использованием комплексного гауссова базиса (сплошные кривые), в сравнении с точными значениями (пунктирные кривые) при разных значениях параметра ξ : $\xi = \pi/4$ для $l = 2$ и $\xi = \pi/8$ для $l = 4$ (а); $\xi = \pi$ для $l = 2$ и $l = 4$ (б).

для нахождения фаз рассеяния на короткодействующем потенциале [4]. При этих вычислениях использовалось значение параметра комплексного гауссова базиса $\xi = \pi$.

На рис. 4а представлены парциальные фазовые сдвиги $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния для $l = 2$ и $l = 4$. Из литературы известно, что в каждой из этих парциальных волн имеются широкие резонансы при энергиях $E_{\text{res}} = 2.89$ МэВ ($l = 2$) и $E_{\text{res}} = 11.79$ ($l = 4$), что вполне подтверждается нашими расчетами. Как следует из условия (34), значение параметра комплексного базиса ξ следует уменьшать с увеличением орбитального момента l . Мы использовали в высших парциальных волнах значения $\xi = \pi/(2l)$, удовлетворяющие неравенствам (34).

Для сравнения на рис. 4б представлены D - и G -волновые фазы, полученные с использованием комплексного гауссова базиса при значении $\xi = \pi$ (оптимальном для $l = 0$). Как и ожидалось, в этом случае расчетные фазы имеют большие ошибки. Это происходит по той причине, что при таком большом значении ξ поведение функций исходного гауссова базиса слишком сильно изменяется уже при малых r . Получившиеся в итоге функции комплексного базиса уже не могут воспроизвести поведение точных функций рассеяния даже во внутренней области действия короткодействующего потенциала.

Таким образом, мы показали, что МПДК естественным образом обобщается и на случай кулоновского взаимодействия заряженных частиц, при этом в расчетах может использоваться практически любой удобный полный L_2 -базис, что весьма важно для решения квантовых задач рассеяния нескольких частиц, а также релятивистских задач рассеяния.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы обобщили развитый ранее подход к решению задач рассеяния в конечномерном L_2 -базисе на случай суперпозиции короткодействующего и далекодействующего (кулоновского) потенциалов взаимодействия. Весь формализм практически повторяет разработанный нами ранее формализм СВП, но с заменой СВП на КВП. Нахождение дополнительных, или кулон-ядерных, парциальных фазовых сдвигов сводится к диагонализации матрицы кулоновского гамильтониана в удобном L_2 -базисе с последующим матричным обращением при каждом нужном значении энергии. В расчетах использовался исключительно гибкий комплексный гауссов базис, в котором матричные элементы кулоновского гамильтониана, а также оператора ядерного взаимодействия сводятся к аналитической форме. Найденные в качестве иллюстрации так называемые кулон-ядерные фазовые сдвиги для $(\alpha-\alpha)$ -рассеяния хорошо согласуются с результатами, полученными путем прямого численного интегрирования уравнения Шредингера для этой системы.

Мы не рассмотрели в этой работе две проблемы, возникающие при учете кулоновского взаимодействия. Первая отвечает случаю притяжения заряженных частиц. В этом случае для построения аппроксимации кулоновской резольвенты одного формализма ВП недостаточно, поскольку этот оператор, помимо интеграла по непрерывному спектру, содержит сумму по бесконечному набору связанных состояний. Для построения конечномерных аппроксимаций такого оператора нужно “объединить” методы аппроксимации для дискретного и непрерывного кулоновских спектров в конечномерном L_2 -базисе. Вторая проблема состоит в построении методики извлечения чисто кулоновских парциальных амплитуд непосредственно из КВП. В нашей последующей работе мы планируем рассмотреть эти вопросы.

Среди других методов решения кулоновской задачи рассеяния в L_2 -базисе (см., например, [14], [17]–[19]) наиболее близким к рассматриваемому здесь МПДК является вариант J -матричного подхода, исследованный в работах [14], [17]. В этом методе решается интегральное уравнение Липмана–Швингера для нахождения полной резольвенты или T -матрицы. Однако при этом явно используется трехдиагональное представление для матрицы кулоновского гамильтониана в базисе Штурма–Кулона. Рассмотренный в настоящей работе метод хотя и несколько уступает J -матричному по достигаемой точности результатов, однако имеет и явное преимущество, поскольку позволяет строить сразу диагональное представление для кулоновской резольвенты. Кроме того, в расчетах можно использовать практически любой удобный L_2 -базис. При этом существенной является предложенная в МПДК новая трактовка функций псевдосостояний как аппроксимаций именно для ВП, а не точных функций рассеяния, как считали ранее. Такая интерпретация позволяет использовать псевдосостояния в качестве основной системы базисных функций, что значительно упрощает промежуточные вычисления при нахождении наблюдаемых, особенно в случае рассеяния нескольких тел, поскольку при соответствующем выборе базиса большинство этих вычислений может быть проведено аналитически (см. также [20]).

Важно особо подчеркнуть, что разработанный формализм ВП, по нашему мнению, не только приводит к очень экономичной вычислительной схеме решения задач рассеяния, но и является удобным языком, позволяющим формулировать эти задачи в гильбертовом пространстве, используя произвольный L_2 -базис. Напомним, что обычно форму-

лировка квантовой теории дается на языке векторов гильбертова пространства, причем точные собственные состояния непрерывного спектра гамильтониана этому пространству не принадлежат. Поэтому для корректного рассмотрения таких состояний и спектральных сумм по ним вводятся собственные дифференциалы функций рассеяния (т.е. стационарные ВП) [7], [8], которые имеют конечную норму, а уже затем делается обратный предельный переход к точным состояниям непрерывного спектра. Таким образом, основное приближение МПДК состоит в том, что ширины интервалов, на которых строятся пакетные состояния, остаются конечными, хотя и достаточно малыми, чтобы обеспечить сходимость наблюдаемых величин к их точным значениям. Мы надеемся, что при дальнейшем развитии МПДК может послужить основой универсального подхода к описанию процессов взаимодействия нескольких частиц в непрерывном спектре, использующего последовательную дискретизацию этого спектра, что позволит кардинально упростить решение сложных проблем многочастичного рассеяния.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность В.Н. Померанцеву за плодотворные обсуждения и помощь в численных расчетах. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-02-16602).

Список литературы

- [1] Э. Шмид, Х. Цигельман. Проблема трех тел в квантовой механике. М.: Наука, 1979.
- [2] E. O. Alt, W. Sandhas. Phys. Rev. C. 1980. V. 21. P. 1733.
- [3] В. И. Кукулин, О. А. Рубцова. ТМФ. 2002. Т. 130. С. 64.
- [4] В. И. Кукулин, О. А. Рубцова. ТМФ. 2003. Т. 134. С. 460.
- [5] В. И. Кукулин, О. А. Рубцова. ТМФ. 2004. Т. 139. С. 291.
- [6] М. Гольдбергер, К. Ватсон. Теория столкновений. М.: Мир, 1967.
- [7] Е. Вигнер. Теория групп и ее приложение к квантовомеханической теории атомных спектров. М.: ИЛ, 1961.
- [8] А. Мессиа. Квантовая механика. М.: Наука, 1978.
- [9] Г. Бете. Квантовая механика простейших систем. Л.-М.: ОНТИ, 1935.
- [10] Р. Ньютон. Теория рассеяния волн и частиц. М.: Мир, 1969.
- [11] T. Matsumoto, T. Kamizato, K. Ogata, Y. Izeri, E. Hiyama, M. Kamimura, M. Yahiro. Phys. Rev. C. 2003. V. 68. P. 064607.
- [12] D. P. Kostomarov, V. I. Kukulin. Numerical methods for few-body quantum mechanical problem with nuclear physics applications. In: Proc. V Inf. Conf. on Math. Modeling, Programming and Math. Methods for Solution of Phys. Problems (Dubna, 1985). Ed. A. A. Samarsky. Dubna: JINR, 1986. P. 113; Д. П. Костомаров, В. И. Кукулин, П. Б. Сазонов. Вестн. МГУ. Сер. Прикладная математика и кибернетика. 1984. № 1. С. 3.
- [13] V. T. Voronchev, V. M. Krasnopol'sky, V. I. Kukulin. J. Phys. G. 1982. V. 8. P. 649.
- [14] B. Konya, G. Levai, Z. Papp. Phys. Rev. C. 2000. V. 61. P. 034302.
- [15] V. G. Neudatchin, V. I. Kukulin, V. L. Korotkich, V. P. Korennoy. Phys. Lett. B. 1971. V. 34. P. 581.
- [16] B. Buck, H. Friederich, C. Wheatley. Nucl. Phys. A. 1977. V. 246. P. 275.
- [17] H. A. Yamani, M. S. Abdelmonem. J. Phys. B. 1997. V. 30. P. 1633.
- [18] E. J. Heller. Phys. Rev. A. 1975. V. 12. P. 1222.
- [19] D. Baye, M. Hesse, J.-M. Sparenberg, M. Vincke. J. Phys. B. 1998. V. 31. P. 3439.
- [20] O. A. Rubtsova, V. I. Kukulin. Efficient technique for solving few-body scattering problems by the wave-packet continuum discretization. In: Few-Body Problems in Physics'02 (Few-Body Systems Supplement. V. 14). Eds. R. Krivec, B. Golli, M. Rosina, S. Širca. Wien: Springer, 2003. P. 211.

Поступила в редакцию 10.III.2005 г.