Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Губаль, М. А. Сташенко, Об улучшении оценки глобальной теоремы существования решения уравнений Боголюбова, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 420–424

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1910>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 17:52:32

ОБ УЛУЧШЕНИИ ОЦЕНКИ ГЛОБАЛЬНОЙ ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ БОГОЛЮБОВА

Для одномерной системы частиц, взаимодействующих как упругие шары, улучшена оценка теоремы существования глобального решения задачи Коши для уравнений Боголюбова с начальными данными из пространства последовательностей измеримых функций.

Ключевые слова: уравнения Боголюбова, несимметричная система.

Глобальное решение начальной задачи для цепочки уравнений Боголюбова [1] с начальными данными из пространства последовательностей измеримых функций впервые построено в работах [2], [3]. В данной работе улучшена оценка теоремы существования глобального решения работы [2] для случая односортовой системы.

1. Уравнения Боголюбова. Рассмотрим одномерную несимметричную систему тождественных частиц с массой $m = 1$ и диаметром $\sigma > 0$, которые взаимодействуют как упругие шары (стержни). Частицы в такой системе занимают только допустимые конфигурации $q_{i+1} \geq q_i + \sigma, i \in \mathbb{Z}^1 \setminus \{0\}$. Конфигурации $W_s = \{(q_{-s_2}, \dots, q_{s_1}) \in \mathbb{R}^{s_1+s_2} \mid q_{i+1} < q_i + \sigma \text{ хотя бы для одной пары } (i, i+1) \in \{(-s_2, -s_2+1), \dots, (-1, 1), \dots, (s_1-1, s_1)\}\}$ называются запрещенными.

Состояние этой системы описывается последовательностью функций распределения $F(t) = \{F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})\}_{s=s_1+s_2 \geq 0}$, которые при $t \geq 0$ удовлетворяют уравнениям Боголюбова:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) = & -(\mathcal{H}F(t))_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) + \\ & + \int_0^\infty dV V(F_{s+1}(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1-1}; q_{s_1}, v_{s_1}^*(v_{s_1}, V); q_{s_1} + \sigma, v_{s_1+1}^*(v_{s_1}, V)) - \end{aligned}$$

*Вольнский государственный университет им. Леси Украинки, г. Луцк, Украина.
E-mail: hhm@lt.ukrtel.net, smo@univer.lutsk.ua

$$\begin{aligned}
 & -F_{s+1}(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}; q_{s_1} + \sigma, v_{s_1} - V) + \\
 & + \int_0^\infty dV V(F_{s+1}(t, v_{-(s_2+1)}^*(v_{-s_2}, V), q_{-s_2} - \\
 & - \sigma; v_{-s_2}^*(v_{-s_2}, V), q_{-s_2}; x_{-(s_2-1)}, \dots, x_{s_1}) - \\
 & - F_{s+1}(t, v_{-s_2} + V, q_{-s_2} - \sigma; x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})), \quad s = s_1 + s_2 \geq 1,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где $\mathcal{H}$ – оператор Лиувилля:

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{H}F(t))_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \sum_{i=-s_2}^{s_1} v_i \frac{\partial}{\partial q_i} F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}), \\
 v_i^*(v_i, V) &= v_i + V, \quad v_{i+1}^*(v_i, V) = v_i.
 \end{aligned}$$

2. Глобальное решение задачи Коши для уравнений Боголюбова. Решение задачи Коши для уравнений (1) в виде ряда итераций [2] имеет вид

$$\begin{aligned}
 F(t) = U(t)F^0 &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^t dt_1 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n S(t_1 - t)[\mathcal{H}, \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-]S(t_2 - t_1) \times \dots \\
 & \dots \times S(t_n - t_{n-1})[\mathcal{H}, \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-]S(-t_n)F^0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где $S(t) = \bigoplus_{s=0}^\infty S^s(t)$:

$$\begin{aligned}
 (S^s(t)f_s)(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \\
 &= \begin{cases} f_s(X_{-s_2}(t), \dots, X_{s_1}(t)), & \text{если } (x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) \in \mathbb{R}^s \times (\mathbb{R}^s \setminus W_s), \\ 0, & \text{если } (q_{-s_2}, \dots, q_{s_1}) \in W_s, \end{cases}
 \end{aligned}$$

$X_i(t) \equiv X_i(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$, $i = -s_2, \dots, s_1$, – решение начальной задачи для уравнений Гамильтона системы s частиц с начальными данными $X_i(0, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) = x_i$, $i = -s_2, \dots, s_1$,

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a}^+ f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \int dx_{s_1+1} f_{s_1+1+s_2}(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1+1}), \\
 (\mathbf{a}^- f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \int dx_{-(s_2+1)} f_{s_1+s_2+1}(x_{-(s_2+1)}, \dots, x_{s_1}), \\
 ([\mathcal{H}, \mathbf{a}^+ + \mathbf{a}^-]f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \\
 &= \int_{\mathbb{R}^1} dv_{s_1+1}(v_{s_1+1} - v_{s_1}) f_{s+1}(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}; q_{s_1} + \sigma, v_{s_1+1}) + \\
 &+ \int_{\mathbb{R}^1} dv_{-(s_2+1)}(v_{-s_2} - v_{-(s_2+1)}) f_{s+1}(v_{-(s_2+1)}, q_{-s_2} - \sigma; x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}).
 \end{aligned}$$

Рассмотрим начальные данные F^0 из пространства $L_{\xi, \beta}^\infty$ двойных последовательностей $f = \{f_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})\}_{s=s_1+s_2 \geq 0}$ измеримых функций $f_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$, равных нулю на множестве W_s с нормой

$$\|f\| = \sup_{s \geq 0} \xi^{-s} \sup_{\substack{s_1, s_2 \geq 0 \\ s_1 + s_2 = s}} \sup_{x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}} |f_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})| \exp\left(\beta \sum_{i=-s_2}^{s_1} \frac{v_i^2}{2}\right),$$

где $\xi, \beta > 0$ – числа.

Запишем формулу (2) покомпонентно. Для этого введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}, \mathfrak{a}^+ + \mathfrak{a}^-] &= \mathfrak{A}^*(0) - \mathfrak{A}(0), \\ \mathfrak{A}^*(0) &= \mathfrak{A}^+(0) + \mathfrak{A}^-(0), \quad \mathfrak{A}(0) = \mathfrak{A}^+(0) + \mathfrak{A}^-(0), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} (\mathfrak{A}^*(0)f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \\ &= \int_0^\infty dV V f_{s+1}(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1-1}; q_{s_1}, v_{s_1}^*(v_{s_1}, V); q_{s_1} + \sigma, v_{s_1+1}^*(v_{s_1}, V)), \\ (\mathfrak{A}^+(0)f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \int_0^\infty dV V f_{s+1}(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}; q_{s_1} + \sigma, v_{s_1} - V), \\ (\mathfrak{A}^-(0)f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \int_0^\infty dV V f_{s+1}(v_{-(s_2+1)}^*(v_{-s_2}, V), q_{-s_2} - \\ &\quad - \sigma; v_{-s_2}^*(v_{-s_2}, V), q_{-s_2}; x_{-(s_2-1)}, \dots, x_{s_1}), \\ (\mathfrak{A}^-(0)f)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \int_0^\infty dV V f_{s+1}(v_{-s_2} + V, q_{-s_2} - \sigma; x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Определим также

$$\mathfrak{A}^\pm(\tau_i) = S(\tau_i) \mathfrak{A}^\pm(0), \quad \mathfrak{A}^\pm(\tau_i) = S(\tau_i) \mathfrak{A}^\pm(0),$$

где $\tau_i = t_i - t_{i-1}$. Таким образом, выражение для ряда итераций (2) примет вид

$$\begin{aligned} F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^t dt_1 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \sum_{k=0}^n \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k}^n (-1)^{n-k} \times \\ &\times (\mathfrak{A}(\tau_1) \dots \mathfrak{A}(\tau_{j_1-1}) \mathfrak{A}^*(\tau_{j_1}) \mathfrak{A}(\tau_{j_1+1}) \dots \mathfrak{A}(\tau_{j_k-1}) \times \\ &\times \mathfrak{A}^*(\tau_{j_k}) \mathfrak{A}(\tau_{j_k+1}) \dots \mathfrak{A}(\tau_n) S(-t_n) F^0)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}). \end{aligned} \quad (4)$$

Определим эволюционный оператор (2) в $L_{\xi, \beta}^\infty$. Справедлива следующая

ТЕОРЕМА. Если $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$, то последовательность $F(t)$ (2) существует, ряд (4) для функций $F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$ сходится равномерно по $(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$ на каждом компакте при $t \in (-\infty, +\infty)$ и справедлива оценка

$$|F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})| \leq \|F^0\| \xi^s \exp\left(-\frac{\beta}{3} \sum_{i=-s_2}^{s_1} \frac{v_i^2}{2}\right) e^{t/(t_0 \sqrt{e})}, \quad (5)$$

где $t_0 \equiv (1/3)\beta(2^3\sqrt{2\pi}\xi)^{-1}$. Функции $F_s(t)$ являются слабыми решениями уравнений Боголюбова (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Построим оценку типичного слагаемого n -го члена ряда (4), например

$$(\mathfrak{A}^+(\tau_1) \dots \mathfrak{A}^+(\tau_n) S(-t_n) F^0)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1}).$$

Перейдем к новым переменным интегрирования $V_i = v_{s_1+i-1} - v_{s_1+i}$, где $i = 1, \dots, n$. Подынтегральная функция из выражения $(\mathfrak{A}^+(\tau_1) \dots \mathfrak{A}^+(\tau_n) S(-t_n) F^0)_s(x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})$ примет вид

$$\prod_{i=1}^n (V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots) - v_{s_1+i}) F_{s+n}^0(X_{-s_2}(-t_n, \dots), \dots, X_{s_1+n}(-t_n, \dots)), \quad (6)$$

где функции $V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots)$, $X_j(-t_n, \dots)$ зависят от соответствующих начальных данных согласно формуле (4) и определениям (3).

Для произвольных $F^0 \in L_{\xi, \beta}^\infty$, используя закон сохранения энергии, выражение (6) можно оценить согласно неравенству

$$|F_{s+n}^0(X_{-s_2}(-t_n, \dots), \dots, X_{s_1+n}(-t_n, \dots))| \leq \xi^{n+s} \|F^0\| \exp\left(-\beta \sum_{i=-s_2}^{s_1+n} \frac{v_i^2}{2}\right)$$

и следующей лемме.

ЛЕММА. *Справедливо неравенство*

$$\prod_{i=1}^n (|V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots)| + |v_{s_1+i}|) \exp\left(-\alpha \sum_{j=-s_2}^{s_1+n} v_j^2\right) \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-n/2}. \quad (7)$$

Докажем лемму. Используя неравенство Коши и закон сохранения энергии, получаем

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (|V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots)| + |v_{s_1+i}|) &\leq \\ &\leq \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (|V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots)| + |v_{s_1+i}|)\right)^n \leq \\ &\leq \left(\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots))^2} + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{s_1+i}^2}\right)^n \leq \\ &\leq \left(\sqrt{2\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots))^2 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_{s_1+i}^2\right)}\right)^n \leq \\ &\leq \left(\frac{4}{n}\right)^{n/2} \left(\sum_{j=-s_2}^{s_1+n} v_j^2\right)^{n/2}. \end{aligned}$$

Вычисляя значение

$$\sup_{\{v_j\}} \left(\frac{4}{n}\right)^{n/2} \left(\sum_{j=-s_2}^{s_1+n} v_j^2\right)^{n/2} \exp\left(-\alpha \sum_{j=-s_2}^{s_1+n} v_j^2\right) = \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-n/2},$$

приходим к неравенству (7).

Аналогично оцениваются слагаемые, определяющиеся операторами $\mathfrak{A}^{+*}(\tau_i)$, $\mathfrak{A}^+(\tau_i)$ и $\mathfrak{A}^-(\tau_i)$, $\mathfrak{A}^*(\tau_i)$ и $\mathfrak{A}(\tau_i)$.

Положим $\alpha = \beta/6$, тогда каждый интеграл по скорости в (4) оценим величиной $\sqrt{\pi\alpha^{-1}}$. В итоге получаем оценку (5). Теорема доказана.

3. Замечание. Отметим, что полученные в работе [2] оценки имеют вид

$$\prod_{i=1}^n (|V_{s_1+i-1}(t_i - t_{i-1}, \dots)| + |v_{s_1+i}|) \exp\left(-\alpha \sum_{j=-s_2}^{s_1+n} v_j^2\right) \leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} \sqrt{n!},$$

$$|F_s(t, x_{-s_2}, \dots, x_{s_1})| \leq \|F^0\| \xi^s \exp\left(-\frac{\beta}{3} \sum_{i=-s_2}^{s_1} \frac{v_i^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^n.$$

Из того, что

$$\left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} e^{-n/2} < \left(\frac{2}{\alpha}\right)^{n/2} \sqrt{n!},$$

$$\|F^0\| \xi^s \exp\left(-\frac{\beta}{3} \sum_{i=-s_2}^{s_1} \frac{v_i^2}{2}\right) e^{t/(t_0\sqrt{e})} < \|F^0\| \xi^s \exp\left(-\frac{\beta}{3} \sum_{i=-s_2}^{s_1} \frac{v_i^2}{2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} \left(\frac{t}{t_0}\right)^n,$$

получаем улучшение оценки теоремы существования глобальных решений, которые описывают эволюцию произвольных неравновесных состояний одномерной системы бесконечного числа частиц.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов*. Проблемы динамической теории в статистической физике. М.: Гостехиздат, 1946.
- [2] *В. И. Герасименко*. ТМФ. 1992. Т. 91. № 1. С. 120–128.
- [3] *C. Cercignani, V. I. Gerasimenko, D. Ya. Petrina*. Many-Particle Dynamics and Kinetic Equations. Dordrecht: Kluwer, 1997.

Поступила в редакцию 8.II.2005 г.,
после доработки 23.III.2005 г.