Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили, Внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного тела в инерциальной системе координат, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 425–432

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1911>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:17:41

© 2005 г.

А. А. Логунов*, М. А. Мествиришвили*

ВНЕШНЕЕ ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ НЕСТАТИЧЕСКОГО СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА В ИНЕРЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Показано, что в полевой теории гравитации внешнее гравитационное поле нестатического сферически-симметричного источника, описываемое диагональным метрическим тензором, может быть только статическим.

Ключевые слова: релятивистская теория гравитации, теорема Биркгофа, масса гравитона, нестатический сферически-симметричный источник.

В общей теории относительности (ОТО), которая связывает гравитационное поле с метрическим тензором риманова пространства, в классе допустимых функций доказана теорема Биркгофа, согласно которой внешнее поле нестатического сферически-симметричного тела может быть только статическим. В релятивистской теории гравитации (РТГ) [1], [2] гравитационное поле $\phi^{\mu\nu}$ является физическим полем, развивающимся в пространстве Минковского, а его источник – сохраняющийся в пространстве Минковского тензор энергии-импульса всех полей материи, включая и гравитационное поле.

Такой подход приводит к эффективной метрике риманова пространства и к другой системе уравнений, которая отличается от системы уравнений ОТО, а поэтому при изучении данного вопроса необходимо специальное рассмотрение. Полная система уравнений РТГ имеет вид

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \frac{m^2}{2}\left[g^{\mu\nu} + \left(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}g^{\alpha\beta}\right)\gamma_{\alpha\beta}\right] = 8\pi T^{\mu\nu}, \quad (1)$$

$$D_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} = \partial_\nu \tilde{g}^{\nu\mu} + \gamma_{\alpha\beta}^\mu \tilde{g}^{\alpha\beta} = 0, \quad (2)$$

где тензор энергии-импульса вещества согласно Гильберту определен равенством

$$\sqrt{-g}T^{\mu\nu} = -2\frac{\delta L_M}{\delta g_{\mu\nu}},$$

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Anatoly.Logunov@ihep.ru

m – масса гравитона, L_M – плотность лагранжиана вещества. Эффективная метрика риманова пространства определена следующим образом:

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \tilde{\gamma}^{\mu\nu} + \tilde{\phi}^{\mu\nu},$$

$$\tilde{g}^{\mu\nu} = \sqrt{-g} g^{\mu\nu}, \quad \tilde{\gamma}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \gamma^{\mu\nu}, \quad \tilde{\phi}^{\mu\nu} = \sqrt{-\gamma} \phi^{\mu\nu}.$$

Система уравнений (1), (2) общековариантна относительно произвольных преобразований координат и форминвариантна относительно преобразований Лоренца. Это означает, что *принцип относительности имеет всеобщее значение*. В РТГ, в противоположность ОТО, он точно выполняется для всех физических явлений, в том числе и гравитационных. Именно поэтому в теории имеют место фундаментальные законы сохранения энергии-импульса и момента количества движения системы. Система координат в уравнениях (1), (2) задается метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$ пространства Минковского. Мы выбрали систему единиц, в которой $\hbar = c = G = 1$.

Для того чтобы времениподобные и изотропные интервалы в эффективном римановом пространстве не выходили за конус причинности пространства Минковского, должны выполняться условия

$$g_{\mu\nu} U^\mu U^\nu \leq 0, \quad \gamma_{\mu\nu} U^\mu U^\nu = 0. \quad (3)$$

Эффективное риманово пространство в РТГ имеет простую топологию. В ОТО в общем случае топология не простая. Именно поэтому полевые представления о гравитации в принципе не могут привести к уравнениям ОТО.

Ниже мы установим, что внешнее гравитационное поле вида

$$ds^2 = U(t, r) dt^2 - V(t, r) dr^2 - W^2(t, r) [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2], \quad (4)$$

создаваемое *нестатическим* сферически-симметричным источником в инерциальной системе координат, может быть только *статическим*, т.е. метрические коэффициенты U, V, W не зависят от времени t .

Инерциальная система координат в пространстве Минковского задается интервалом

$$d\sigma^2 = dt^2 - dr^2 - r^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2]. \quad (5)$$

На основании уравнений (1) для задачи, определяемой соотношениями (4) и (5), находим уравнения для функций U, V и W :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{W^2} - \frac{1}{2V} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) - \frac{3}{4VW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \right) + \\ & + \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \frac{\partial \ln(VW)}{\partial t} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \\ & \frac{1}{W^2} + \frac{1}{2U} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{W^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) + \frac{3}{4UW^4} \left(\frac{\partial W^2}{\partial t} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2UW^2} \frac{\partial W^2}{\partial t} \right) - \\ & - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial \ln(UW)}{\partial r} + \frac{m^2}{2} \left[1 - \frac{r^2}{W^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{U} - \frac{1}{V} \right) \right] = 0, \\ & \frac{1}{W^2} \frac{\partial^2 W^2}{\partial t \partial r} - \frac{1}{2W^4} \frac{\partial W^2}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} - \frac{1}{2VW^2} \frac{\partial V}{\partial t} \frac{\partial W^2}{\partial r} - \frac{1}{2UW^2} \frac{\partial U}{\partial r} \frac{\partial W^2}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Уравнения (2) для выражений (4) и (5) принимают вид

$$\begin{aligned} W^2 &= \sqrt{\frac{U}{V}} q(r), \\ \frac{\partial}{\partial r} \left(W^2 \sqrt{\frac{U}{V}} \right) &= 2r\sqrt{UV}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $q(r)$ – произвольная функция.

Для дальнейшего удобно пользоваться представлением

$$U(t, r) = e^{\mu(t, r)}, \quad V(t, r) = e^{\nu(t, r)}, \quad W^2(t, r) = e^{\lambda(t, r)}, \quad q(r) = e^{\sigma(r)}.$$

В переменных $\mu, \nu, \lambda, \sigma$ уравнения (6) имеют вид

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left(\lambda'' + \frac{3}{4}(\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'\nu' \right) + \frac{1}{2}e^{-\mu}\dot{\lambda} \left(\dot{\nu} + \frac{1}{2}\dot{\lambda} \right) + \\ + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} + \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} e^{-\lambda} + e^{-\mu} \left(\ddot{\lambda} + \frac{3}{4}(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\dot{\mu} \right) - \frac{1}{2}e^{-\nu}\lambda' \left(\mu' + \frac{1}{2}\lambda' \right) + \\ + \frac{m^2}{2} \left[1 - r^2 e^{-\lambda} - \frac{1}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) \right] = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{\lambda}' + \frac{1}{2}\dot{\lambda}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\nu}\lambda' - \frac{1}{2}\dot{\lambda}\mu' = 0, \quad (10)$$

где, например, $\dot{\lambda} = \partial\lambda/\partial t$, $\lambda' = \partial\lambda/\partial r$.

Уравнения (7) принимают вид

$$\lambda - \frac{1}{2}(\mu - \nu) = \sigma(r), \quad (11)$$

$$\mu' - \nu' + \sigma' = 2re^{\nu-\lambda}. \quad (12)$$

Введем обозначения

$$2\omega = \mu + \nu, \quad (13)$$

$$f = \lambda - \sigma(r). \quad (14)$$

Согласно (11) имеем

$$\mu - \nu = 2f. \quad (15)$$

Из (13) и (15) находим

$$\mu = \omega + f, \quad \nu = \omega - f. \quad (16)$$

Уравнение (12) выразим через функции ω, f и σ :

$$2f' + \sigma' = 2re^{\omega-2f-\sigma}. \quad (17)$$

Дифференцируя (17) по t , находим

$$2\dot{f}' = (2f' + \sigma')(\dot{\omega} - 2\dot{f}).$$

Подставляя это выражение в уравнение (10) и учитывая равенства (14), (16), получим неоднородное линейное уравнение в частных производных

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} f' - \frac{\partial \omega}{\partial r} \dot{f} = 3\dot{f} f'. \quad (18)$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующая уравнению (18), имеет вид

$$\frac{dt}{f'} = \frac{dr}{-\dot{f}} = \frac{d\omega}{3\dot{f} f'}.$$

Отсюда находим

$$d\omega = 3\dot{f} dt, \quad d\omega = -3f' dr.$$

Складывая эти равенства, получим

$$d\omega = \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial t} dt - \frac{3}{2} \frac{\partial f}{\partial r} dr.$$

Из условия полного дифференциала находим

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t \partial r} = 0,$$

но последнее означает, что функция f представима в форме

$$f(t, r) = \psi(t) + \varphi(r). \quad (19)$$

Общее решение уравнения (18) имеет вид

$$\omega(t, r) = \frac{3}{2}(\psi(t) - \varphi(r)) + F(f), \quad (20)$$

где F — произвольная функция.

С учетом выражений (19) и (20) уравнение (17) принимает форму

$$2\varphi' + \sigma' = 2r \exp \left[-\frac{1}{2}\psi(t) - \frac{7}{2}\varphi(r) + F(f) \right].$$

Левая часть этого уравнения не зависит от t , а поэтому правая часть также должна не зависеть от t . Это возможно, если $\psi(t)$ постоянна, но отсюда следует, что функции μ , ν , λ не зависят от времени. В этом случае гравитационное поле вида (4) статическое. Но возможен и второй случай, когда $F = f/2$. Тогда

$$\omega(t, r) = 2\psi(t) - \varphi(r),$$

а функции μ , ν , λ согласно (16) и (14) будут равны

$$\mu(t) = 3\psi(t), \quad (21)$$

$$\nu(t, r) = \psi(t) - 2\varphi(r), \quad (22)$$

$$\lambda(t, r) = \psi(t) + \varphi(r) + \sigma(r) = f + \sigma. \quad (23)$$

Для анализа данного случая нам необходимо обратиться к уравнениям (8) и (9). Разность этих уравнений равна

$$\begin{aligned} e^{-\nu} \left[-\lambda'' - \frac{1}{2}(\lambda')^2 + \frac{1}{2}\lambda'(\mu' + \nu') \right] + \\ + e^{-\mu} \left[-\ddot{\lambda} - \frac{1}{2}(\dot{\lambda})^2 + \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} + \dot{\nu}) \right] + \frac{m^2}{2}(e^{-\mu} - e^{-\nu}) = 0, \end{aligned} \quad (24)$$

а их сумма –

$$\begin{aligned} 2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \nu') \right] + \\ + e^{-\mu} \left[\ddot{\lambda} + (\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) \right] + m^2(1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Согласно (11) имеем

$$(\dot{\lambda})^2 - \frac{1}{2}\dot{\lambda}(\dot{\mu} - \dot{\nu}) = 0,$$

поэтому уравнение (25) несколько упрощается:

$$2e^{-\lambda} - e^{-\nu} \left[\lambda'' + (\lambda')^2 - \frac{1}{2}\lambda'(\mu' - \nu') \right] + e^{-\mu} \ddot{\lambda} + m^2(1 - r^2 e^{-\lambda}) = 0. \quad (26)$$

Выразим уравнения (24) и (26) через функции ω , f , σ :

$$-f'' - \sigma'' - \frac{1}{2}(f' + \sigma')^2 + (f' + \sigma')\omega' - \frac{m^2}{2} + e^{-2f} \left(-\ddot{f} - \frac{1}{2}(\dot{f})^2 + \dot{f}\dot{\omega} + \frac{m^2}{2} \right) = 0, \quad (27)$$

$$2 \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) e^{-(\lambda-\nu)} - [f'' + \sigma'' + (f' + \sigma')^2 - f'(f' + \sigma')] + e^{-2f} (\ddot{f} + m^2 e^\mu) = 0. \quad (28)$$

Согласно (12) имеем

$$2r e^{\nu-\lambda} = 2f' + \sigma', \quad (29)$$

поэтому после замены экспоненциального множителя уравнение (28) принимает вид

$$\frac{1}{r} \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) (2f' + \sigma') - [f'' + \sigma'' + (f' + \sigma')^2 - f'(f' + \sigma')] + e^{-2f} (\ddot{f} + m^2 e^\mu) = 0. \quad (30)$$

Так как μ зависит только от t , а $f = \psi(t) + \varphi(r)$, то в уравнениях (27) и (30) переменные t и r разделяются:

$$-f'' - \sigma'' - \frac{1}{2}(f' + \sigma')^2 + (f' + \sigma')\omega' - \frac{m^2}{2} = ke^{-2\varphi(r)}, \quad (31)$$

$$\ddot{f} + \frac{1}{2}(\dot{f})^2 - \dot{f}\dot{\omega} - \frac{m^2}{2} = ke^{2\psi(t)}, \quad (32)$$

$$f'' + \sigma'' + \sigma'(f' + \sigma') - \frac{1}{r}\left(1 - \frac{m^2 r^2}{2}\right)(2f' + \sigma') = pe^{-2\varphi(r)}, \quad (33)$$

$$\ddot{f} + m^2 e^\mu = pe^{2\psi(t)}, \quad (34)$$

где k и p — постоянные разделения.

Обратимся к уравнениям (32) и (34). Введем новую переменную

$$\psi(t) = \ln a^2(t). \quad (35)$$

Уравнения (32) и (34) принимают вид

$$2a\ddot{a} - 8\dot{a}^2 - \frac{m^2}{2}a^2 = ka^6, \quad (36)$$

$$2a\ddot{a} - 2\dot{a}^2 + m^2 a^8 = pa^6. \quad (37)$$

Отсюда находим

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}[m^2 a^2 + 2m^2 a^8 + 2(k-p)a^6]. \quad (38)$$

Дифференцируя, получим

$$\ddot{a} = -\frac{1}{24}[2m^2 a + 16m^2 a^7 + 12(k-p)a^5]. \quad (39)$$

Подставляя (38) и (39) в уравнение (36), находим соотношение между постоянными разделения $p = -2k$. При этом имеем

$$\dot{a}^2 = -\frac{1}{12}(m^2 a^2 + 2m^2 a^8 + 6ka^6). \quad (40)$$

Перейдем теперь к анализу уравнений (31) и (33). С учетом (22) и (23) уравнение (29) принимает вид

$$\varphi' = -\frac{1}{2}\sigma' + re^{-3\varphi-\sigma}. \quad (41)$$

Дифференцируя это выражение, находим

$$\varphi'' = -\frac{1}{2}\sigma'' + \frac{1}{2}r\sigma'e^{-3\varphi-\sigma} + e^{-3\varphi-\sigma} - 3r^2e^{-6\varphi-2\sigma}. \quad (42)$$

Подставляя (41) и (42) в уравнения (31) и (33), получим

$$\begin{aligned} -3r^2 e^{-2\sigma} x^2 + 2kx^{2/3} &= -x(2 + 2r\sigma')e^{-\sigma} - \sigma'' + \frac{1}{4}(\sigma')^2 - m^2, \\ -3r^2 e^{-2\sigma} x^2 + 2kx^{2/3} &= x \left[2 \left(1 - \frac{m^2 r^2}{2} \right) - \frac{3}{2}r\sigma' - 1 \right] e^{-\sigma} - \frac{1}{2}\sigma'' - \frac{1}{2}(\sigma')^2, \end{aligned} \quad (43)$$

где мы ввели обозначение $x = e^{-3\varphi}$.

Рассмотрим уравнения

$$\begin{aligned} -3r^2 e^{-2\sigma} x^2 + 2x(1 + r\sigma')e^{-\sigma} + \sigma'' - \frac{1}{4}(\sigma')^2 &= 0, \\ -3r^2 e^{-2\sigma} x^2 - x \left(1 - \frac{3}{2}r\sigma' \right) e^{-\sigma} + \frac{1}{2}\sigma'' + \frac{1}{2}(\sigma')^2 &= 0. \end{aligned} \quad (44)$$

Вычитая одно уравнение из другого, получим

$$x = \frac{(3/4)(\sigma')^2 - (1/2)\sigma''}{3 + (1/2)r\sigma'} e^{\sigma} = \alpha = e^{-3\varphi}. \quad (45)$$

При соответствующем σ величина α является корнем уравнений (44). Подставляя в уравнения (43) значение $x = \alpha$, находим

$$2k\alpha^{2/3} = -m^2, \quad (46)$$

$$2k = -\alpha^{1/3} m^2 r^2 e^{-\sigma}. \quad (47)$$

Из уравнений (46) и (47) имеем

$$\alpha = \frac{1}{r^2} e^{\sigma}. \quad (48)$$

Поскольку согласно (46) величина α должна быть постоянной, из выражения (48) следует

$$\sigma = \ln \alpha + \ln r^2. \quad (49)$$

Из соотношений (46) и (47) находим

$$k = -\frac{m^2}{2\alpha^{2/3}}. \quad (50)$$

Согласно принципу причинности (3) имеем $U \leq V$. Чтобы удовлетворить этому неравенству, достаточно, учитывая (21) и (22), наложить следующие условия:

$$1 \leq e^{-2\varphi(r)}, \quad (51)$$

$$e^{2\psi(t)} \leq 1. \quad (52)$$

Неравенство (52) отражает физическое свойство гравитационного поля замедлять ход времени по сравнению с инерциальным временем. Учитывая (45), запишем условие (51) в форме

$$\alpha^{2/3} \geq 1. \quad (53)$$

Подставляя значение k из (50) в (40), получим

$$\dot{a}^2 = -\frac{m^2 a^8}{12} \left(\frac{1}{a^6} + 2 - \frac{3}{\alpha^{2/3} a^2} \right), \quad a > 0. \quad (54)$$

Поскольку правая часть (54) с учетом (53) строго отрицательна, а левая часть всегда положительна, равенство возможно только при условии, когда a постоянна, а правая часть равна нулю.

Правая часть равенства (54) удовлетворяет неравенству

$$\left(\frac{1}{a^6} + 2 - \frac{3}{\alpha^{2/3} a^2} \right) \geq \frac{2}{a^6} (a^2 - 1)^2 \left(a^2 + \frac{1}{2} \right).$$

Чтобы левая часть этого неравенства обратилась в нуль, необходимо положить

$$a = 1, \quad \alpha^{2/3} = 1. \quad (55)$$

Учитывая (35), (45) и (55), получим

$$\psi = 0, \quad \varphi = 0. \quad (56)$$

На основании (49), (55) и (56) рассматриваемый второй случай приводит к следующим метрическим коэффициентам:

$$U = 1, \quad V = 1, \quad W^2 = r^2, \quad (57)$$

что соответствует метрике пространства Минковского, т.е. свидетельствует об отсутствии гравитационного поля.

Таким образом, мы приходим к общему выводу: для *нестатического* сферически-симметричного источника в инерциальной системе координат метрические коэффициенты интервала внешнего гравитационного поля вида (4) могут быть только *статическими*. Поскольку внешнее гравитационное поле вида (4) нестатического сферически-симметричного тела является статическим, то на основании результатов работы [3] заключаем, что радиус такого тела благодаря силам отталкивания всегда больше радиуса Шварцшильда.

Благодарности. В заключение авторы выражают глубокую благодарность С. С. Герштейну, А. А. Годизову и В. А. Петрову за ценные обсуждения.

Список литературы

- [1] А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. Релятивистская теория гравитации. М.: Наука, 1989.
- [2] А. А. Логунов. Теория гравитационного поля. М.: Наука, 2001; gr-qc/0210005.
- [3] С. С. Герштейн, А. А. Логунов, М. А. Мествиришвили. ТМФ. 2005. Т. 145. № 2. С. 272–288.

Поступила в редакцию 14.VI.2005 г.