Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Цыганов, Разделение переменных в гиростате Ковалевской–Горячева–Чаплыгина, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 2, 240–247

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf192>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 13:24:50

© 2003 г.

А. В. Цыганов*

РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В ГИРОСТАТЕ КОВАЛЕВСКОЙ–ГОРЯЧЕВА–ЧАПЛЫГИНА

Построены переменные разделения для гириостата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина при произвольном значении параметров. Показано, что, выбирая различные интегралы движения, можно построить различные переменные разделения для одной и той же интегрируемой системы.

Ключевые слова: интегрируемые системы, уравнение Гамильтона–Якоби, разделение переменных.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе изучается вопрос о разделении переменных в уравнении Гамильтона–Якоби для функции Гамильтона вида [1]

$$H = J_1^2 + J_2^2 + 2J_3^2 + 2pJ_3 + c_1x_1 + c_2x_2 + c_3(x_1^2 - x_2^2) + c_4x_1x_2 + \frac{\delta}{x_3^2}, \quad (1)$$

$$p, c_1, c_2, c_3, c_4, \delta \in \mathbb{R}.$$

Здесь два трехмерных вектора $J \in so(3) \simeq \mathbb{R}^3$ и $x \in \mathbb{R}^3$ являются координатами фазового пространства $\mathcal{M} = e^*(3)$, снабженного естественной скобкой Ли–Пуассона

$$\{J_i, J_j\} = \varepsilon_{ijk}J_k, \quad \{J_i, x_j\} = \varepsilon_{ijk}x_k, \quad \{x_i, x_j\} = 0, \quad (2)$$

где ε_{ijk} — стандартный полностью кососимметричный тензор. Эта скобка обладает двумя функциями Казимира

$$\mathbf{C}_1 = \sum_{i=1}^3 x_i^2, \quad \mathbf{C}_2 = \sum_{i=1}^3 x_i J_i. \quad (3)$$

Так как орбиты

$$\mathcal{O}_{ab}: \{(x, J): \mathbf{C}_1 = a, \mathbf{C}_2 = b\}$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: tsiganov@mph.phys.spbu.ru

коприсоединенного представления группы движений трехмерного евклидова пространства $E(3)$ в $e^*(3)$ являются четырехмерными симплектическими многообразиями, то нам достаточно одного дополнительного интеграла для интегрируемости по Лиувиллю соответствующих уравнений движения.

Гамильтонова система (1) является интегрируемой только на однопараметрическом множестве орбит $\mathcal{O}_a$ при

$$\mathbf{C}_2 = (J, x) = 0, \quad (4)$$

и соответствующий дополнительный интеграл имеет вид

$$\begin{aligned} K = & \left(J_1^2 + J_2^2 - 2pJ_3 - p^2 + c_1x_1 + c_2x_2 + \frac{\delta}{x_3^2} \right)^2 + \\ & + 2c_3((x_1 - x_2)p + x_3(J_1 - J_2))((x_1 + x_2)p + x_3(J_1 + J_2)) + \\ & + 2c_4(px_2 + J_2x_3)(px_1 + x_3J_1) + \\ & + 4(J_3 + p)((px_1 + x_3J_1)c_1 + c_2(px_2 + x_3J_2)) - \\ & - 2c_1c_2x_1x_2 - \frac{c_1^2 - c_2^2}{2}(x_1^2 - x_2^2) - \frac{c_1^2 + c_2^2}{2}x_3^2 + \\ & + (2(c_2x_2 - c_1x_1)c_3 - c_4(c_1x_2 + c_2x_1))x_3^2 + \left(c_3^2 + \frac{c_4^2}{4} \right) x_3^4. \end{aligned} \quad (5)$$

С помощью поворота вокруг третьей оси можно исключить один из параметров c_1, c_2, c_3 или c_4 .

Напомним, что разделение переменных в соответствующем уравнении Гамильтона–Якоби было выполнено Чаплыгиным [1] при $p = c_1 = c_2 = c_4 = \delta = 0$. В этом частном случае лагранжево многообразие $\mathcal{C}^{(2)}$, определяемое функциями $I_{1,2}$ исходных интегралов:

$$\mathcal{C}^{(2)} : \{ (x, J) \in \mathcal{O}_a : I_{1,2} = H \pm \sqrt{K} = \alpha_{1,2} \},$$

представимо в виде произведения двух гиперэллиптических кривых $\mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2$, которые задаются уравнениями

$$\Phi(\mu, \lambda) = \mu^2 - \frac{c_3a\lambda + \alpha_{1,2}}{2(\lambda^2 - 1)} = 0. \quad (6)$$

Удовлетворяющие уравнениям кривых при $\lambda = q_{1,2}$ и $\mu = p_{1,2}$ переменные разделения $q_{1,2}$ определяются как корни уравнения

$$\lambda^2 - 2\lambda \left(\frac{J_1^2 + J_2^2}{c_3x_3^2} \right) + \frac{(J_1^2 + J_2^2)^2 - K}{c_3^2x_3^4} = 0, \quad (7)$$

а соответствующие импульсы имеют вид $p_i = (\dot{q}_i/2)/(1 - q_i^2)$.

Используя представление Лакса для гиростата Ковалевской, построенное в работе [2], и метод Склянина [3], в работе [4] было предложено иное разделение переменных при $c_2 = c_3 = c_4 = \delta = 0$. В этом частном случае лагранжево многообразие

$$\tilde{\mathcal{C}}^{(2)} : \{ (x, J) \in \mathcal{O}_a : H = \alpha_1, K = \alpha_2 \} \quad (8)$$

представимо в виде симметризованного произведения $\tilde{\mathcal{C}}^{(2)} = \tilde{\mathcal{C}} \times \tilde{\mathcal{C}}$ двух копий единственной гиперэллиптической кривой $\tilde{\mathcal{C}}$, задаваемой характеристическим уравнением (4×4) -матрицы Лакса

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \lambda) = & \mu^4 - \mu^2(2c_1^2\lambda^2 + 4(\alpha_1 + p^2)\lambda - 4) + \\ & + (c_1^4\lambda^4 - 4c_1^2(\alpha_1 + p^2)\lambda^3 - (4\alpha_2 - 2c_1^2)\lambda^2 - 8p^2\lambda) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Переменные разделения $q_{1,2}$, которые определяются как полюсы функции Бейкера–Ахиезера на кривой $\tilde{\mathcal{C}}$, являются корнями уравнения [4]

$$(\lambda^2 - q_1^2)(\lambda^2 - q_2^2) = \lambda^4 + B_1\lambda^2 + B_0, \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} B_1 = & \frac{c_1^2 x_-^2 J_-^2 - c_1(2J_-(J_3 + p) - c_1 x_3)(2x_3 J_-^2 - x_-(2J_- J_3 + c_1 x_3))}{4(J_-^2 - c_1 x_-)J_-^2}, \\ B_0 = & \frac{c_1^2(2J_-(J_3 + p) - c_1 x_3)^2}{16(J_-^2 - c_1 x_-)J_-^2}, \quad x_{\pm} = x_1 \pm ix_2, \quad J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2. \end{aligned}$$

Проблема выбора двух переменных $q_{1,2}$ из четырех полюсов функции Бейкера–Ахиезера (10) и соответствующие выражения для сопряженных импульсов обсуждаются в работе [4].

Переменные разделения $q_{1,2}$ (10) являются комплексными рациональными функциями исходных переменных x и J . Заметим, что и для волчка Лагранжа мы имеем аналогичную ситуацию. Для известных вещественных переменных разделения [5] лагранжево многообразие представляется в виде произведения двух различных алгебраических кривых. В то же время, используя матрицу Лакса, можно построить иное лагранжево многообразие в виде произведения двух копий одной единственной спектральной кривой. Однако соответствующие переменные разделения, построенные по методу Склианина [3] или с использованием бигамильтоновой структуры [6], являются комплексными функциями исходных переменных x и J .

Целью данной работы является построение переменных разделения для интегрируемой системы с гамильтонианом H (1) при произвольном значении всех параметров. Мы будем использовать (2×2) -матрицы Лакса, построенные в работе [7] при $p = 0$ и в общем случае в работе [8]. Полученные переменные разделения при произвольных значениях параметров также являются комплексными функциями физических переменных x и J .

2. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ В ФОРМЕ ЛАКСА

В соответствии с работами [7], [8] рассмотрим (2×2) -матрицу Лакса для частного случая системы Неймана

$$T(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 2J_3\lambda - J_1^2 - J_2^2 - \frac{\delta}{x_3^2} & \lambda(ix_1 + x_2) - x_3(iJ_1 + J_2) \\ \lambda(ix_1 - x_2) - x_3(iJ_1 - J_2) & x_3^2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

которая полиномиально зависит от спектрального параметра λ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [7], [8]. На симплектических листах $\mathcal{O}_a$ при условии $b = 0$ (4) скобки Пуассона (2) между элементами данной матрицы могут быть записаны в форме скобок Склянина

$$\{\overset{1}{T}(\lambda), \overset{2}{T}(\nu)\} = [r(\lambda - \nu), \overset{1}{T}(\lambda)\overset{2}{T}(\nu)], \quad (12)$$

где использованы стандартные обозначения $\overset{1}{T}(\lambda) = T(\lambda) \otimes \text{Id}$, $\overset{2}{T}(\nu) = \text{Id} \otimes T(\nu)$ и

$$r(\lambda - \nu) = \frac{i}{\lambda - \nu} \Pi, \quad \Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Это свойство матрицы $T(\lambda)$ (11) позволяет нам построить матрицы Лакса для волчка Горячева–Чаплыгина [8] и его обобщений [9], а также матрицы Лакса для волчка [7] и гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина [8].

Основным свойством скобок Склянина (12) является то, что для любых числовых матриц $\mathcal{K}$ коэффициенты следа матрицы $\mathcal{K}T(\lambda)$ образуют коммутативную подалгебру, порожденную линейными многочленами от коэффициентов матричных элементов матрицы $T(\lambda)$.

Согласно работе [10] для построения коммутативной подалгебры, порожденной квадратичными многочленами от коэффициентов $T(\lambda)$, достаточно рассмотреть постоянные решения $\mathcal{K}_{\pm}(\lambda)$ уравнения отражения

$$\{\overset{1}{\mathcal{K}}(\lambda), \overset{1}{\mathcal{K}}(\nu)\} = [r(\lambda - \nu), \overset{1}{\mathcal{K}}(\lambda)\overset{2}{\mathcal{K}}(\nu)] + \overset{1}{\mathcal{K}}(\lambda)r(\lambda + \nu)\overset{2}{\mathcal{K}}(\nu) - \overset{2}{\mathcal{K}}(\nu)r(\lambda + \nu)\overset{1}{\mathcal{K}}(\lambda). \quad (14)$$

При этом коэффициенты следа матрицы Лакса

$$\mathcal{T}(\lambda) = \mathcal{K}_-(\lambda)T(\lambda - p)\mathcal{K}_+(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda - p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

порождают коммутативную подалгебру [10], так как

$$\{\text{tr } \mathcal{T}(\lambda), \text{tr } \mathcal{T}(\nu)\} = 0.$$

Здесь индекс t означает матричное сопряжение и $T(\lambda)$ удовлетворяет скобкам (12). Напомним, что элементы данной подалгебры являются интегралами движения интегрируемых систем.

Так, для построения матрицы Лакса (15), описывающей гиростат Ковалевской–Горячева–Чаплыгина (1), достаточно использовать матрицу $T(\lambda)$ (11) и частные постоянные решения уравнения отражения $\mathcal{K}_{\pm}$ вида

$$\mathcal{K}_+ = \begin{pmatrix} a_1\lambda + d_1 & \lambda \\ 0 & -a_1\lambda + d_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_- = \begin{pmatrix} a_2\lambda + d_2 & 0 \\ \lambda & -a_2\lambda + d_2 \end{pmatrix}, \quad (16)$$

где $a_{1,2}, d_{1,2}$ – произвольные параметры. Заметим, что данные матрицы отличаются от матриц $\mathcal{K}_{\pm}$, используемых в работах [7] и [8], что и позволило нам построить переменные разделения.

Спектральная кривая $\mathcal{C}$ матрицы Лакса $\mathcal{T}(\lambda)$ задается уравнением

$$\begin{aligned} \Phi(\mu, \lambda) = & \mu^2 + \mu(\lambda^6 - 2H\lambda^4 + K\lambda^2 + 2d_1d_2(ap^2 - \delta)) + \\ & + (a_1^2\lambda^2 - d_1^2)(a_2^2\lambda^2 - d_2^2)(a(p - \lambda)^2 - \delta)(a(p + \lambda)^2 - \delta), \end{aligned} \quad (17)$$

где $a = \mathcal{C}_1(3)$. Входящие в уравнение интегралы движения H и K совпадают с введенными ранее интегралами (1) и (5) после канонического преобразования переменных

$$J \rightarrow J + Ux, \quad U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i\beta_+ \\ 0 & 0 & \beta_- \\ -i\beta_+ & -\beta_- & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{\pm} = \frac{a_1 \pm a_2}{2},$$

и замены параметров

$$a_1^2 = c_3 + \frac{ic_4}{2}, \quad a_2^2 = c_3 - \frac{ic_4}{2}, \quad d_1 = \frac{ic_1 - c_2}{2}, \quad d_2 = \frac{ic_1 + c_2}{2}.$$

Итак, мы построили представление Лакса для гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина и тем самым представили лагранжево многообразие $H = \alpha_1, K = \alpha_2$ в виде симметризованного произведения двух копий алгебраической кривой $\mathcal{C}$ (17).

3. ПЕРЕМЕННЫЕ РАЗДЕЛЕНИЯ

Пуассоново многообразие $\mathcal{M} = e^*(3)$ трансверсально постоянно, т.е. существуют два векторных поля Z_a и Z_b , которые трансверсальны симплектическим листам $\mathcal{O}_{ab}$ и являются симметриями тензора Пуассона. Таким образом, фазовое пространство локально представимо в виде произведения симплектических листов и абелевой группы G , порождаемой векторными полями $Z_{a,b}$.

Для данной интегрируемой системы на каждом симплектическом листе задано лагранжево расслоение (распределение). В нашем случае слои расслоения являются лагранжевыми многообразиями

$$\mathcal{C}^{(2)} : \{ (x, J) \in \mathcal{O}_a : H = \alpha_1, K = \alpha_2 \},$$

которые представимы в виде $\mathcal{C}^{(2)} = \mathcal{C} \times \mathcal{C}$, где $\mathcal{C}$ определяется уравнением (17). Векторные поля $Z_{a,b}$ трансверсальны к слоям лагранжева расслоения, так же как и векторные поля, отвечающие переменным действия.

Интегрируемая система (лагранжево расслоение) инвариантна относительно действия абелевой группы G . В силу этого естественно предположить, что искомые переменные разделения также инвариантны относительно действия группы G и не зависят от “номера” симплектического листа $\mathcal{O}_{ab}$. В этом случае переменные разделения являются решениями системы уравнений [11]

$$\Phi(\mu, \lambda)|_{\mathcal{O}_{ab}} = 0, \quad Z_{a,b}\Phi(\mu, \lambda)|_{\mathcal{O}_{ab}} = 0. \quad (18)$$

Здесь $\Phi(\mu, \lambda)$ – уравнение алгебраической кривой (17) и векторные поля $Z_{a,b}$ локально имеют вид $Z_a = \partial/\partial a$.

В нашем случае $b = 0$ (см. (4)) и существует единственное векторное поле Z_a , определяющее каноническое преобразование $x \rightarrow ax$ или симметрию тензора Пуассона. Данное преобразование приводит к изменению параметров гамильтониана H (1)

$$c_{1,2} \rightarrow ac_{1,2}, \quad c_{3,4} \rightarrow a^2 c_{3,4}.$$

Поэтому, так же как для системы Неймана и волчка Горячева–Чаплыгина, для построения переменных разделения можно использовать поля $Z_c = \partial/\partial c$ вместо поля Z_a [11].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Решения систем уравнений*

$$\Phi(\mu, \lambda, H, K) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial a_j} \Phi(\mu, \lambda, H, K) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial d_j} \Phi(\mu, \lambda, H, K) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (19)$$

являются переменными разделения для гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $j = 2$. Перепишем уравнение кривой (17) в терминах матричных элементов матрицы

$$\mathcal{T}(\lambda) = T(\lambda - p)K_+(\lambda) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda - p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

оно имеет вид

$$\Phi(\mu, \lambda) = \mu^2 + ((-a_2\lambda - d_2)\mathcal{T}_{11} + (a_2\lambda - d_2)\mathcal{T}_{22} - \lambda\mathcal{T}_{12})\mu - (a_2^2\lambda^2 - d_2^2) \text{Det } \mathcal{T}.$$

Подставляя это определение кривой в систему уравнений (19), после некоторых упрощений получим уравнение для определения переменных разделения $q_{1,2}$

$$\mathcal{T}_{12}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - q_1^2)(\lambda^2 - q_2^2) = 0 \quad (21)$$

и уравнение для неизвестных пока функций μ_k от координат q_k и канонически-сопряженных им импульсов p_k

$$\mu_k(p_k, q_k) = (a_2 q_k + d_2)\mathcal{T}_{11}(q_k). \quad (22)$$

Явный вид этих функций можно определить, используя определение канонических переменных

$$\{q_1, q_2\} = \{p_1, p_2\} = 0, \quad \{p_k, q_j\} = \delta_{kj}.$$

Так как матрица $\mathcal{T}$ (20) удовлетворяет уравнению отражения [10], то

$$\begin{aligned} \{\mathcal{T}_{12}(\lambda), \mathcal{T}_{12}(\nu)\} &= 0, \quad \{\mathcal{T}_{11}(\lambda), \mathcal{T}_{11}(\nu)\} = \frac{-i}{\lambda + \nu} (\mathcal{T}_{12}(\lambda)\mathcal{T}_{21}(\nu) - \mathcal{T}_{12}(\nu)\mathcal{T}_{21}(\lambda)), \\ \{\mathcal{T}_{12}(\lambda), \mathcal{T}_{11}(\nu)\} &= \frac{-i}{\lambda - \nu} (\mathcal{T}_{12}(\lambda)\mathcal{T}_{11}(\nu) - \mathcal{T}_{12}(\nu)\mathcal{T}_{11}(\lambda)) + \\ &\quad + \frac{i}{\lambda + \nu} (\mathcal{T}_{11}(\nu)\mathcal{T}_{12}(\lambda) + \mathcal{T}_{12}(\nu)\mathcal{T}_{22}(\nu)). \end{aligned}$$

Подставляя в эти выражения $\lambda = q_{1,2}$, $\nu = q_{1,2}$, получим

$$\{q_1, q_2\} = \{\mu_1, \mu_2\} = 0, \quad \{q_j, \mu_k\} = -i\mu_k \delta_{jk}.$$

Тем самым

$$p_k = -i \ln \mathcal{T}_{11}(q_k) = -i(\ln \mu_k - \ln(a_2 q_k + d_2)). \quad (23)$$

Для доказательства предложения при $j = 1$ переставим сомножители в определении матрицы Лакса (15) и определим новую матрицу Лакса, спектральная кривая которой совпадает с исходной кривой (17):

$$\tilde{L}(\lambda) = \tilde{\mathcal{T}} \mathcal{K}_+,$$

где

$$\tilde{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} T^t(-\lambda - p) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{K}_-(\lambda) T(\lambda - p).$$

Как и в случае $j = 2$, система уравнений (19) приводит к следующему уравнению для определения переменных разделения:

$$\tilde{\mathcal{T}}_{21}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - \tilde{q}_1^2)(\lambda^2 - \tilde{q}_2^2) = 0. \quad (24)$$

При этом переменные разделения $q_{1,2}$ и $\tilde{q}_{1,2}$ переходят друг в друга после перестановки параметров $a_1 \leftrightarrow a_2$, $d_1 \leftrightarrow d_2$ и замены переменных $x_2 \rightarrow -x_2$ и $J_2 \rightarrow -J_2$, связанной с отображением $T \rightarrow T^t$.

Итак, мы доказали, что переменные $p_{1,2}$, $q_{1,2}$ (21)–(23) и $\tilde{p}_{1,2}$, $\tilde{q}_{1,2}$ (24) являются каноническими. Так как согласно (19) эти переменные удовлетворяют системе разделенных уравнений

$$\Phi(\mu_k(p_k, q_k), q_k, H, K) = 0, \quad k = 1, 2, \quad (25)$$

то эти переменные являются переменными разделения [3]. Доказательство завершено.

Заметим, что используя представление алгебры $e^*(3)$, в котором переменные $q_{1,2}$ являются вещественными функциями [4], мы можем проинтегрировать уравнения (25) в квадратурах, используя решения соответствующей проблемы обращения Абеля–Якоби.

В отличие от уравнений, полученных в работах [1] и [4], левая часть уравнения (21), определяющего переменные разделения, является полиномом от исходных переменных x и J , а не рациональной функцией, что позволяет построить квантовые переменные разделения. Действительно, переменные $q_{1,2}$ являются корнями уравнения (21), которое имеет вид

$$\lambda^4 + 2(H - iv - p^2)\lambda^2 + 2iu + 2d_1 d_2 a - K = 0, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} v &= a_2 x_3 J_+ - (a_2(2J_3 + p) - d_2 - ia_2^2 x_+)x_+, \\ u &= (J_+^2 + 2id_1 x_+ + a_1^2 x_3^2)(a_2 x_3 J_- - d_2 x_- + ia_2^2 x_3^2) + \\ &\quad + \left(p(2ia_2^2 x_+ - a_2(2J_3 + p) + 2d_2) + \frac{a_2 \delta}{x_3^2} \right) (x_3 J_+ + p x_+) - \\ &\quad - ip^2(a_2^2 x_+ - id_2)x_+ + (a_2 x_3^2(-2id_1 + a_1^2 x_-) + a_2 x_+ J_+ J_-)p + \frac{d_2 \delta x_+}{x_3^2}. \end{aligned} \quad (27)$$

Напомним, что $x_{\pm} = x_1 \pm ix_2$ и $J_{\pm} = J_1 \pm iJ_2$.

В двух частных случаях, для которых переменные разделения были построены ранее (см. (7) и (10)), данное уравнение имеет значительно более простой вид. Так, в частном случае, рассмотренном ранее Чаплыгиным [1], при $p = c_1 = c_2 = c_4 = \delta = 0$

$$\lambda^4 + 2(H + a_2^2 x_+^2 - ia_2(x_3 J_+ - 2x_+ J_3))\lambda^2 + 2ia_2 x_3 (J_+^2 + a_2^2 x_3^2)(J_- + ia_2 x_3) - K = 0,$$

а в случае гиростата Ковалевской, рассмотренном в [4], при $c_2 = c_3 = c_4 = \delta = 0$

$$\lambda^4 + 2(H - id_2 x_+ - p^2)\lambda^2 + 2id_2(p^2 x_+ + J_+(2px_3 - x_- J_+)) + 2d_2^2 a - K = 0.$$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построены переменные разделения для гиростата Ковалевской–Горячева–Чаплыгина. Показано, что, выбирая различные лагранжевы расслоения, определяемые различными функциями исходных интегралов движения, можно построить различные переменные разделения для одной и той же интегрируемой системы. Тем самым, кроме задачи построения переменных разделения, возникает задача о выборе переменных, позволяющих решить ту или иную задачу классической или квантовой механики.

Выбирая в качестве лагранжева многообразия симметризованное произведение двух копий спектральной кривой (2×2) -матрицы Лакса, мы получили для гиростата (1) комплексные переменные разделения (21). Однако именно этот результат легко обобщить на квантовый случай, так как соответствующие квантовые матрицы $T(\lambda)$ (11) и $\mathcal{T}(\lambda)$ (15) построены в работе [7].

Список литературы

- [1] С. А. Чаплыгин. Новое частное решение задачи о движении твердого тела в жидкости. Труды отд. физ. наук общ-ва любителей естествознания. 1903. Т. 11. № 2. С. 7; Д. Н. Горячев. Новые случаи движения твердого тела вокруг неподвижной точки. Варшавские университетские известия. 1915. Кн. 3. С. 1.
- [2] A. I. Bobenko, A. G. Reyman, M. A. Semenov-Tian-Shansky. Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 321.
- [3] E. K. Sklyanin. Progr. Theor. Phys. Suppl. 1995. V. 118. P. 35.
- [4] V. B. Kuznetsov. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 6419; nlin.SI/0201004.
- [5] Р. Граммель. Гироскоп, его теория и применения. В 2-х томах. М.: ИЛ, 1952.
- [6] C. Morosi, G. Tondo. J. Phys. A. 2002. V. 35. P. 1741; nlin.SI/0201028.
- [7] V. B. Kuznetsov, A. V. Tsyganov. J. Phys. A. 1989. V. 22. P. L73.
- [8] A. V. Tsyganov. J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 196.
- [9] B. B. Соколов, А. В. Цыганов. ТМФ. 2002. Т. 133. № 3. С. 485; nlin.SI/0112011.
- [10] E. K. Sklyanin. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.
- [11] A. V. Tsyganov. Regul. Chaot. Dynamics. 2001. V. 6. № 3. P. 307.

Поступила в редакцию 13.III.2002 г.