Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об уточнении распределений Гиббса и Бозе–Эйнштейна, *ТМФ*, 2005, том 145, номер 3, 433–436

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1912>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 09:18:59

© 2005 г.

В. П. Маслов*

ОБ УТОЧНЕНИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ГИББСА И БОЗЕ–ЭЙНШТЕЙНА

Строгий вывод распределений Гиббса и Бозе–Эйнштейна на конечном множестве энергий, по существу, сформулирован в качестве некоторой теоремы теории чисел. Для случая не очень большого числа частиц дискуссия по этому вопросу снимается точной теоремой.

Ключевые слова: распределения Гиббса и Бозе–Эйнштейна, теория чисел, закон больших чисел.

При выводе формулы для идеального бозе-газа используется понятие ячеек небольшого фазового объема, окружающего данный уровень энергии. Иначе говоря, некоторый близкий набор энергий объединяется в одну ячейку, а в качестве энергии, отвечающей этой ячейке, рассматривается некоторая средняя энергия по этому набору. Вывод основывается на комбинаторном подходе и методе неопределенных множителей Лагранжа. Здесь мы укажем, во-первых, как выбирать среднюю энергию (по формуле нелинейного среднего; см. [1]), и, во-вторых, какова вероятность того, что частицы распределятся по уровням энергии именно по формулам Гиббса или Бозе–Эйнштейна.

Часто физики полагают, что распределение Гиббса есть постулат. Сам Гиббс привел некоторую аргументацию в пользу этого распределения, но не более того. Мы приведем здесь другой постулат, из которого выведем распределение Бозе–Эйнштейна как переходящее при некоторых условиях в распределение Гиббса. Этот постулат заключается в том, что *все возможные расположения частиц по уровням энергии, меньшим или равным заданной энергии, равновероятны*. В этом случае оказывается, что подавляющее число вариантов расположения будет находиться вблизи распределения Бозе–Эйнштейна, если число частиц достаточно велико.

При этом мы дадим соответствующие оценки. Это важно, поскольку в теории ловушек и вообще в мезоскопической физике число частиц N имеет порядок не 10^{23} , как в статистической физике, а как правило, таково, что N велико, но значение $\ln N$ уже не велико.

Полученный закон, подобно закону больших чисел в теории вероятностей, справедлив в известных пределах, которые здесь будут предъявлены. По существу, этот закон распределения есть некоторая общая теорема теории чисел, а значит, он применим не

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

только к частицам, но и к распределению слов в частотном словаре (закон Шипфа [2]) и к распределению биологических видов, людей по городам и т.д., а также в финансовой математике.

Итак, мы рассматриваем набор энергетических уровней $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ (где $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$) и число частиц $N = \sum_{i=1}^n N_i$ (где N_i — число частиц на i -м уровне) такие, что $\sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$ не превосходит энергию E , где

$$N(\lambda_1 + \varepsilon) < E \leq N \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n}, \quad \varepsilon > 0.$$

Рассмотрим число всевозможных вариантов сумм вида $\sum_{i=1}^n \lambda_i N_i$ при всех N_i таких, что $\sum_{i=1}^n N_i = N$. Число этих вариантов $\mathcal{N}$ можно выразить формулой

$$\mathcal{N} = \sum_{\{N_i\}} \Theta \left(E - \sum_{i=1}^n \lambda_i N_i \right) \delta_{(\sum_{i=1}^n N_i, N)}, \quad (1)$$

где Θ — тета-функция Хевисайда, а δ — функция Кронекера. Разобьем множество $1, 2, \dots, n$, где $n \rightarrow \infty$, на k подмножеств, каждое из которых содержит натуральные числа, лежащие в определенном интервале, где k — конечное, не зависящее от n число. Для простоты, не уменьшая общности, мы можем допустить, что n делится на k , и считать эти интервалы одинаковыми, номера интервалов равны $\alpha = 1, 2, \dots, k$.

Для сформулированной ниже теоремы будет важно соотношение между n и N (при заданном $E \gg 1$).

Мы найдем температуру T , точнее $\beta = 1/(kT)$, k — постоянная Больцмана, при заданных параметрах E и N из следующих обычных соотношений:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{e^{\beta(\lambda_i - \mu)} - 1} = E, \quad \sum_{i=1}^n \frac{1}{e^{\beta(\lambda_i - \mu)} - 1} = N, \quad (2)$$

где μ — химический потенциал. Формула Бозе–Эйнштейна уточняется следующим образом. Введем обозначения

$$\tilde{N}_\alpha = \sum_{i=\alpha n/k+1}^{(\alpha+1)n/k} \frac{1}{e^{\beta(\lambda_i - \mu)} - 1}, \quad \bar{N}_\alpha = \sum_{i=\alpha n/k+1}^{(\alpha+1)n/k} N_i,$$

$\bar{N}_\alpha$ — число частиц, с энергиями $\lambda_{\alpha n/k+1}, \dots, \lambda_{(\alpha+1)n/k}$, попадающими в интервал с номером α . Обозначим через Δ “разрешающую способность” [3].

ТЕОРЕМА. Число вариантов, удовлетворяющих неравенству

$$\sum_{\alpha=1}^k |\bar{N}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \geq \Delta,$$

где

$$\Delta = \begin{cases} \sqrt{N} N \ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon} N, & N \ll n, \\ \sqrt{n} n \ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon} N, & N \sim n, \\ \frac{N}{\sqrt{n}} n \ln^{\frac{1}{2}+\varepsilon} N, & N \gg n, \end{cases} \quad (3)$$

будет мало, а именно равно $O(1/n^\infty) + O(1/N^\infty)$.

Иначе говоря, число вариантов разложения N частиц по энергиям $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ вне значений $\bar{N}_\alpha$, удовлетворяющих условию $\sum |\bar{N}_\alpha - \tilde{N}_\alpha| \leq \Delta$, будет иметь порядок $O(n^{-k}) + O(N^{-k})$, где k сколь угодно велико.

Наметим доказательство. Введем обозначения

$$\nu = \beta\mu, \quad \xi_j(\nu, \beta) = \frac{1}{1 - e^{\nu - \beta\lambda_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

$$\zeta_\alpha(\nu, \beta) = \prod_{i=\alpha[\frac{n}{k}]+1}^{(\alpha+1)[\frac{n}{k}]} \xi_j(\nu, \beta), \quad \zeta = \prod_{\alpha=1}^k \zeta_\alpha.$$

Имеем

$$\mathcal{N} = \sum_{\{N_j\}} \frac{e^{-\nu N}}{i(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{e^{-iN\varphi}}{x-i} \exp \left\{ \beta(1+ix) \left(E - \sum_i^n N_i \lambda_i \right) + (i\varphi + \nu)N_j \right\} \right] dx d\varphi, \quad (4)$$

где β и ν – произвольные действительные параметры, для которых ряд сходится.

Если параметры ν, β определяются из условий (2), то имеется точка перевала $x = 0$ для интеграла (4), и вычисление его методом перевала в этой точке в главном члене дает $\zeta(\nu, \beta)$ [4].

Для всех положительных c и Δ выполняется неравенство

$$\tilde{\Theta} = \Theta \left\{ \left| \sum_{\alpha=1}^k (\bar{N}_\alpha - \tilde{N}_\alpha) \right| - \Delta \right\} \leq 2^k e^{-c\Delta} \prod_{\alpha=1}^k \text{ch } c(\bar{N}_\alpha - \tilde{N}_\alpha). \quad (5)$$

Чтобы оценить $\mathcal{N}$ в (4), рассмотрим разбиение единицы.

Пусть $e_1(x) \in C^\infty$, $e_2(x) \in C_0^\infty$, $e_3(x) \in C^\infty$ – разбиение единицы ($e_1(x) + e_2(x) + e_3(x) \equiv 1$) такое, что носитель второй функции $\text{supp } e_2(x) = (-1, 1)$. Подставив это разбиение в (4), оценим тот член суммы $1 = \sum_{i=1}^3 e_i(x)$, который содержит $e_1(x)$. Полагая $dy = (1/iE) de^{iEx}$ и интегрируя по частям, получим оценку этого члена вида $O(1/\mathcal{E})$, где $\mathcal{E}$ – коэффициент в экспоненте при x . Повторяя эту процедуру k раз, где k – любое число, получим оценку этого члена вида $O(1/\mathcal{E}^\infty)$. Аналогично получаем оценку для члена, содержащего $e_3(x)$.

Отсюда при

$$C = \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} \right),$$

обозначая через $\tilde{\mathcal{N}}$ выражение под первым знаком суммы в (4), получим [5]

$$\begin{aligned} \sum_{\{N_j\}} \tilde{\mathcal{N}} \tilde{\Theta} &\leq 2^k C e^{-c\Delta} e^{\beta E} \sum_{\{N_i\}} \exp \left\{ -\beta \sum_i N_i \lambda_i + \nu N_i \right\} \prod_{\alpha=1}^k \operatorname{ch} c(\bar{N}_\alpha - \tilde{N}_\alpha) + O\left(\frac{1}{\mathcal{E}^\infty}\right) = \\ &= 2^k C e^{\beta E} e^{-c\Delta} \prod_{\alpha=1}^k (\zeta_l(\nu + c, \beta) e^{-c\tilde{N}_\alpha} + \zeta_l(\nu - c, \beta) e^{c\tilde{N}_\alpha}) + O\left(\frac{1}{\mathcal{E}^\infty}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

Разложим $\zeta_l(\nu + c, \beta)$ по формуле Тейлора:

$$\ln(\zeta_l(\nu + c, \beta)) = \ln \zeta_l(\nu, \beta) + c(\ln \zeta_l)'_\nu(\nu, \beta) + \frac{c^2}{2}(\ln \zeta_l)''_\nu(\nu + \gamma c, \beta),$$

где $\gamma < 1$. Положим $c = \Delta/D(\nu, \beta)$, где $D(\nu, \beta) = (\ln \zeta)''_\nu(\nu, \beta)$ — дисперсия. Учитывая, что $\ln'_\nu \zeta_\alpha \equiv \tilde{N}_\alpha$, нетрудно убедиться, что правая часть соотношения (6) не превосходит

$$2^k C e^{\beta E} \prod_{\alpha=1}^k \zeta_\alpha(\nu, \beta) \exp \left\{ -\frac{\Delta^2}{D(\nu, \beta)} + \frac{\Delta^2 D(\nu + \gamma \Delta/D(\nu, \beta), \beta)}{2(D(\nu, \beta))^2} \right\}.$$

Накладывая на Δ ограничение вида

$$D\left(\nu + \frac{\Delta}{D(\nu, \beta)}\right) \leq (2 - \varepsilon)D(\nu, \beta),$$

где $\varepsilon > 0$ — достаточно малое число, получим окончательно

$$\tilde{\Theta} \leq 2^k C e^{-\varepsilon \Delta^2/D(\nu, \beta)} + O\left(\frac{1}{\mathcal{E}^\infty}\right).$$

Нетрудно оценить дисперсию D как функцию от N, n : $D \sim N$ при $N < n$, а при $n \gg N$ оценка для D дает следующее соотношение: $D \sim N^2/n$. Отсюда, учитывая результат вычисления $\mathcal{N}$ (4) по методу перевала, получаем оценку для $\tilde{\Theta}$ (5).

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 3. С. 377–395.
- [2] В. П. Маслов. ДАН. 2005. Т. 405. № 5 (в печати).
- [3] В. П. Маслов. Матем. заметки. 2005. Т. 78. № 6. С. 870–877.
- [4] М. В. Федорюк. Метод перевала. М.: Наука, 1977.
- [5] В. П. Маслов. ДАН. 2005. Т. 404. № 6. С. 731–736.

Поступила в редакцию 10.X.2005 г.