Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Арсеньев, Математическая модель резонансов и туннелирования в системе со связанным состоянием, *ТМФ*, 2003, том 136, номер 3, 507–516

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1915>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 05:22:12

© 2003 г.

А. А. Арсеньев*

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РЕЗОНАНСОВ И ТУННЕЛИРОВАНИЯ В СИСТЕМЕ СО СВЯЗАННЫМ СОСТОЯНИЕМ

Изучается асимптотика вычета в полюсе аналитического продолжения матрицы рассеяния при стремлении мнимой части полюса к нулю для того случая, когда фазовое пространство квантово-механической системы есть прямая сумма двух пространств, оператор невозмущенной эволюции приводит каждое из этих пространств и в одном из них имеет дискретный спектр, а в другом – непрерывный. Оператор возмущения смешивает подпространства и порождает резонанс. Доказывается, что в такой системе при выполнении определенных условий симметрии амплитуда рассеяния будет резко меняться в окрестности действительной части полюса матрицы рассеяния, и в системе будет наблюдаться туннелирование или резонанс амплитуды рассеяния.

Ключевые слова: рассеяние, резонанс, туннелирование.

1. ВВЕДЕНИЕ

Наша работа посвящена математической теории рассеяния для “систем с невылетанием” (potential scattering with permanently confined channels), см. [1]–[3]. В середине семидесятых годов подобные системы изучались в связи с моделированием невылетания кварков, теперь они используются в квантовой теории твердого тела. “Системы с невылетанием” являются частным случаем моделей Паули–Фирца, и принцип их построения изложен в работе [4]. В последнее время такие модели стали изучать в рамках формализма “систем 2×2 ”. Поясним полученные в настоящей работе результаты на примере. Рассмотрим квантово-механическую систему, фазовое пространство которой есть $\mathbb{C}^1 \oplus L^2(\mathbb{R}^1, dx)$, и гамильтониан невозмущенной эволюции имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} \lambda_\infty & 0 \\ 0 & L_\infty \end{pmatrix},$$

где $L_\infty = -\partial_{xx}^2 + kv(x)$, $v(x) \geq 0$, $v(-x) = v(x)$, $\lambda_\infty > 0$, $\text{supp } v(x) \subset (-R, R)$, $R < \infty$. Пусть оператор возмущения ϵH_{int} смешивает вакуумное $\mathbb{C}^1 \oplus 0$ и одночастичное $0 \oplus L^2(\mathbb{R}^1, dx)$ подпространства (по другой терминологии пространство $\mathbb{C}^1 \oplus 0$ называют связанным каналом (vacuum sector), а пространство $0 \oplus L^2(\mathbb{R}^1, dx)$ – радиационным

*Московский государственный университет, Москва, Россия

каналом (radiation sector)), коммутирует с операцией отражения: $I\psi(x) = \psi(-x)$, и удовлетворяет условию $\text{supp } v(x) \cap \text{supp } H_{\text{int}} = \emptyset$. Из сформулированной в разделе 4 теоремы следует, что в такой системе при $\kappa = 0$, $0 < |\epsilon| \ll 1$ одночастичное возбуждение с энергией $\lambda \neq \lambda_\infty$ будет проходить из $-\infty$ в $+\infty$ почти без отражения, а одночастичное возбуждение с энергией $\lambda \approx \lambda_\infty$ будет почти полностью отражаться. При $\kappa \max_x v(x) \gg \lambda_\infty$, $0 < |\epsilon| \ll 1$ будет наблюдаться туннелирование: одночастичное возбуждение с энергией $\lambda \approx \lambda_\infty$ будет проходить из $-\infty$ в $+\infty$ почти без отражения, а одночастичное возбуждение с энергией $\lambda \neq \lambda_\infty$, $\lambda < \kappa \max_x v(x)$, будет отражаться от потенциального барьера. Ясно, что условие симметрии системы относительно отражения для этого существенно. В работе предложен способ учета влияния подобной симметрии на поведение амплитуды рассеяния вблизи действительной части полюса матрицы рассеяния.

Традиционно задача туннелирования изучается квазиклассическими методами. Наш подход никак с ними не связан.

С математической точки зрения наша модель описывает рассеяние в гильбертовом пространстве

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{H}_1 \perp \mathcal{H}_2. \quad (1)$$

Предполагается, что разбиение (1) приводит оператор эволюции невозмущенной системы H_0 , сужение оператора H_0 на $\mathcal{H}_2$ имеет абсолютно непрерывный спектр, спектр сужения H_0 на $\mathcal{H}_1$ дискретен и лежит в непрерывном спектре сужения H_0 на $\mathcal{H}_2$, а оператор возмущения V смешивает пространства $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ и порождает резонанс.

Изучение подобных моделей было начато Фридрихсом [5] и Лифшицем (современное изложение его результатов есть в [6]). Эти модели интенсивно исследуются сейчас (см. [1]–[4], [7]–[10]). Обычно изучается спектральная функция возмущенного оператора или его функция Грина. Мы считаем эту задачу уже решенной (мы налагаем условия, при которых она тривиальна) и изучаем асимптотику вычета в полюсе матрицы рассеяния при стремлении мнимой части полюса к нулю. Вычет в полюсе матрицы рассеяния рассматривался во многих работах ([6], [7], [11], [12]); мы приводим тот вариант известных формул, из которого удобно извлечь нужную нам информацию. Основной результат нашей работы изложен в теореме (см. раздел 4).

Применяемые обозначения стандартны, поясним лишь некоторые из них. Скалярное произведение в гильбертовом пространстве мы считаем линейным по второму аргументу. Символ $\| \cdot \|_B$ означает норму в банаховом пространстве B , если указание на пространство необходимо. Символ $L(A \rightarrow B)$ означает банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства A в банахово пространство B . Если гильбертово пространство $\mathcal{H}$ представлено как ортогональная сумма (1), то ψ_α – это компонента вектора ψ в пространстве $\mathcal{H}_\alpha$, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ – сужение скалярного произведения на $\mathcal{H}_\alpha$,

$$(A\psi)_\alpha = \sum_\beta A_{\alpha\beta} \psi_\beta, \quad A_{\alpha\beta} \in L(\mathcal{H}_\beta \rightarrow \mathcal{H}_\alpha),$$

α – номер строки, β – номер столбца.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

Мы собираемся изучать матрицу рассеяния для операторов эволюции H_0 , $H_0 + V$. Обычно оператор H_0 не ограничен, а оператор V — не ядерный. Если можно так подобрать удовлетворяющую условиям принципа инвариантности волновых операторов функцию F , что оператор $F(H_0)$ будет ограничен, а оператор $F(H_0 + V) - F(H_0)$ — ядерный, то изучение локального поведения матрицы рассеяния для пары H_0 , $H_0 + V$ можно свести к более простой задаче изучения матрицы рассеяния для пары $F(H_0)$, $F(H_0 + V)$. Мы будем считать, что такое сведение уже сделано.

Пусть L — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}_2$. Мы предположим, что спектр оператора L абсолютно непрерывен. Наши дальнейшие предположения об операторе L описывают известную конструкцию [13] спектрального разложения оператора с абсолютно непрерывным спектром.

Пусть Ω — компактное топологическое пространство, $d\omega$ — неотрицательная борелевская мера на Ω , скалярное произведение в $L^2(\Omega, d\omega)$ мы обозначим символом $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Omega$. Пусть h — гильбертово пространство интегрируемых с квадратом функций на $(a; b)$ со значениями в $L^2(\Omega, d\omega)$:

$$\langle f, g \rangle_h = \int_a^b \langle f(\lambda), g(\lambda) \rangle_\Omega d\lambda.$$

Пусть существует такой унитарный оператор $U \in L(\mathcal{H}_2 \rightarrow h)$, что оператор L унитарно-эквивалентен оператору умножения на λ :

$$\langle f, Lg \rangle_2 = \int_a^b \lambda \langle Uf(\lambda), Ug(\lambda) \rangle_\Omega d\lambda.$$

Мы предположим, что обратный оператор $U^{-1} \in L(h \rightarrow \mathcal{H}_2)$ существует и в пространстве h действует как интегральный оператор с ядром $U^{-1}(\lambda, \omega)$.

Таким образом, Ω — это пространство, которое параметризует собственные функции непрерывного спектра оператора L , $Uf(\lambda, \omega)$ — коэффициент Фурье элемента $f \in \mathcal{H}_2$, $U^{-1}(\lambda, \omega)$ — биортогональная система собственных функций оператора L .

Пусть гильбертовы пространства $\mathcal{H}_2^\pm$ таковы, что

$$\mathcal{H}_2^- \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_2^+ \quad (2)$$

и выполнены следующие условия.

1. Пространство $\mathcal{H}_2^-$ плотно в $\mathcal{H}_2$, пространство $\mathcal{H}_2$ плотно в $\mathcal{H}_2^+$ и форма $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ приводит $\mathcal{H}_2^-$ и $\mathcal{H}_2^+$ в двойственность.

2. Функция

$$(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta) \times \Omega \ni (\lambda \times \omega) \rightarrow U^{-1}(\lambda, \omega) \in \mathcal{H}_2^+$$

аналитична по λ при фиксированном ω в не зависящей от ω комплексной окрестности интервала $(\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta) \subset (a; b)$.

В дальнейшем мы будем считать, что эта окрестность есть круг $B_\delta = \{\lambda: |\lambda_\infty - \lambda| < \delta\}$. Выбор точки λ_∞ пояснен ниже равенством (6).

3. Функция

$$B_\delta \ni \lambda \rightarrow R(\lambda, L) = (\lambda - L)^{-1} \in L(\mathcal{H}_2^- \rightarrow \mathcal{H}_2^+)$$

имеет аналитическое продолжение из верхней полуплоскости в нижнюю (мы обозначим его $R^+(\lambda, L)$) и из нижней полуплоскости в верхнюю (это продолжение мы обозначим $R^-(\lambda, L)$).

Заметим, что тройка (2) может отличаться от стандартного оснащения: мы не требуем ядерности вложения $\mathcal{H}_2^- \rightarrow \mathcal{H}_2^+$.

Положим

$$\mathcal{H}^\pm = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2^\pm.$$

Мы называем самосопряженный ядерный оператор $V \in L(\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H})$ *допустимым*, если он продолжается по непрерывности на $\mathcal{H}^+$, $V\mathcal{H}^+ \subset \mathcal{H}^-$, и оператор V вполне непрерывен как оператор из $L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-)$.

В дальнейшем мы предположим, что

$$\dim \mathcal{H}_1 = m < \infty.$$

В этом случае матричные элементы оператора V имеют вид

$$V_{21}f = \sum_{1 \leq j \leq m} \langle e_j, f \rangle_1 \eta_j, \quad \eta_j \in \mathcal{H}_2^-, \quad (3a)$$

$$V_{12}f = \sum_{1 \leq j \leq m} \langle \eta_j, f \rangle_2 e_j, \quad \langle e_i, e_j \rangle_1 = \delta_{ij}. \quad (3b)$$

4. Пусть V_∞ — допустимый оператор и V_n — последовательность допустимых операторов, которая удовлетворяет следующим условиям:

- а) $V_{n,11} \rightarrow V_{\infty,11}$, $n \rightarrow \infty$;
- б) $\|(V_{n,22} - V_{\infty,22}) | L(\mathcal{H}_2^+ \rightarrow \mathcal{H}_2^-)\| \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$;
- в) если $\eta_{n,j}$ — функции, которые задают операторы $V_{n,21}$, $V_{n,12}$ по формулам (3), то

$$\|\eta_{n,j} | \mathcal{H}_2^-\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

5. При $n < \infty$ выполнено неравенство

$$\left\| \sum_{1 \leq j \leq m} \langle e_j, \psi_\infty \rangle U \eta_{n,j}(\lambda_\infty, \omega) | L^2(\Omega, d\omega) \right\| > 0. \quad (5)$$

6. Оператор $V_{\infty,11}$ имеет простое собственное значение

$$V_{\infty,11}(\psi_\infty)_1 = \lambda_\infty(\psi_\infty)_1, \quad \lambda_\infty \neq 0, \quad \lambda_\infty \in (a; b). \quad (6)$$

В дальнейшем мы будем отмечать индексом n величины, которые соответствуют оператору V_n .

Пусть

$$\begin{aligned} H_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \quad R^\pm(\lambda, H_0) = \begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & R^\pm(\lambda, L) \end{pmatrix}, \\ H_n &= H_0 + V_n, \quad \Gamma_n^\pm(\lambda) = R^\pm(\lambda, H_0)V_n. \end{aligned}$$

Если $(\psi_\infty)_1$ есть решение уравнения (6), то вектор

$$\psi_\infty = (\psi_\infty)_1 \oplus 0 \quad (7)$$

удовлетворяет уравнениям

$$\psi_\infty = \Gamma_\infty^\pm(\lambda_\infty)\psi_\infty, \quad \psi_\infty \in \mathcal{H}^+, \quad (8)$$

$$H_\infty\psi_\infty = \lambda_\infty\psi_\infty, \quad \psi_\infty \in \mathcal{H}^+. \quad (9)$$

Далее мы сделаем следующие предположения.

7. Уравнение (8) имеет единственное линейно независимое нетривиальное решение.

Если оператор L может быть продолжен по замыканию на $\mathcal{H}_2^+$ (см. [11]), то это эквивалентно предположению о том, что уравнение

$$(L + V_\infty)(\psi_\infty)_2 = \lambda_\infty(\psi_\infty)_2, \quad (\psi_\infty)_2 \in \mathcal{H}_2^+, \quad (10)$$

не имеет нетривиальных решений, представимых в виде

$$(\psi_\infty)_2 = R^\pm(\lambda_\infty, L)f, \quad f \in \mathcal{H}_2^-. \quad (11)$$

8. Существует гомоморфизм $l: \mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+$, удовлетворяющий следующему условию: в некоторой комплексной окрестности точки $\mu = 1$ при $\lambda \in B_\delta$, $n \geq n_0$ в пространстве $\mathcal{H}^+$ выполнены равенства

$$\begin{aligned} l(\mu\psi) &= \bar{\mu}l(\psi), \quad l(\text{Ker}(\bar{\mu} - \Gamma_n^-(\bar{\lambda}))) = \text{Ker}(\mu - \Gamma_n^+(\lambda)), \\ l(\text{Ker}(\mu - \Gamma_n^+(\lambda))) &= \text{Ker}(\bar{\mu} - \Gamma_n^-(\bar{\lambda})). \end{aligned} \quad (12)$$

9. Существует такое непрерывное отображение $p: \Omega \rightarrow \Omega$, что для всех $\omega \in \Omega$, $\lambda \in B_\delta$, $n \geq n_0$, $\psi \in \text{Ker}(\mu - \Gamma_n^\pm(\lambda))$

$$|\langle V_n l^{-1}(\psi), U^{-1}(\lambda, p(\omega)) \rangle_2| = |U(V_n \psi)_2(\lambda, \omega)|. \quad (13)$$

3. СВОЙСТВА МОДЕЛИ

Анализ описанной выше модели мы проведем по предложенной в работе [14] схеме. В отличие от рассмотренного в ней случая, в нашей задаче абсолютно непрерывная часть оператора H_0 есть не все пространство $\mathcal{H}$, а подпространство $\mathcal{H}_2$, что приводит к изменению некоторых формул. Там, где изменения несущественны, мы приведем только формулировки нужных нам результатов, а их подробные доказательства опустим.

ЛЕММА 1. Операторная функция

$$B_\delta \ni \lambda \rightarrow \Gamma_n^\pm(\lambda) \in L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+)$$

аналитична по λ , ее значения есть вполне непрерывные операторы, и

$$\Gamma_n^\pm(\lambda) \rightarrow \Gamma_\infty^\pm(\lambda), \quad n \rightarrow \infty,$$

равномерно по λ в метрике $L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+)$.

ЛЕММА 2. Точка $\mu = 1$ есть полюс первого порядка для функции

$$\mu \rightarrow (\mu - \Gamma_{\infty}^{\pm}(\lambda_{\infty}))^{-1} \in L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^+).$$

Это утверждение следует из леммы 1 работы [14], так как в нашем случае

$$\langle \psi_{\infty}, V_{\infty} \psi_{\infty} \rangle = \lambda_{\infty} \neq 0.$$

Как и в [14], из лемм 1 и 2 следует

ЛЕММА 3. Существуют такие числа $\epsilon > 0$, $\delta > 0$, $n_0 < \infty$, что при $n \geq n_0$, $|\lambda - \lambda_{\infty}| < \delta$ проектор

$$P_n^+(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|1-\mu|=\epsilon} R(\mu, \Gamma_n^+(\lambda)) d\mu \quad (14)$$

одномерен, аналитически зависит от λ и удовлетворяет уравнению

$$\Gamma_n^+(\lambda) P_n^+(\lambda) = P_n^+(\lambda) \Gamma_n^+(\lambda) = \mu_n^+(\lambda) P_n^+(\lambda), \quad (15)$$

причем

$$P_n^+(\lambda) \rightarrow P_{\infty}^+(\lambda), \quad n \rightarrow \infty.$$

Равенство (15) есть определение числа $\mu_n^+(\lambda)$.

ЛЕММА 4. Проектор (14) может быть вычислен по формуле

$$P_n^+(\lambda) f = c_n(\lambda) \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), f \rangle \psi_n(\lambda),$$

где

$$\begin{aligned} \mu_n^+(\lambda) \psi_n(\lambda) &= \Gamma_n^+(\lambda) \psi_n(\lambda), \quad \psi_n(\lambda) \in \mathcal{H}^+, \\ c_n(\lambda) &= \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), \psi_n(\lambda) \rangle^{-1} \end{aligned} \quad (16)$$

и равномерно по λ существуют пределы $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^+(\lambda) = \mu_{\infty}^+$, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\lambda) = c_{\infty}(\lambda)$ и в метрике $\mathcal{H}^+$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\lambda) = \psi_{\infty}(\lambda)$.

ЛЕММА 5. Справедлива формула

$$\partial_{\lambda} \mu_{\infty}^+(\lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_{\infty}} = -\frac{1}{\lambda_{\infty}}.$$

ЛЕММА 6. При достаточно большом n функция $B_{\delta} \ni \lambda \rightarrow 1 - \mu_n^+(\lambda)$ имеет единственный нуль, и это есть нуль первого порядка:

$$\mu_n^+(\lambda_n) = 1. \quad (17)$$

Равенство (17) есть определение числа λ_n . Положим

$$T_n^+(\lambda) = V_n + V_n R^+(\lambda, H_n) V_n, \quad |\lambda - \lambda_{\infty}| < \delta, \quad \lambda \neq \lambda_n. \quad (18)$$

ЛЕММА 7. При достаточно больших n оператор (18) может быть записан в виде

$$T_n^+(\lambda) = r_n(\lambda) + T_n^+(\lambda)_{\text{reg}},$$

где оператор $T_n^+(\lambda)_{\text{reg}}$ аналитичен по λ в круге B_δ как функция со значениями в $L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-)$ и равномерно по λ имеет предел

$$\|(T_n^+(\lambda)_{\text{reg}} - T_\infty^+(\lambda)_{\text{reg}}) | L(\mathcal{H}^+ \rightarrow \mathcal{H}^-)\| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

а оператор $r_n(\lambda)$ дается формулой

$$r_n(\lambda)f = \frac{c_n(\lambda)\mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda)), f \rangle V_n \psi_n(\lambda). \quad (19)$$

При $\text{Im } \lambda > 0$ справедлива формула

$$R(\lambda, H_n) = R(\lambda, H_0) + R(\lambda, H_0)T_n^+(\lambda)R(\lambda, H_0). \quad (20)$$

Из (19) и (20) следует, что точка λ_n есть полюс аналитического продолжения резольвенты $R(\lambda, H_n)$, и поэтому $\text{Im } \lambda_n$ можно оценить на основе “золотого правила Ферми”. В нашем случае удобно воспользоваться либо формулой (9.35) из работы [11], либо формулой (28) из работы [9]. Используя эти формулы и условие (5), мы получаем следующее утверждение.

ЛЕММА 8. При $n_0 < n < \infty$ справедливо неравенство

$$\text{Im } \lambda_n < 0.$$

ЛЕММА 9. Если функция $\psi_n(\lambda)$ удовлетворяет уравнению (16), то при

$$\lambda \in (\lambda_\infty - \delta, \lambda_\infty + \delta)$$

справедливо равенство

$$\text{Im } \mu_n^+(\lambda) \langle \psi_n(\lambda), V_n \psi_n(\lambda) \rangle = -\pi \|U(P_2 V_n(\psi_n(\lambda))) | L^2(\Omega, d\omega)\|^2. \quad (21)$$

Из равенства (21) следует

ЛЕММА 10. Справедливо равенство

$$U(V_\infty \psi_\infty)(\lambda_\infty, \omega) \equiv 0.$$

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Определим волновые операторы и оператор рассеяния равенствами

$$W_{\pm}(H_n, H_0) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH_n} e^{-itH_0} P_2,$$

$$S(H_n, H_0) = W_+^*(H_n, H_0) W_-(H_n, H_0),$$

где P_2 – проектор на абсолютно непрерывное подпространство оператора H_0 , т.е. пространство $\mathcal{H}_2$. Существование и полнота волновых операторов следуют из предположения о ядерности оператора V_n . При меньших предположениях существование и полнота волновых операторов доказаны в работе [2]. Оператор рассеяния коммутирует с H_0 и в пространстве h задается операторной функцией [15]

$$\lambda \rightarrow S_n(\lambda) \in L(L^2(\Omega, d\omega) \rightarrow L^2(\Omega, d\omega)),$$

которая в окрестности λ_{∞} имеет вид

$$S_n(\lambda) = 1 - 2\pi i t_n^+(\lambda), \quad \lambda \in B_{\delta},$$

где $t_n^+(\lambda)$ – интегральный оператор в $L^2(\Omega, d\omega)$:

$$t_n^+(\lambda) f(\lambda, \omega_1) = \int t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) f(\lambda, \omega_2) d\omega_2,$$

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) = U(T_n^+(U^{-1}(\lambda, \omega_2)))(\lambda, \omega_1).$$

Из лемм 7 и 10 следует

ЛЕММА 11. *Справедлива формула*

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) = \frac{c_n(\lambda) \mu_n^+(\lambda)}{1 - \mu_n^+(\lambda)} \langle V_n l^{-1}(\psi_n(\lambda), U^{-1}(\lambda, \omega_2))_2 \times$$

$$\times U(P_2 V_n \psi_n(\lambda))(\lambda, \omega_1) + t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}}, \quad (22)$$

где

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}} = U(P_2 T_n^+(\lambda)_{\text{reg}} U^{-1}(\lambda, \omega_2))(\lambda, \omega_1).$$

ЛЕММА 12. 1. *Равномерно по $\lambda \in B_{\delta}$, $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$*

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}} \rightarrow t_{\infty}^+(\lambda, \omega_1, \omega_2)_{\text{reg}}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. *При фиксированном λ , $0 < |\lambda - \lambda_{\infty}| < \delta$, равномерно по $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$*

$$t_n^+(\lambda, \omega_1, \omega_2) \rightarrow t_{\infty}^+(\lambda, \omega_1, \omega_2), \quad n \rightarrow \infty.$$

ЛЕММА 13. *Если отображение p удовлетворяет условию 9, то*

$$\lim_{|\lambda - \lambda_{\infty}| \rightarrow +0} \sup_{\omega \in \Omega} |t_{\infty}^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_{\infty}^+(\lambda_{\infty}, \omega, p(\omega))| = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$W(\lambda, \omega) = U(P_2 V_\infty \psi_\infty(\lambda))(\lambda, \omega).$$

Из леммы 7, уравнений (13) и (19) следует равенство

$$|t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| = |c_\infty(\lambda) \mu_\infty^+(\lambda) (1 - \mu_\infty^+(\lambda))^{-1}| |W(\lambda, \omega)|^2.$$

Функция $\lambda \rightarrow W(\lambda, \omega)$ аналитична по λ в B_δ как функция со значениями в $C(\Omega)$, и в силу леммы 8 в точке λ_∞ имеет нуль. Функция $\lambda \rightarrow 1 - \mu_\infty^+(\lambda)$ в точке λ_∞ имеет нуль первого порядка, что и доказывает лемму.

Из леммы 13 следует

ЛЕММА 14. *Справедливо равенство*

$$\lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} \int |t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega))_{\text{reg}} - t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| d\omega = 0. \quad (23)$$

Положим

$$\text{v. p. } t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega)) = \lim_{|\lambda - \lambda_\infty| \rightarrow +0} t_\infty^+(\lambda, \omega, p(\omega)). \quad (24)$$

Основным результатом нашей работы является

ТЕОРЕМА. *Если последовательность действительных чисел ν_n удовлетворяет условию*

$$|\nu_n - \text{Re } \lambda_n| = O(|\text{Im } \lambda_n|^{1+\epsilon}), \quad \epsilon > 0,$$

то справедливы равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - \text{v. p. } t_\infty^+(\lambda_\infty, \omega, p(\omega))| d\omega = \frac{|\beta|}{\pi}, \quad (25)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |t_n^+(\nu_n, \omega, p(\omega)) - t_\infty^+(\nu_n, \omega, p(\omega))| d\omega = \frac{|\beta|}{\pi}. \quad (26)$$

Доказательство этой теоремы основано на леммах 1–14 и повторяет доказательство теоремы 2 из работы [14], поэтому мы не будем его здесь приводить.

Чтобы в рамках предложенной модели математически корректно рассмотреть упомянутый во введении пример, нужно в качестве исходных операторов взять экспоненты от гамильтонианов H и H_0 . Соответствующие рассуждения очень громоздки и лишь в несущественных деталях будут отличаться от приведенных в работе [16], поэтому мы ограничимся формальной схемой.

Положим $\mathcal{H}_1 = \mathbb{C}^1$, $\mathcal{H}_2 = L^2(\mathbb{R}^1, dx)$, $\mathcal{H}_2^\pm = L^2(\mathbb{R}^1, \exp(\mp|x|) dx)$. Пусть $v_{n,11}$ – оператор умножения на действительное число $\lambda_\infty > 0$, $v_{n,22}$ – оператор умножения на функцию $\kappa v_0(x)$,

$$v_{n,12}: \psi_2(x) \rightarrow \epsilon_n \int \eta(x) \psi_2(x) dx,$$

$$v_{n,21}: \psi_1 \rightarrow \epsilon_n \psi_1 \eta(x),$$

$$v_0(x) = v_0(-x) \geq 0, \quad \eta(x) = \eta(-x), \quad v_0, \eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^1),$$

$$\text{supp } v_0 \cap \text{supp } \eta = \emptyset, \quad \epsilon_n \rightarrow 0.$$

Положим $\Omega = \{-1, 1\}$ и припишем каждой точке ± 1 меру 1. Пусть

$$\hat{f}(k) = \int e^{-ikx} f(x) dx, \quad h = L^2(\Omega \times [0, \infty), d\omega d\lambda),$$

$$Uf(\lambda, \omega) = (4\pi\sqrt{\lambda})^{-1/2} \hat{f}(\omega\sqrt{\lambda}), \quad U^{-1}(x | \lambda, \omega) = (4\pi\sqrt{\lambda})^{-1/2} e^{ix\omega\sqrt{\lambda}}.$$

Отображения l и p можно определить двумя способами: можно положить $l\psi(x) = \bar{\psi}(x)$, $p(\omega) = -\omega$ или $l\psi(x) = \bar{\psi}(-x)$, $p(\omega) = \omega$.

Выполнение всех условий (конечно, за исключением ядерности и вполне непрерывности) проверяется тривиально, и $|\beta| = 1$. Величина $1 - 2\pi it_n^+(\lambda, \omega, \omega)$ — коэффициент прохождения плоской волны, идущей из $-\infty$ в $+\infty$ (из $+\infty$ в $-\infty$), а $-2\pi it_n^+(\lambda, -\omega, \omega)$ — коэффициент отражения. Отсюда следуют сделанные во введении утверждения.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 02-01-00271.

Список литературы

- [1] Б. О. Кербилов. ТМФ. 1985. Т. 65. № 3. С. 379–390.
- [2] R. F. Dashen, J. B. Healy, I. J. Muzinich. Ann. Phys. 1976. V. 102. P. 1–70.
- [3] R. F. Dashen, J. B. Healy, I. J. Muzinich. Phys. Rev. D. 1976. V. 14. P. 2773–2789.
- [4] J. Dereziński, V. Jukšić. J. Funct. Anal. 2001. V. 180. P. 243–327.
- [5] К. Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве. М.: Мир, 1969.
- [6] J. S. Howland. J. Math. Anal. Appl. 1975. V. 50. P. 415–437.
- [7] G. Parravicini, V. Gorini. J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 2208–2226.
- [8] Ж. И. Абдулаев, И. А. Икромов, С. Н. Лакаев. ТМФ. 1995. Т. 103. С. 54–62; А. К. Мотовилов. ТМФ. 1996. Т. 107. С. 450–477; С. 478–500; Р. Менникен, А. К. Мотовилов. ТМФ. 1998. Т. 116. С. 163–181; В. Б. Беляев, А. К. Мотовилов. ТМФ. 1997. Т. 111. С. 77–93; Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов, Б. С. Павлов. ТМФ. 1988. Т. 75. С. 431–444; Т. 76. С. 242–260.
- [9] Ю. А. Куперин, К. А. Макаров, С. П. Меркурьев, А. К. Мотовилов. ЯФ. 1988. Т. 48. С. 358–370.
- [10] R. Mennicken, A. K. Motovilov. Math. Nachr. 1999. B. 20. S. 117–181; A. K. Motovilov. J. Math. Phys. 1991. V. 32. P. 3509–3518; A. K. Motovilov, W. Sandhas, V. B. Belyaev. J. Math. Phys. 2001. V. 42. P. 2490–2506.
- [11] S. Agmon. Commun. Pure Appl. Math. 1998. V. 51. P. 1255–1309.
- [12] S. Albeverio, R. Hoegh-Krohn. J. Math. Anal. Appl. 1984. V. 101. P. 491–513.
- [13] К. Морен. Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965.
- [14] А. А. Арсеньев. ТМФ. 2003. Т. 134. С. 341–352.
- [15] Д. Р. Яфаев. Математическая теория рассеяния. Санкт-Петербург: Изд-во Санкт-Петербургского университета, 1994.
- [16] А. А. Арсеньев. Матем. сб. 1996. Т. 187. С. 3–20.

Поступила в редакцию 21.I.2003 г.