Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Цветков, Интегральное уравнение для спинорной амплитуды дираковской частицы в искривленном пространстве-времени, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 331–337

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 12:41:59

© 2003 г.

В. П. Цветков*

ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СПИНОРНОЙ АМПЛИТУДЫ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ИСКРИВЛЕННОМ ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ

Получена система интегральных уравнений для спинорной амплитуды волнового пакета, описывающей массивную нейтральную дираковскую частицу в искривленном пространстве-времени произвольной геометрии. Это уравнение позволяет описать спинорную динамику фермионов в гравитационных полях адекватно квантовой природе спина. Рассмотрен конкретный пример метрики Керра–Шилда. Обсуждается вопрос об осцилляции массивных нейтрино во внешнем гравитационном поле.

Ключевые слова: интегральное уравнение, спинорная амплитуда, искривленное пространство-время.

В связи с наличием астрофизических компактных объектов, вблизи которых существуют сильные гравитационные поля, несомненный интерес представляет изучение массивных нейтральных дираковских частиц в искривленном пространстве-времени произвольной геометрии. Это прежде всего связано с изучением нейтринных процессов, играющих важную роль в эволюции компактных астрофизических объектов (нейтронных звезд, черных дыр).

Наблюдаемый дефицит солнечных нейтрино потребовал пересмотреть представления о характере термоядерных явлений, происходящих на солнце, и физике нейтринных процессов.

На ускорителях и в астрофизических условиях генерируются только левые нейтрино ν_L и правые антинейтрино $\bar{\nu}_R$, спин которых направлен против и по направлению импульса частицы, соответственно. Только они взаимодействуют с веществом, и, следовательно, наблюдаются. Нейтрино ν_R и $\bar{\nu}_L$ с веществом практически не взаимодействуют, и оно для них прозрачно. Если у нейтрино нет массы, то их спиральность не меняется даже при наличии внешнего гравитационного поля. Но если они массивны ($m_\nu \neq 0$, хотя и очень мало), то возможны нейтринные осцилляции – переходы $\nu_L \leftrightarrow \nu_R$ и $\bar{\nu}_R \leftrightarrow \bar{\nu}_L$ – в гравитационных полях. Актуальность данной тематики резко возрастает после сообщений ряда экспериментальных групп [1], [2] о наличии у нейтрино ненулевой массы покоя $2 \cdot 10^{-2} \text{ эВ} < m_\nu < 7 \cdot 10^{-2} \text{ эВ}$.

* Тверской государственный университет, Тверь, Россия. E-mail: tsvet@tversu.ru

Спиновая динамика нейтральной массивной дираковской частицы в искривленном пространстве-времени рассматривалась в ряде работ [3]–[6].

В данной статье, являющейся непосредственным продолжением работ [3]–[5], сформулирован принципиально новый математический подход к изучению эволюции спинорной амплитуды дираковской частицы в искривленном пространстве-времени, в основе которого лежит система интегральных уравнений с вольтеровскими ядрами.

Движение массивной нейтральной дираковской частицы со спином $1/2$ будем описывать общековариантным уравнением Дирака

$$i \left[e_{(a)}^\mu \gamma^a \partial_\mu - \frac{1}{4} \gamma_{abc} \gamma^c \gamma^b \gamma^a \right] \Psi = m \Psi, \quad (1)$$

где $\gamma_{abc} = e_{(a)\nu;\mu} e_{(b)}^\nu e_{(c)}^\mu$ – коэффициенты вращения Риччи, γ^a – матрицы Дирака, m – масса частицы, $c = \hbar = 1$.

Тетрадные векторы предполагаются ортогональными:

$$g_{\mu\nu} e_{(a)}^\mu e_{(b)}^\nu = \eta_{ab},$$

где $g_{\mu\nu}$ – метрический тензор, η_{ab} – матрица Минковского.

Как и в [5], будем искать решение общековариантного уравнения Дирака, имеющее вид распространяющегося с течением времени волнового пакета, локализованного в пространственной области шириной d^{-1} :

$$\Psi = \frac{d^{-3/2}}{2\sqrt{2}\pi^{9/4}} \int d^3q \exp \left\{ - \left[i \int_t^\infty E(\vec{q}, \tau) d\tau + i(\vec{q} \vec{r}) + \frac{(\vec{q} - \vec{q}_0)}{2d^2} \right] \right\} U(\vec{q}, t). \quad (2)$$

Будем считать выполненным естественное условие $\kappa = d^{-1}/l_g \ll 1$, где l_g – характерный масштаб изменения метрики. Очевидно, что l_g имеет тот же порядок, что и размеры источника гравитационного поля.

Волновая функция Ψ нормируется согласно условию

$$\int \bar{\Psi} e_{(a)}^0 \gamma^a \Psi \sqrt{-g} d^3x = 1. \quad (3)$$

Тогда из (2), (3) следует асимптотическое условие нормировки для $U(\vec{q}, t)$:

$$U^+(\vec{q}, t \rightarrow \infty) U(\vec{q}, t \rightarrow \infty) = 1. \quad (4)$$

Для описания спиновой динамики дираковской частицы представим Ψ в виде разложения по спиральным состояниям

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R, \quad (5)$$

где

$$\Psi_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma^5) \Psi, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

I – единичная (2×2) -матрица.

Отсюда следуют выражения для вероятностей W_L и W_R соответственно левого и правого состояний массивной дираковской частицы:

$$W_{L,R} = \iiint \bar{\Psi}_{L,R} e_{(a)}^0 \gamma^a \Psi_{L,R} \sqrt{-g} d^3 x. \quad (6)$$

Вид функции $E(\vec{q}, \tau)$ будет уточнен в дальнейшем. Очевидно, что $E(\vec{q}, \tau)$ удовлетворяет асимптотическому условию $E(\vec{q}, \tau \rightarrow \infty) \rightarrow \sqrt{q^2 + m^2}$.

Разлагая компоненты метрического тензора, а следовательно, и коэффициенты общековариантного уравнения Дирака по степеням малого параметра κ в окрестности центра локализации волнового пакета, решение этого уравнения можно свести к решению системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей эволюцию спинорной амплитуды дираковской частицы $U(\vec{q}, t)$ ($\vec{q}$ – импульс частицы).

Основной вклад в волновой пакет дают значения $\vec{q}$ вблизи $\vec{q}_0$ в интервале шириной d^{-1} . Для исследования спиновой динамики представим U в виде линейной комбинации полей с правой (U_R) и левой (U_L) спиральностями: $U = U_L + U_R$, где $U_{L,R} = (1 \pm \gamma_5)U/2$.

Четырехкомпонентные спиноры U_L и U_R можно выразить через двухкомпонентные спиноры F и H следующим образом:

$$U_L = \begin{pmatrix} F \\ -F \end{pmatrix}, \quad U_R = \begin{pmatrix} H \\ H \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Из F и H составим четырехкомпонентный спинор

$$R = \begin{pmatrix} F \\ H \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Этот спинор удовлетворяет уравнению, которое можно представить в форме уравнения Шредингера

$$\dot{R} = -i\hat{H}R. \quad (9)$$

Точное значение $\hat{H}$ в случае метрики Керра–Шилда приводится в [5], а в случае слабоискривленного пространства-времени произвольной геометрии в первом постньютоновском приближении дано в [6].

Обозначим $\hat{H}(t \rightarrow \infty) = \hat{H}_0$, решение $R(t \rightarrow \infty) = R_0$, импульс дираковской частицы – $\vec{q}$, единичный вектор в направлении импульса – $\vec{n} = \vec{q}/q$ ($q = |\vec{q}|$). Введем в рассмотрение двухрядные матрицы $\sigma_{\pm} = (1 \pm (\vec{\sigma}\vec{n}))$ ($\vec{\sigma}$ – матрицы Паули). Из них составим четырехрядные матрицы

$$\hat{S}^{\pm} = \frac{1}{2(\kappa_{01} + 1)} \begin{pmatrix} \sigma_{\pm} + \kappa_{01} & \pm \kappa_0 \\ \pm \kappa_0 & \sigma_{\mp} + \kappa_{01} \end{pmatrix}, \quad (10)$$

где $\kappa_0 = m/q$, $\kappa_{01} = \sqrt{1 + \kappa_0^2} - 1$.

Тогда

$$\hat{H}_0 = q\hat{S}^+, \quad R_0 = \hat{S}^- \begin{pmatrix} r_{01} \\ r_{02} \end{pmatrix},$$

где r_{01}, r_{02} – собственные векторы матрицы $(\vec{\sigma}\vec{n})$:

$$(\vec{\sigma}\vec{n})r_{01,02} = \mp r_{01,02}. \quad (11)$$

Отметим свойство ортогональности $\hat{S}^+$ и $\hat{S}^-$: $\hat{S}^+\hat{S}^- = 0$, которое проверяется непосредственно и в дальнейшем будет играть важную роль. Разность $\hat{H} - \hat{H}_0$ обозначим $\hat{V}$.

После простых преобразований систему дифференциальных уравнений (9) можно представить в виде системы интегральных уравнений с вольтерровыми ядрами:

$$R = i \int_t^\infty (-\hat{V}(\tau) + \hat{V}(\tau)e^{2i\alpha(\tau-t)})R(\tau) d\tau + R_0, \quad (12)$$

где $\alpha = \sqrt{q^2 + m^2}$, $\mp \hat{V} = \hat{S} \mp \hat{V}$.

Решение (12) может быть построено методом последовательных приближений:

$$R^{(n)} = i \int_t^\infty (-\hat{V}(\tau) + \hat{V}(\tau)e^{2i\alpha(\tau-t)})R^{(n-1)}(\tau) d\tau + R_0. \quad (13)$$

В качестве начального приближения выбирается $R^{(0)} = R_0$. В пределе $R = \lim_{n \rightarrow \infty} R^{(n)}$ будет являться точным решением уравнения (12).

Ядра системы интегральных уравнений содержат члены с быстроосциллирующим множителем $e^{2i\alpha(\tau-t)}$. Отметим, что для сходимости данных интегралов достаточным является условие $\hat{V}(\tau \rightarrow \infty) \rightarrow 0$.

Для сходимости интегралов с членами $-\hat{V}(\tau)$ необходимо выполнение более сильного условия:

$$|-\hat{V}_{ik}|_{i,k=0,1,2,3} < \frac{A}{(r_0 + \tau)^{1+\delta}}, \quad (14)$$

где $\delta > 0$, r_0 – характерный радиус гравитирующего объекта.

Основной вклад в интегралы, содержащие множитель $e^{2i\alpha(\tau-t)}$, будет давать область интегрирования $t - \Delta\tau \leq \tau \leq t + \Delta\tau$, $\Delta\tau \sim 1/\alpha$. Если $1/(\alpha l_g) \ll 1$, что выполняется всегда, интегралы с $e^{i\alpha(\tau-t)}$ могут быть оценены на основании следующего асимптотического разложения:

$$\begin{aligned} J(t) &= \int_t^\infty f(\tau)e^{i\alpha(\tau-t)} d\tau = \\ &= \frac{i}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{i}{\alpha}\right)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} + i \left(\frac{i}{\alpha}\right)^N \int_t^\infty \left(e^{i\alpha(\tau-t)} \frac{d^N f(\tau)}{dt^N}\right) d\tau. \end{aligned} \quad (15)$$

Если $f(t)$ удовлетворяет условию

$$\left| \frac{d^N f(t)}{dt^N} \right| < \frac{\alpha A (N-1)!}{(t_0 + t)^N} \quad (16)$$

при $N > 1$, то

$$J(t) = \frac{i}{\alpha} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\frac{i}{\alpha} \right)^k \frac{d^k f(t)}{dt^k} + O \left(\frac{(N-2)!}{\alpha(t_0+t)^{N-1}} \right). \quad (17)$$

В нашем случае $\alpha t_0 = \alpha l_g \gg 1$, и отбрасываемые члены будут малы до значений $N \sim \alpha t_0$. Выбор N будет определяться конкретным порядком приближения в (17). Так, для $R^{(1)}$ достаточно взять $N = 1$, для $R^{(2)}$ — $N = 2$ и т.д. ($N = n$ для $R^{(n)}$). Данная процедура позволяет представить R в виде асимптотического ряда по степеням малого параметра $1/(\alpha l_g)$.

Остановимся на выборе функции $E(\vec{q}, \tau)$. В каждом приближении она выбирается из условия сокращения в $R^{(n)}$ всех больших членов порядка (ql_g) . Это соответствует очевидному физическому условию отсутствия в спинорной амплитуде быстроменяющихся со временем членов.

Сходимость последовательности $R^{(n)}$ доказывается аналогично соответствующему доказательству для уравнения Вольтерра второго рода.

Наибольший физический интерес в данном исследовании представляют переходы с изменением спиральности массивной дираковской частицы (в астрофизике — нейтрино). Из (12) и (13) следует, что такие переходы возможны, если $\mp \hat{V}_{12}$ и $\mp \hat{V}_{21}$ отличны от нуля. Здесь мы представили четырехрядные матрицы $\hat{V}$ в виде двухрядных $\mp \hat{V}_{ab}$ ($a, b = 1, 2$):

$$\mp \hat{V} = \begin{pmatrix} \mp \hat{V}_{11} & \mp \hat{V}_{12} \\ \mp \hat{V}_{21} & \mp \hat{V}_{22} \end{pmatrix}, \quad (18)$$

причем для любой геометрии пространства-времени $\mp \hat{V}_{12}$ и $\mp \hat{V}_{21}$ отличны от нуля лишь при $m \neq 0$. Отсюда следует, что эффект нейтринных осцилляций $\nu_L \leftrightarrow \nu_R$, $\bar{\nu}_L \leftrightarrow \bar{\nu}_R$ возможен только для массивных нейтрино. Величина эффекта определяется конкретной геометрией гравитационного поля.

Разработанный нами метод исследования спиновой динамики массивной дираковской частицы предполагается использовать для подробного изучения этого явления в случае конкретной геометрии искривленного пространства-времени. Особый интерес представляет случай слабого гравитационного поля, учитываемого в первом постньютоновском приближении. В этом случае достаточно вычислить несколько первых членов $R^{(n)}$ (до появления исчезающих эффектов).

Дальнейшее изложение будем проводить в рамках конкретной и наиболее простой геометрии искривленного пространства-времени метрики Керра–Шилда. Компоненты тетрадных векторов $e_{(a)}^\mu$ выражаются через компоненты изотропного вектора ξ^μ следующим образом:

$$e_{(a)}^\mu = \delta_a^\mu + \frac{1}{2} \xi^\mu \xi_a, \quad \xi_a = \eta_{ab} \xi^b, \quad \xi^a \xi^b \eta_{ab} = 0. \quad (19)$$

Используя полученное в работе [5] значение $\hat{H}$ для метрики Керра–Шилда, находим в нашем случае

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} E' + (p_n - u_n)\hat{n} + (p_1 + u_1)\hat{e}_1 + (p_2 + u_2)\hat{e}_2 & -m(\phi + \lambda \xi_{\parallel} \hat{n} + \lambda \xi_{\perp} \hat{e}_1) \\ -m(\phi - \lambda \xi_{\parallel} \hat{n} - \lambda \xi_{\perp} \hat{e}_1) & E' - (p_n + u_n)\hat{n} - (p_1 - u_1)\hat{e}_1 - (p_2 - u_2)\hat{e}_2 \end{pmatrix},$$

где $\vec{n} = \vec{q}/q$, $\vec{\xi} = \xi_{\parallel} \vec{n} + \xi_{\perp} \vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = [\vec{n} \times \vec{e}_1]$, $\hat{n} = (\vec{\sigma} \vec{n})$, $\hat{e}_1 = (\vec{\sigma} \vec{e}_1)$, $\hat{e}_2 = (\vec{\sigma} \vec{e}_2)$, $\vec{v} = v_{\parallel} \vec{n} + v_1 \vec{e}_1 + v_2 \vec{e}_2$, $\vec{v} = \xi \partial \vec{\xi} / \partial t + (\vec{\xi} \vec{\nabla}) \vec{\xi}$, $\xi = \xi^0$, $\vec{\xi} = (\xi^1, \xi^2, \xi^3)$,

$$\begin{aligned} E' &= E - \frac{\xi \xi_{\parallel}}{1 + \xi^2} q - i \frac{\partial \xi^2 / \partial t + \vec{\nabla}(\xi \vec{\xi})}{4(1 + \xi^2)}, \\ p_n &= \frac{-\xi^2 + \xi_{\perp}^2 / 2}{1 + \xi^2} q + \frac{i \xi \xi_{\parallel}}{4(1 + \xi^2)} \left[\frac{\xi}{2} (\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\xi}) - (\vec{\nabla} \xi) - \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] - i \frac{1 + \xi^2 / 2}{4(1 + \xi^2)} v_{\parallel}, \\ p_1 &= -\frac{\xi_{\parallel} \xi_{\perp}}{2(1 + \xi^2)} q + \frac{i \xi \xi_{\perp}}{4(1 + \xi^2)} \left[\frac{\xi}{2} (\vec{\nabla} \xi \cdot \vec{\xi}) - (\vec{\nabla} \xi) - \left(1 - \frac{\xi^2}{2} \right) \frac{\partial \xi}{\partial t} \right] - i \frac{1 + \xi^2 / 2}{4(1 + \xi^2)} v_1, \\ p_2 &= -i \cdot \frac{1 + \xi_{\perp}^2 / 2}{4(1 + \xi^2)} v_2, \quad u_n = \frac{\xi \xi_{\perp} v_2}{8(1 + \xi^2)}, \\ u_1 &= \frac{\xi \xi_{\parallel} v_2}{8(1 + \xi^2)}, \quad u_2 = \frac{i \xi \xi_{\perp} q}{2(1 + \xi^2)} - \frac{\xi(v_2 \xi_{\parallel} - \xi_{\perp} \cdot v_{\parallel})}{8(1 + \xi^2)}, \\ \phi &= \frac{\xi^2}{2(1 + \xi^2)}, \quad \lambda = \frac{\xi}{2(1 + \xi^2)}. \end{aligned}$$

Докажем, что все члены в R , пропорциональные q , при надлежащем выборе E' сокращаются, и тем самым F и H не содержат членов, изменяющихся на расстояниях порядка комптоновской длины волны пропорционально $1/q$.

Из (12), (13) и (17) следует, что в R зависящие от τ_n члены, пропорциональные q , могут быть сгруппированы:

$$-\hat{V}^-(\tau_n) - \frac{1}{2q} - \hat{V}^+(\tau_n) \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{2q} \right)^k + \hat{V}^+(\tau_n)^k \right] + \hat{V}^-(\tau_n). \quad (20)$$

Сохраняя в $-\hat{V}^-(\tau_n)$, $+\hat{V}^+(\tau_n)$, $-\hat{V}^+(\tau_n)$ и $+\hat{V}^-(\tau_n)$ члены, пропорциональные q , находим

$$\begin{aligned} -\hat{V}^- &= \frac{1}{2} E'' \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 \\ 0 & \sigma_+ \end{pmatrix}, \\ +\hat{V}^+ &= \frac{1}{2} \left(E'' + 2 \frac{-\xi^2 + \xi_{\perp}^2 / 2}{1 + \xi^2} q \right) \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix}, \\ -\hat{V}^+ &= -\frac{\xi_{\perp}(\xi + \xi_{\parallel})}{4(1 + \xi^2)} q \hat{e}_1 \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & -\sigma_- \end{pmatrix}, \\ +\hat{V}^- &= \frac{\xi_{\perp}(\xi - \xi_{\parallel})}{4(1 + \xi^2)} q \hat{e}_1 \begin{pmatrix} \sigma_- & 0 \\ 0 & -\sigma_+ \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (21)$$

где $E' = E'' + P_n$.

Подставляя (21) в (20), получаем, что выражение (20) равно

$$\frac{1}{2} \left(E'' + \frac{\xi_{\perp}^4 q^2}{4(1 + \xi^2)^2} \left(E'' + 2 \frac{1 + \xi_{\perp}^2 / 2}{1 + \xi^2} q \right)^{-1} \right) \begin{pmatrix} \sigma_+ & 0 \\ 0 & \sigma_- \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Отсюда следует условие, определяющее E'' :

$$E'' \left(E'' + 2 \frac{1 + \xi_{\perp}^2/2}{1 + \xi^2} \cdot q \right) = - \frac{\xi_{\perp}^4 q^2}{4(1 + \xi^2)^2}. \quad (23)$$

Подставляя E'' в $\widehat{V}(\tau)$, мы полностью определим эту величину, а следовательно и ядро интегрального уравнения (12), определяющего эволюцию спинорных амплитуд F и H .

Эффект нейтринных осцилляций $\nu_L \leftrightarrow \nu_R$, $\bar{\nu}_R \leftrightarrow \bar{\nu}_L$ массивных нейтрино в метрике Керра–Шилда с помощью полученного в данной работе $\widehat{V}$ будет исследован в дальнейшем.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобразования РФ (грант Е00-3.3-101).

Список литературы

- [1] *Y. Fukuda et al.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. № 8. P. 1562–1567.
- [2] *F. Boehm et al.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. № 17. P. 3764–3767.
- [3] *В. П. Цветков.* Матем. моделирование. 1998. Т. 10. № 2. С. 103–109.
- [4] *В. П. Цветков.* ЯФ. 2000. Т. 63. № 4. С. 765–768.
- [5] *Д. Е. Кумпяк, В. П. Цветков.* ТМФ. 2000. Т. 125. № 2. С. 343–352.
- [6] *V. P. Tsvetkov, D. E. Kumpyak, V. N. Ryzukov.* Spin Dynamics of a Massive Neutral Dirac Particle in the Slightly Curved Space-Time with an Arbitrary Geometry. In: Proceedings XVth Workshop on High Energy Physics and Quantum Field Theory. Eds. M. Dubinin, V. Savrin. M.: Изд. отдел УНЦ ДО, 2001. P. 330–334.

Поступила в редакцию 5.VII.2002 г.