Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, Д. В. Трещёв, Эволюция мер в фазовом пространстве нелинейных гамильтоновых систем, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 496–506

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1914>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 11:21:28

© 2003 г.

В. В. Козлов*, Д. В. Трещев*

ЭВОЛЮЦИЯ МЕР В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Установлено существование слабых пределов решений (из класса L_p , $p \geq 1$) уравнения Лиувилля для невырожденных квазиоднородных уравнений Гамильтона. Найдены предельные вероятностные распределения в конфигурационном пространстве. Указаны условия равномерного распределения ансамбля Гиббса для геодезических потоков на компактных многообразиях.

Ключевые слова: квазиоднородная гамильтонова система, геодезический поток, слабый предел, ансамбль Гиббса, равномерное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть Γ – фазовое пространство динамической системы

$$\frac{dz}{dt} = v(z), \quad z \in \Gamma, \quad (1)$$

g^t – ее фазовый поток, сохраняющий меру μ . Далее мы всегда считаем, что рассматриваемые векторные поля задают динамические системы в том смысле, что соответствующие фазовые потоки g^t определены при всех $t \in \mathbb{R}$. Пусть

$$1 \leq p, q \leq \infty, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2)$$

Рассмотрим две функции $f_p, f_q: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$, $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$. Так как пространства L_p и L_q взаимно сопряжены, определена операция

$$(f_p, f_q) = \int_{\Gamma} f_p(z) f_q(z) d\mu(z).$$

Поскольку g^{-t} сохраняет меру μ , то $f_p \circ g^{-t} \in L_p(\Gamma, \mu)$ для всех t .

Рассмотрим функцию времени

$$k(t) = (f_p \circ g^{-t}, f_q). \quad (3)$$

В дальнейшем важную роль играет предельный случай, когда $p = 1$, $q = \infty$ (напомним, что пространство L_{∞} состоит из измеримых существенно ограниченных функций).

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: dtresch@mech.math.msu.su

Мы будем изучать условия, при которых $k(t)$ имеет предел при $t \rightarrow \pm\infty$.

Пусть $\mu(\Gamma) < \infty$ и (3) – система с перемешиванием. Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t) = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_{\Gamma} f_p d\mu \int_{\Gamma} f_q d\mu. \quad (4)$$

В силу предположения о конечности меры $\mu(\Gamma)$ функции f_p и f_q , очевидно, интегрируемые.

Хорошо известно, что равенство (4) справедливо для $p = q = 2$. В случае произвольных p, q , удовлетворяющих (2), оно легко доказывается с помощью следующих рассуждений. Для определенности будем считать, что $p < 2 < q$. Для любого $\varepsilon > 0$ представим функцию f_p в виде $f_p = \hat{f}_p + \tilde{f}_p$, где $\hat{f}_p \in L_2(\Gamma, \mu)$ и $\|\tilde{f}_p\|_{L_p} < \varepsilon$ (в качестве $\hat{f}_p$ можно взять, например, срезку функции f_p). Тогда

$$k(t) = (\hat{f}_p \circ g^{-t}, f_q) + r, \quad r = (\tilde{f}_p \circ g^{-t}, f_q).$$

Остается заметить, что $f_q \in L_2(\Gamma, \mu)$ и $|r| \leq \varepsilon \|f_q\|_{L_q}$.

Для систем без перемешивания (даже эргодических) этот предел может не существовать.

ПРИМЕР 1. Пусть Γ – n -мерный тор $\mathbb{T}^n = \{z_1, \dots, z_n \pmod{2\pi}\}$, а система (1) задается уравнениями

$$\dot{z}_1 = \omega_1, \quad \dots, \quad \dot{z}_n = \omega_n$$

с постоянными частотами $\omega_1, \dots, \omega_n$, независимыми над кольцом целых чисел. Если f_p и f_q – характеристические функции измеримых областей на $\mathbb{T}^n$, то $k(t)$ осциллирует и не имеет предела при $t \rightarrow \pm\infty$.

Обобщением предыдущего примера служит

ПРИМЕР 2. Пусть $v(x)$ – произвольное векторное поле на гладком многообразии M , сохраняющее меру μ . Рассмотрим динамическую систему на $M \times \mathbb{T}$, где $\mathbb{T} = \{\varphi \pmod{2\pi}\}$ – одномерный тор:

$$\dot{x} = v(x), \quad \dot{\varphi} = 1.$$

Если носители функций f_p, f_q при естественной проекции $M \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ проецируются внутрь некоторых отрезков

$$I_p, I_q \subset \mathbb{T} \quad (\mathbb{T} \setminus I_p \neq \emptyset, \quad \mathbb{T} \setminus I_q \neq \emptyset),$$

то $k(t)$, вообще говоря, осциллирует и не имеет предела при $t \rightarrow \pm\infty$.

ПРИМЕР 3. Пусть $T: M \rightarrow M$ – диффеоморфизм, сохраняющий меру μ на гладком компактном многообразии M . Напомним стандартную конструкцию надстройки над T . Пусть $l: M \rightarrow (0, \infty)$ – гладкая функция. Рассмотрим в прямом произведении $M \times \mathbb{R}$ подмножество

$$\widetilde{M}_l = \{(x, s) \in M \times \mathbb{R}: s \in [0, l(x)]\}.$$

В результате отождествления $(x, l(x)) \sim (T(x), 0)$ это подмножество превращается в гладкое многообразие M_l , на котором определено векторное поле $\partial/\partial s$. Полученная система называется надстройкой над T . Соответствующий фазовый поток сохраняет меру $d\mu ds$ на M_l , где ds – мера Лебега по координате s . Если $l = \text{const}$, то остаются в силе аргументы, приведенные в примере 1. В частности, функция $k(t)$ по-прежнему, как правило, не имеет предела.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть для некоторых функций $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$ существует предел $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = k_\infty$. Тогда

$$k_\infty = (\bar{f}_p, f_q), \quad (5)$$

где

$$\bar{f}_p(z) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f_p \circ g^{-t}(z) dt. \quad (6)$$

Существование предела (6) для почти всех z в случае $p = 1$ следует из эргодической теоремы Биркгофа. Обобщения на случай $p \neq 1$ можно найти в [1], [2]. Функция $\bar{f}_p$ инвариантна относительно g^t . Если $\mu(\Gamma) < \infty$ и $p \geq 1$, то

$$\int_\Gamma f d\mu = \int_\Gamma \bar{f} d\mu.$$

При $p = q = 2$ приведенное выше предложение установлено в работе [3] (доказательство содержится в [4]). В общем случае доказательство аналогично. Для полноты мы приводим его в приложении.

Если система (1) эргодична, то

$$\bar{f}_p = \frac{1}{\mu(\Gamma)} \int_\Gamma f_p d\mu$$

и (4) вытекает из (6).

Мы будем рассматривать системы (1) следующего вида:

$$\frac{dz}{dt} = v(z, \omega), \quad \frac{d\omega}{dt} = 0. \quad (7)$$

Фазовым пространством Γ является прямое произведение $\Lambda \times \Delta$, где Λ — гладкое n -мерное многообразие, а Δ — интервал (возможно, бесконечный) на вещественной оси $\mathbb{R}$. Координата $\omega \in \Delta$ является первым интегралом. Будем предполагать, что при фиксированном ω система имеет инвариантную меру $d\nu = \lambda(z, \omega) d^n z$ на Λ .

Такой вид имеют, в частности, гамильтоновы системы: роль координаты ω играет полная энергия, а Λ — неособая энергетическая поверхность. В этом случае фазовое пространство Γ гамильтоновой системы с гамильтонианом H разбивается на клетки $h_1 \leq H \leq h_2$, причем в интервале (h_1, h_2) нет критических значений функции H .

Напомним определение динамической системы со слоистым потоком [4]. Положим $P_\gamma = \{(z, \omega) \in \Gamma: \omega = \gamma\}$. Это n -мерные интегральные многообразия системы (7). Отображение $\psi_\omega: (z, \omega) \mapsto z$ задает естественный диффеоморфизм, переводящий P_ω в Λ . Векторное поле v касается многообразий P_ω . Обозначим через v_ω ограничение v на P_ω , и пусть g_ω^t — его фазовый поток.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Поток g^t назовем *слоистым*, если существуют гладкая функция $\alpha: \Delta \rightarrow (0, \infty)$ и поток $g_*^\alpha: \Lambda \rightarrow \Lambda$ такие, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_\omega & \xrightarrow{g_\omega^t} & P_\omega \\ \psi_\omega \downarrow & & \downarrow \psi_\omega \\ \Lambda & \xrightarrow{g_*^{\alpha(\omega)t}} & \Lambda \end{array} \quad (8)$$

коммутативна для всех $\omega \in \Delta$ и всех $t \in \mathbb{R}$. Слоистый поток назовем *невыврожденным*, если функция $\alpha(\omega)$ имеет лишь изолированные критические точки.

Отождествляя P_ω и Λ с помощью диффеоморфизма ψ_ω , коммутативность диаграммы (8) можно записать в виде

$$g_\omega^t = g_*^{\alpha(\omega)t}. \quad (9)$$

Примеры систем со слоистыми потоками приведены в работе [4]. К ним относятся, в частности, геодезические потоки на римановых многообразиях (описывающие движение по инерции натуральных механических систем).

ПРИМЕР 4. Гамильтонова система

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

называется *квазиоднородной*, если она инвариантна относительно преобразований подобия

$$t \mapsto s^{-1}t, \quad q \mapsto s^a q, \quad p \mapsto s^b p, \quad H \mapsto s^c H,$$

$s > 0$ – параметр. Веса квазиоднородности a, b, c удовлетворяют естественному соотношению $a + b + 1 = c$. Многообразия P_ω определяются как множества точек $\{p, q: H(p, q) = \omega\}$.

При всех $\omega > 0$ ($\omega < 0$) эти многообразия диффеоморфны. Пусть, например, $\omega > 0$. Положим $\omega = s^c$, $s > 0$. Тогда в качестве многообразия Λ можно взять энергетическую поверхность $\{H = 1\}$, обратный диффеоморфизм ψ_ω^{-1} имеет вид

$$q \mapsto s^a q, \quad p \mapsto s^b p,$$

причем $\alpha(\omega) = 1/s = \omega^{-1/c}$. Таким образом, если $c \neq 0$, то поток квазиоднородной гамильтоновой системы (10) невырожден.

В частности, фазовый поток задачи n гравитирующих тел является невырожденным слоистым потоком. Здесь $a = -2/3$, $b = 1/3$, $c = 2/3$. В задаче о движении по инерции функция Гамильтона – однородная квадратичная форма по импульсам. Соответствующие уравнения Гамильтона тоже квазиоднородны с весами $a = 0$, $b = 1$, $c = 2$.

Если поток g_*^t из (8) сохраняет меру ν_* на многообразии Λ , а σ – любая мера на интервале Δ , то поток g^t на $\Lambda \times \Delta$ сохраняет меру $\mu = \nu_* \times \sigma$. Наш основной результат составляет

ТЕОРЕМА 1. Пусть g^t – невырожденный слоистый поток на $\Gamma = \Lambda \times \Delta$, мера ν_* абсолютно непрерывна относительно меры, заданной на Λ какой-нибудь римановой метрикой, мера σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\mathbb{R}$, причем $\nu_*(\Lambda) < \infty$. Тогда для любых $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$ при p и q , удовлетворяющих условиям (2), существует

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t) = (\bar{f}_p, f_q).$$

При $p = q = 2$ теорема 1 доказана в работе [4]. Доказательство в общем случае аналогично (см. ниже), однако вряд ли может быть получено простым сведением к случаю $p = q = 2$, например путем аппроксимации f_p и f_q функциями из $L_2(\Gamma, \mu)$. Во всяком случае, по-видимому, нельзя избежать ссылок на весьма нетривиальные результаты из

работ [1], [2], полученные без прямого сведения к случаю стандартных эргодических теорем. Из теоремы 1, в частности, вытекает, что для систем с невырожденными слоистыми потоками функция $f_p \circ g^t$ слабо сходится к ее биркгофсовскому среднему $\bar{f}_p$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Для квазиоднородных гамильтоновых систем это означает, что механическая система необратимо стремится к статистическому (т.е. тепловому) равновесию (по Гиббсу). Отметим, что в работе [4] мы предполагали, что $\sigma(\Delta) < \infty$. Позже выяснилось, что требование конечности меры несущественно.

2. НОВАЯ ФОРМА ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

Снова рассмотрим динамическую систему (1) с инвариантной мерой μ . Пусть $h(\omega)$ – плотность некоторой вероятностной меры на $\mathbb{R} = \{\omega\}$: это неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R}, d\omega)$, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) d\omega = 1.$$

ТЕОРЕМА 2. Если $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$, $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(\omega) (f_p \circ g^{\omega t}, f_q) d\omega = (\bar{f}_p, f_q).$$

Теорема 2 является частным случаем теоремы 1. Действительно, заменим исходное уравнение (1) следующей системой вида (7):

$$\dot{z} = \omega v(z), \quad \dot{\omega} = 0. \quad (11)$$

Соответствующий фазовый поток слоистый с $\alpha(\omega) = \omega$. После этого замечания остается положить в теореме 1 вместо f_p и f_q взять $h^{1/p} f_1$ и $h^{1/q} f_2$. Мы сначала приведем доказательство теоремы 2 (см. раздел 5), а затем (в разделе 6) выведем из нее теорему 1.

3. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В КОНФИГУРАЦИОННОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Пусть M – компактное конфигурационное пространство (возможно, с краем) механической системы с n степенями свободы и $x = (x_1, \dots, x_n)$ – локальные координаты на нем. Фазовое пространство Γ – кокасательное расслоение M ($\Gamma = T^*M$). Будем рассматривать движение по инерции, так что функция Гамильтона сводится к кинетической энергии

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) y_i y_j. \quad (12)$$

Если траектория выходит на границу пространства M , то происходит упругое отражение от границы. Фазовый поток этой гамильтоновой системы (с учетом упругих ударов) сохраняет меру Лиувилля $d\mu = d^n x d^n y$.

Согласно Гиббсу нахождение системы в определенном состоянии – случайное событие. Вероятность этого события в начальный момент времени задается вероятностной мерой с суммируемой плотностью $\rho(x, y)$:

$$\rho \in L_1(\Gamma, \mu), \quad \int_{\Gamma} \rho d\mu = 1.$$

Фазовый поток g^t гамильтоновой системы переносит эту меру: в момент времени t ее плотность определяется выражением $\rho_t(z) = \rho \circ g^{-t}(z)$, где $z = (x, y)$ – точка фазового пространства Γ .

Пусть $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ – ограниченная измеримая функция на конфигурационном пространстве. Функцию φ можно продолжить до измеримой функции $\tilde{\varphi}: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ согласно равенству $\tilde{\varphi}(x, y) = \varphi(x)$ для всех $y \in T_x^*M$. Положим

$$k(t) = (\rho \circ g^{-t}, \tilde{\varphi}). \quad (13)$$

Эта функция корректно определена при всех t (здесь $p = 1$, $q = \infty$). Если φ – характеристическая функция некоторой измеримой области $\Phi \subset M$, то $k(t)$ – это доля гамильтоновых систем из ансамбля Гиббса, находящихся в момент времени t в области Φ .

ТЕОРЕМА 3. *Предел $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} k(t)$ существует и равен $(\bar{\rho}, \varphi)$, где $\bar{\rho}$ – биркгоффовское среднее плотности ρ .*

Это утверждение – прямое следствие теоремы 2 и слоистости геодезического потока (с упругими отражениями).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Предположим, что поток g^t эргодический на уровнях энергии $H > 0$. Тогда гамильтоновы системы из ансамбля Гиббса распределены на конфигурационном пространстве $M^n = \{x\}$ с плотностью*

$$\left(\int_M (\det A)^{-1/2} d^n x \right)^{-1} \frac{d^n x}{(\det A)^{1/2}}, \quad A = (a_{ij}(x)). \quad (14)$$

Эта плотность – элемент объема на n -мерном римановом многообразии M , метрика которого порождается кинетической энергией системы (12).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, пусть φ – характеристическая функция измеримой области Φ на M . Ввиду эргодичности величина $\bar{\rho}$ является функцией от энергии $H = (Au, u)/2$. С помощью линейного преобразования $y = C(x)u$ приведем эту положительно определенную квадратичную форму к сумме квадратов:

$$H = \frac{(C^T A C u, u)}{2} = \frac{(u, u)}{2}, \quad C^T A C = E,$$

где E – единичная $(n \times n)$ -матрица. Тогда

$$\int_{\Gamma} \bar{\rho}(H) \varphi d^n x d^n y = \int_{\Gamma} (\det A)^{-1/2} \bar{\rho}\left(\frac{u^2}{2}\right) \varphi d^n x d^n u = \alpha \int_{\Phi} (\det A)^{-1/2} d^n x,$$

где α не зависит от Φ . Что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь наиболее интересный с точки зрения приложений случай: M – подобласть в $\mathbb{R}^n$ с евклидовой метрикой, а H – квадратичная форма по импульсам с постоянными коэффициентами. В частности, плотность распределения (14) постоянна.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Предельное распределение в M равномерно при $t \rightarrow \pm\infty$ тогда и только тогда, когда биркгоффовское среднее $\bar{\rho}$ не зависит от точки в M .*

Более точно, последнее условие надо понимать так, что найдется функция $\bar{\rho}'$, не зависящая от x и почти всюду совпадающая с $\bar{\rho}$. Указанному критерию равномерной распределенности удовлетворяют не только эргодические, но и некоторые интегрируемые системы.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим идеальный газ как бесстолкновительную сплошную среду в прямоугольном параллелепипеде $\Pi^n \subset \mathbb{R}^n$: каждая частица среды движется по инерции независимо от других частиц, упруго отражаясь от стенок Π^n . Утверждается, что независимо от начального распределения частиц газа по объему Π и по скоростям при $t \rightarrow \pm\infty$ газ необратимо стремится к равномерному заполнению объема Π . Это наблюдение Пуанкаре [5] строго доказано в работе [6]. Оно просто выводится из следствия 2. Действительно, предельная плотность $\bar{\rho}$ является первым интегралом бильярда в Π – динамической системы с упругими ударами. Эта система вполне интегрируема и невырождена: она допускает n независимых первых интегралов – квадратов проекций импульса частицы на ребра параллелепипеда Π . Ввиду невырожденности величина $\bar{\rho}$ является функцией только этих интегралов. Следовательно, $\bar{\rho}$ не зависит от точки в Π , и поэтому (согласно следствию 2) предельное распределение газа будет равномерным.

Более интересным и поучительным является следующий

ПРИМЕР 6. Рассмотрим n одинаковых частиц на отрезке $0 \leq x \leq a$; их координаты $x_1, \dots, x_n$ удовлетворяют следующим неравенствам:

$$0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq a. \quad (15)$$

Частицы упруго сталкиваются между собой и с границами отрезка $\{x = 0\}$ и $\{x = a\}$. Поскольку при упругом ударе частицы одинаковой массы обмениваются скоростями, то распределение числа частиц по скоростям вообще не меняется и никакого стремления к распределению Максвелла не происходит (вопреки обычным представлениям статистической механики, использующим дополнительные предположения Больцмана). Тем не менее любая начальная плотность распределения ρ , заданная в $2n$ -мерном фазовом пространстве этой системы, слабо сходится к биркгофскому среднему $\bar{\rho}$, которое от координат $x_1, \dots, x_n$ не зависит. Таким образом, в состоянии статистического (теплового) равновесия все положения n сталкивающихся частиц окажутся равновероятными.

Действительно, указанная система с упругими ударами является интегрируемым бильярдом в области (15). Ее полная интегрируемость вытекает из конечности группы Кокстера многогранника (15) (это группа с графом B_n ; см., например, [7]). Соответствующий бильярд в (15) имеет n независимых инволютивных интегралов в виде однородных полиномов по импульсам с постоянными коэффициентами. Нетрудно убедиться в том, что эта интегрируемая система невырождена.

Аналогичные соображения применимы и к более общей задаче о газе Больцмана–Гиббса – задаче о движении набора идентичных шаров в n -мерном параллелепипеде Π^n ($n \leq 2$), упруго сталкивающихся между собой и со стенками сосуда. Считается, что если радиусы шаров достаточно малы, то эта динамическая система с ударами эргодическая при каждом положительном значении полной энергии (см. обсуждение этого вопроса в работах [8], [9]). Но тогда из следствия 2 вытекает, что независимо от начального (достаточно регулярного) распределения вероятностей в конфигурационном пространстве газа Больцмана–Гиббса предельным распределением вероятностей будет равномерное распределение. Так как для последнего существенные флуктуации плотности частиц маловероятны, то это утверждение можно интерпретировать как необратимое стремление газа Больцмана–Гиббса к равномерному заполнению объемлющего сосуда. Подчеркнем, что при этом не используется специальное предположение Больцмана о статистической независимости парных соударений шаров.

4. ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ L_p

В дальнейшем важную роль играет следующая эргодическая теорема.

ТЕОРЕМА 4. Пусть g^t – поток на пространстве M с мерой μ , $\mu(M) < \infty$, и $f \in L_p(M, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда имеет место сходимость в норме L_p :

$$\frac{1}{T} \int_0^T f \circ g^{-t}(z) dt \rightarrow \bar{f}(z). \quad (16)$$

Эта теорема известна и, в сущности, является почти очевидным следствием теоремы Ионеску-Тулсеа [2] или более общей теоремы Аккоглу [1] (см. также [10]), утверждающих, что сходимость (16) для $f \in L_p(M, \mu)$ имеет место почти всюду.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, используя этот факт, можно для любых наперед заданных $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ найти $T_0 > 0$ такое, что для всех $T > T_0$

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T f \circ g^{-t}(z) dt - \bar{f}(z) \right| < \varepsilon_1, \quad z \in M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2},$$

где $\mu(M \setminus M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}) < \varepsilon_2$.

Величину ε_2 подберем так, чтобы

$$\int_N |f|^p(z) d\mu(z) < \varepsilon_1^p$$

для любого множества $N \subset M$ такого, что $\mu(N) < \varepsilon_2$. Тогда, очевидно,

$$\int_{M \setminus M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} |\bar{f}|^p(z) dz < \varepsilon_1^p.$$

Для $T > T_0$ величина

$$\left\| \frac{1}{T} \int_0^T f \circ g^{-t} dt - \bar{f} \right\|_{L_p}^p$$

имеет вид

$$\left(\int_{M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} + \int_{M \setminus M_{\varepsilon_1, \varepsilon_2}} \right) \left(\frac{1}{T} \int f \circ g^{-t}(z) dt - \bar{f}_p(z) \right)^p d\mu(z) \leq \varepsilon_1^p \mu(M) + 2^p \varepsilon_1^p,$$

откуда вытекает утверждение теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ. При $p = 1$ теорема 4 совпадает с хорошо известным результатом эргодической теории: для пространства конечной меры из сходимости почти всюду выводится сходимость в среднем (по норме L_1 ; см., например, [11]). При $p = 2$ теорема 4 совпадает с классической статистической теоремой фон Неймана (последняя, впрочем, справедлива и без предположения о конечности меры).

5. ОБОБЩЕНИЕ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРЕМЫ

Теорема 2 содержит как частный случай теорему 4. Действительно, пусть h – характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Тогда для любой интегрируемой функции $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(\omega) \varphi(\omega t) d\omega = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Доказательство теоремы 2 само использует теорему 4. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется кусочно-постоянная функция $h_\varepsilon: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что:

1) $h_\varepsilon(\omega) = c_k = \text{const}$ на интервалах (ω_k, ω_{k+1}) , $k = 1, \dots, N$ (возможно, что $\omega_1 = -\infty$ и $\omega_{N+1} = +\infty$, в этих случаях полагаем соответственно $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$);

2) $\Delta \subset (\omega_1, \omega_{N+1})$;

3) $\int_\Delta |h - h_\varepsilon| d\omega < \varepsilon$.

Тогда (с учетом g^t -инвариантности меры μ)

$$\begin{aligned} \left| \int_\Delta h(\omega) (f_p \circ g^{-t}, f_q) d\omega - \int_\Delta h_\varepsilon(\omega) (f_p \circ g^{-t}, f_q) d\omega \right| &\leq \\ &\leq \int_\Delta |h - h_\varepsilon| d\omega \|f_p\|_{L_p} \|f_q\|_{L_q} \leq \varepsilon \|f_p\|_{L_p} \|f_q\|_{L_q}. \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно установить сходимость интегралов

$$J_k(t) = \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} h_\varepsilon(\omega) (f_p \circ g^{-t}, f_q) d\omega.$$

Согласно теореме 4

$$J_k(t) = \frac{c_k}{t} \int_{\omega_k t}^{\omega_{k+1} t} (f_p \circ g^{-t}, f_q) ds \rightarrow c_k (\omega_{k+1} - \omega_k) (\bar{f}_p, f_q)$$

при $t \rightarrow \infty$. Остается заметить, что

$$\sum_1^N c_k (\omega_{k+1} - \omega_k) = \int_\Delta h_\varepsilon(\omega) d\omega = \int_\Delta h(\omega) d\omega + \delta,$$

причем $|\delta| \leq \varepsilon$. Что и требовалось доказать.

6. СЛОИСТЫЕ ПОТОКИ И ЭВОЛЮЦИЯ МЕР

В этом разделе мы докажем теорему 1.

Пусть $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$, $\Gamma = \Lambda \times \Delta$. Положим

$$f_{p,\omega}(\cdot) = f_p(\cdot, \omega), \quad f_{q,\omega}(\cdot) = f_q(\cdot, \omega).$$

Применяя теорему Фубини и формулу (9), получим

$$\begin{aligned} \int_\Gamma f_p \circ g^{-t}(z, \omega) f_q(z, \omega) d\mu(z) d\omega &= \int_\Delta (f_{p,\omega} \circ g_\omega^{-t}, f_{q,\omega}) d\sigma = \\ &= \int_\Delta (f_{p,\omega} \circ g_*^{\alpha(\omega)t}, f_{q,\omega}) d\sigma. \end{aligned}$$

Пусть A_p, A_q – измеримые подмножества Λ , а Δ_p, Δ_q – интервалы в Δ . Пусть $\chi_p, \chi_q: \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристические функции (индикаторы) множеств $A_p \times \Delta_p, A_q \times \Delta_q$, соответственно. Положим

$$J(t) = \int_\Gamma \chi_p \circ g^{-t}(z, \omega) \chi_q(z, \omega) d^n z d\omega.$$

ОСНОВНАЯ ЛЕММА. *Пределы $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} J(t)$ существуют.*

Теорема 1 вытекает из основной леммы. Действительно, так как ν_* абсолютно непрерывна относительно меры, задаваемой на Λ некоторой римановой метрикой, и σ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, то в $L_p(\Gamma, \mu)$ всюду плотно пространство непрерывных на Γ функций с компактным носителем. В свою очередь, в этом пространстве всюду плотно (даже в C^0 -норме) линейное пространство функций, которые являются конечными линейными комбинациями индикаторов μ -измеримых подмножеств из Γ .

Пусть теперь функции $f_p \in L_p(\Gamma, \mu)$ и $f_q \in L_q(\Gamma, \mu)$ произвольны. Для доказательства существования предела

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (f_p \circ g^{-t}, f_q)$$

воспользуемся критерием Коши: надо показать, что разность

$$(f_p \circ g^{-t_1}, f_q) - (f_p \circ g^{-t_2}, f_q) \quad (17)$$

меньше любого заданного $\varepsilon > 0$ для всех $t_1, t_2 > T(\varepsilon)$. Для этого аппроксимируем в соответствующих нормах f_p и f_q функциями φ_p и φ_q , которые являются конечными линейными комбинациями индикаторов: для любого $\varepsilon > 0$ найдутся функции φ_p и φ_q такие, что

$$\|f_p - \varphi_p\|_{L_p} < \varepsilon, \quad \|f_q - \varphi_q\|_{L_q} < \varepsilon. \quad (18)$$

После этого замечания разность (17) следует представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (\varphi_p \circ g^{-t_1}, \varphi_q) - (\varphi_p \circ g^{-t_2}, \varphi_q) + ((f_p - \varphi_p) \circ g^{-t_1}, f_q - \varphi_q) + \\ & + ((f_p - \varphi_p) \circ g^{-t_1}, \varphi_q) + (f_p \circ g^{-t_1}, f_q - \varphi_q) - ((f_p - \varphi_p) \circ g^{-t_2}, f_q - \varphi_q) - \\ & - ((f_p - \varphi_p) \circ g^{-t_2}, \varphi_q) - (f_p \circ g^{-t_2}, f_q - \varphi_q). \end{aligned} \quad (19)$$

Согласно основной лемме разность первых двух членов можно сделать сколь угодно малой при достаточно больших значениях t_1 и t_2 . Ввиду неравенства Коши–Шварца, g^t -инвариантности меры μ и неравенств (18) остальные слагаемые в (19) стремятся к нулю равномерно по t_1 и t_2 , когда $\varepsilon \rightarrow 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ЛЕММЫ. Положим $A_0 = A_p \cap A_q$, $\Delta_0 = \Delta_p \cap \Delta_q$. Пусть $\chi_0: \Lambda \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция (индикатор) измеримого множества $A_0 \times \Delta_0$, а $\tilde{\chi}_0: \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ – характеристическая функция множества A_0 . Ясно, что

$$J(t) = \int_{\Delta_0} (\tilde{\chi}_0 \circ g_*^{\alpha(\omega)t}, \tilde{\chi}_0) d\sigma.$$

Пусть $D_\gamma = \{\omega \in \Delta_0: |\alpha'(\omega)| > \gamma\}$, $\alpha' = d\alpha/d\omega$. Согласно предположению критические точки функции $\omega \mapsto \alpha(\omega)$ изолированы. Следовательно, σ -мера множества $I \setminus D_\gamma$ стремится к нулю при $\gamma \rightarrow 0$. Более того, можно считать, что D_γ – объединение конечного числа интервалов. Пусть (ω_1, ω_2) – один из интервалов, составляющих D_γ . Тогда α можно считать координатой на (ω_1, ω_2) . Действительно, функция $\omega(\alpha)$, обратная к $\alpha: (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \mathbb{R}$, существует и является гладкой. Положим $d\sigma(\omega) = h(\omega) d\omega$. Согласно условиям теоремы 3 функция $\omega \rightarrow h(\omega)$ интегрируема: $h \in L_1(I, d\omega)$. Таким образом,

$$\int_{\omega_1}^{\omega_2} (\tilde{\chi}_0 \circ g_*^{\alpha(\omega)t}, \tilde{\chi}_0) h(\omega) d\omega = \int_{\alpha(\omega_1)}^{\alpha(\omega_2)} (\tilde{\chi}_0 \circ g_*^{\alpha(\omega)t}, \tilde{\chi}_0) h(\omega(\alpha)) \omega'(\alpha) d\alpha. \quad (20)$$

Так как $h(\omega(\alpha))\omega'(\alpha) \in L_1((\alpha(\omega_2), \alpha(\omega_1)), d\alpha)$, то согласно теореме 2 интеграл (20) имеет предел при $t \rightarrow \infty$.

Лемма полностью доказана.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство предложения

Пусть $k(t) \rightarrow k_\infty$ при $t \rightarrow \infty$. Тогда по теореме Коши

$$\frac{1}{T} \int_0^T (\rho_t, \varphi) dt \rightarrow k_\infty$$

при $T \rightarrow \infty$. Согласно теореме Фубини имеем

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f_p \circ g^{-t}, f_q) dt = \int_\Gamma \tilde{f}_p(z, T) f_q(z) d\mu(z),$$

где

$$\tilde{f}_p(z, T) = \frac{1}{T} \int_0^T f \circ g^{-t}(z) dt.$$

Далее, из теоремы 4 следует

$$\int_\Gamma (\tilde{f}_p - \bar{f}_p) d\mu(z) \rightarrow 0$$

при $T \rightarrow \infty$. Отсюда вытекает, что

$$\frac{1}{T} \int_0^T (f_p(\cdot, t), f_q) dt \rightarrow (\bar{f}_p, f_q).$$

Действительно,

$$\int_\Gamma (\tilde{f}_p(z, T) - \bar{f}_p(z)) f_q d\mu(z) \leq \|\tilde{f}_p(\cdot, T) - \bar{f}_p\|_{L_p} \|f_q\|_{L_q} \rightarrow 0$$

при $T \rightarrow \infty$. Что и требовалось доказать.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 02-01-00400, 02-01-01059, 00-15-99269) и INTAS (грант № 00-221).

Список литературы

- [1] *M. A. Ackoglu.* Canad. J. Math. 1975. V. 27. P. 1075.
- [2] *A. Ionescu-Tulcea.* Bull. Amer. Math. Soc. 1964. V. 70. № 3. P. 366.
- [3] *В. В. Козлов.* Докл. РАН. 2002. Т. 382. № 5. С. 602.
- [4] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев.* ТМФ. 2003. Т. 134. № 3. С. 388.
- [5] *А. Пуанкаре.* Замечания о кинетической теории газов. В сб.: А. Пуанкаре. Избранные труды. Т. III. М.: Наука, 1974. С. 385.
- [6] *V. V. Kozlov.* Regul. Chaotic Dyn. 2001. V. 6. № 3. P. 235.
- [7] *В. В. Козлов, Д. В. Трещев.* Биллиарды. Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.
- [8] *Я. Г. Синай.* УМН. 1970. Т. 25. № 2. С. 141.
- [9] *D. Szász.* Sci. Math. Hungarica. 1996. V. 31. № 1-3. P. 299.
- [10] *U. Krengel.* Ergodic Theorems. Berlin: Gruyter, 1985.
- [11] *В. В. Немыцкий, В. В. Степанов.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л.: Гостехиздат, 1949.

Поступила в редакцию 17.XII.2002 г.,
после доработки 21.IV.2003 г.