Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Старцев, О гиперболических уравнениях, допускающих дифференциальные подстановки, *ТМФ*, 2001, том 127, номер 1, 63–74

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1926>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:03:21

© 2001 г.

С. Я. Старцев*

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ, ДОПУСКАЮЩИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ

Показано, что $n - 1$ первых инвариантов Лапласа скалярного гиперболического уравнения, получающегося дифференциальной подстановкой n -го порядка из уравнения того же вида, имеют нулевой порядок по одной из характеристик. Из этого следует, что должны иметь нулевой порядок все инварианты Лапласа уравнения, допускающего подстановки сколь угодно высокого порядка. Рассмотрены три специальных случая таких уравнений: уравнения, допускающие автоподстановки; уравнения, получающиеся дифференциальной подстановкой из линейного уравнения; уравнения, допускающие решения, зависящие одновременно как от произвольной функции от x , так и от произвольной функции от y .

1. ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования в настоящей статье будут скалярные уравнения

$$u_{xy} = F(x, y, u, u_x, u_y), \quad (1)$$

решения которых получаются дифференциальной подстановкой

$$u = g\left(x, y, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^n w}{\partial x^n}, \frac{\partial w}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^m w}{\partial y^m}\right) \quad (2)$$

из решений некоторого другого уравнения вида (1). Точнее говоря, нас будут интересовать свойства инвариантов Лапласа уравнения (1), т.е. свойства последовательности функций H_i , заданной формулами

$$H_{-1} = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - D_x(F_{u_x}), \quad H_0 = F_u + F_{u_x} F_{u_y} - D_y(F_{u_y}), \\ 2H_i - H_{i+1} - H_{i-1} = D_x D_y(\ln(H_i)),$$

где D_x и D_y — операторы полных производных по x и y в силу уравнения (1). Смешанные частные производные $\partial^{i+j} u / \partial x^i \partial y^j$, $i, j \neq 0$, мы исключаем в силу уравнения (1) и его

*Институт математики с Вычислительным центром Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: starts@imat.rb.ru

дифференциальных следствий. В оставшихся переменных $x, y, u, u_i = \partial^i u / \partial x^i$, $\bar{u}_i = \partial^i u / \partial y^i$ полные производные D_x и D_y выражаются формулами

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} + u_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(u_{i+1} \frac{\partial}{\partial u_i} + D_y^{i-1}(F) \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} \right),$$

$$D_y = \frac{\partial}{\partial y} + \bar{u}_1 \frac{\partial}{\partial u} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\bar{u}_{i+1} \frac{\partial}{\partial \bar{u}_i} + D_x^{i-1}(F) \frac{\partial}{\partial u_i} \right).$$

Интерес к инвариантам Лапласа вызван тем, что многие важные свойства уравнения (1), такие как наличие нетривиальных интегралов и зависящих от произвольных функций симметрий, а также существование дифференциальных подстановок, переводящих решения уравнения (1) в решения линейного гиперболического уравнения, удобно описывать в терминах инвариантов Лапласа [1]–[7]. Как будет показано ниже, рассматриваемая в настоящей статье ситуация не является в этом смысле исключением. Если выбросить из рассмотрения подстановки, выражающиеся через интегралы уравнения

$$w_{xy} = Q(x, y, w, w_x, w_y) \quad (3)$$

и поэтому сводящиеся к наличию у уравнения (1) решения, зависящего от произвольной функции одного аргумента, то из существования подстановки вида (2) с $n \geq 1$, связывающей уравнения (1) и (3), следует, что H_{-i} не зависят от u_j для всех положительных $i < \max\{2, n\}$ и при любом положительном j . Этот результат используется затем для исследования следующих трех специальных случаев.

В первом случае уравнение (1) получается подстановкой из линейного уравнения (ср. [8])

$$w_{xy} + \alpha(x, y)w_x + \beta(x, y)w_y + \gamma(x, y)w = 0. \quad (4)$$

К этому случаю можно отнести, например, уравнение $u_{xy} = uu_y$, связанное подстановкой $u = w_{xx}/w_x - 2w_x/w$ с уравнением $w_{xy} = 0$.

Во втором случае уравнение переводится подстановкой само в себя (ср. [9]). Таким, например, является уравнение

$$u_{xy} = e^{-u}u_x - e^u u_y, \quad (5)$$

допускающее автоподстановку $\hat{u} = \ln(u_x + e^u)$. Кроме того, уравнение (5) связано подстановкой $u = \ln(w_x/w)$ с линейным уравнением $w_{xy} = -w$ (см. [10]).

Третий случай включает в себя уравнения, обладающие решениями, зависящими как от произвольной функции от x , так и от произвольной функции от y . Классическим примером такого уравнения является уравнение Лиувилля $u_{xy} = e^u$, общее решение которого задается формулой

$$u = \ln \left(\frac{2f'(x)h'(y)}{(f(x) + h(y))^2} \right),$$

где f и h – произвольные функции.

Заметим, что уравнение Лиувилля обладает также и двумя другими из перечисленных выше свойств: оно получается подстановкой $u = \ln(2w_x w_y / w^2)$ из уравнения $w_{xy} = 0$ и допускает автоподстановку

$$\hat{u} = \ln \left(2 \frac{(u_{xxx} - u_{xx}u_x)(u_{yyy} - u_{yy}u_y)}{(u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{2}u_x^2 - \frac{1}{2}u_y^2)^2} \right).$$

Поэтому все три указанных выше случая можно рассматривать как различные обобщения уравнения Лиувилля. На примере уравнения (5) мы убеждаемся в том, что по крайней мере первые два из этих случаев могут реализовываться и для уравнений, не обладающих интегралами.

В разделе 4 показано, что в каждом из этих трех случаев уравнение (1) допускает подстановки сколь угодно высокого порядка и, следовательно, его инварианты Лапласа H_{-i} не зависят от u_j при любом положительном j и для всех положительных i , для которых существует соответствующий инвариант Лапласа. В третьем из перечисленных выше случаев мы можем в силу его симметричности дополнительно утверждать, что H_i при $i \geq 0$ не зависят от $\bar{u}_j$.

Независимость инвариантов Лапласа от производных является достаточно жестким и конструктивным условием. С его помощью можно, например, легко убедиться в том, что единственным нелинейным уравнением вида $u_{xy} = F(u)$, допускающим подстановки сколь угодно высокого порядка, является уравнение Лиувилля. Действительно, из условия $(H_{-2})_{u_x} = -(F''/F')'u_y = 0$ мы получаем $F = Ae^{Bu} + C$. С помощью растяжения и сдвига переменной u мы можем добиться $A = B = 1$. Из условия $(H_{-4})_{u_x} = -2Ce^u u_y / (e^u + 2C)^2 = 0$ мы получаем $C = 0$.

2. ИНВАРИАНТЫ ЛАПЛАСА И ИНТЕГРАЛЫ

В настоящей статье мы постоянно будем пользоваться обобщенными преобразованиями и инвариантами Лапласа. Но перед тем как перейти к их формальному определению, дадим описание преобразования Лапласа, из которого можно уяснить его смысл.

Рассмотрим дифференциальный оператор вида

$$Z = D_x D_y + a D_x + b D_y + c, \quad (6)$$

где a, b и c — некоторые функции от x, y, u и производных u . Этот оператор можно записать как в виде

$$Z = (D_y + a) \circ (D_x + b) - H_0, \quad H_0 = D_y(b) + ab - c,$$

так и в виде

$$Z = (D_x + b) \circ (D_y + a) - K_0, \quad K_0 = D_x(a) + ab - c.$$

Пусть $K_0 \neq 0$. Тогда, как нетрудно проверить, выполнено соотношение

$$(D_y + a_1) \circ ((D_x + b) \circ (D_y + a) - K_0) = ((D_y + a_1) \circ (D_x + b) - K_0) \circ (D_y + a), \quad (7)$$

где $a_1 = a - D_y(\ln(K_0))$. Формула (7) означает, что оператор $D_y + a$ переводит ядро Z в ядро оператора

$$Z_{-1} = (D_y + a_1) \circ (D_x + b) - K_0.$$

Оператор Z_{-1} будем называть y -преобразованием Лапласа оператора Z .

В свою очередь, мы можем переписать Z_{-1} в виде

$$Z_{-1} = (D_x + b) \circ (D_y + a_1) - K_1,$$

где, как нетрудно убедиться,

$$K_1 = 2K_0 - D_x D_y(\ln(K_0)) - H_0,$$

и построить y -преобразование Лапласа оператора Z_{-1} , которое мы обозначим через Z_{-2} , и т.д. Многократное применение вышеописанной процедуры дает нам последовательность операторов

$$Z_{-i} = (D_x + b) \circ (D_y + a_i) - K_i = (D_y + a_i) \circ (D_x + b) - K_{i-1},$$

где K_i, a_i определяются рекуррентными формулами

$$\begin{aligned} K_{i+1} &= 2K_i - D_x D_y(\ln(K_i)) - K_{i-1}, & H_{-1} &= K_0, \\ a_{i+1} &= a_i - D_y(\ln(K_i)), & a_0 &= a. \end{aligned}$$

Аналогичным образом описывается и x -преобразование Лапласа, надо лишь везде (исключая, конечно, формулу (6)) поменять местами x и y , а также a и b .

Подытожим вышесказанное в следующем определении.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции

$$H_0 = D_y(b) + ab - c, \quad K_0 = D_x(a) + ab - c$$

называются соответственно *главными x - и y -инвариантами Лапласа* оператора (6). Последующие x -инварианты Лапласа H_i определяются рекуррентной формулой

$$H_{i+1} = 2H_i - D_x D_y(\ln(H_i)) - H_{i-1}, \quad (8)$$

где $H_{-1} = K_0$, а последующие y -инварианты Лапласа K_i — формулой

$$K_{i+1} = 2K_i - D_x D_y(\ln(K_i)) - K_{i-1}, \quad (9)$$

где $K_{-1} = H_0$. Операторы

$$Z_i = (D_y + a) \circ (D_x + b_i) - H_i, \quad b_i = b_{i-1} - D_x(\ln(H_{i-1})), \quad b_0 = b, \quad (10)$$

$$Z_{-i} = (D_x + b) \circ (D_y + a_i) - K_i, \quad a_i = a_{i-1} - D_y(\ln(K_{i-1})), \quad a_0 = a, \quad (11)$$

называются соответственно i -ми x - и y -преобразованиями Лапласа оператора (6).

Инвариантами Лапласа уравнения (1) называются инварианты Лапласа его оператора линеаризации

$$L = D_x D_y - F_{u_x} D_x - F_{u_y} D_y - F_u. \quad (12)$$

Заметим, что мы можем продолжать цепочку преобразований и инвариантов Лапласа лишь до тех пор, пока очередной инвариант Лапласа не обратится в нуль. Поэтому в дальнейшем, не оговаривая это каждый раз, мы будем иметь в виду, что все сформулированные ниже утверждения об инвариантах Лапласа верны лишь для тех из них, которые мы можем построить: для инвариантов, предшествующих нулевому, если таковой найдется, а если ни один из инвариантов не обращается в нуль, то для всех инвариантов Лапласа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Функцию Q , зависящую от x, y, u и производных u , будем называть x -интегралом (y -интегралом) уравнения (1), если $D_y(Q) = 0$ ($D_x(Q) = 0$). Если Q зависит только от x (только от y), то Q будем называть тривиальным x -интегралом (y -интегралом).

Нетрудно видеть, что x -интеграл (y -интеграл) не может зависеть от переменных $\bar{u}_i$ (от переменных u_i). Порядок старшей из частных производных, от которых интеграл существенно зависит, называется порядком интеграла.

В работах [11], [12] было получено следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть уравнение (1) допускает нетривиальный x -интеграл S . Тогда S может быть записан в виде

$$S = \varphi(x, X, D_x(X), \dots, D_x^i(X)),$$

где через X обозначен x -интеграл уравнения (1) минимального порядка.

Естественно, аналогичное утверждение верно и для y -интегралов. Пользуясь “симметрией” $x \leftrightarrow y$ уравнения (1), мы будем в дальнейшем формулировать лишь одно из двух симметричных утверждений.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПОДСТАНОВКИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Далее будем обозначать через D_x и D_y полные производные в силу уравнения (3) по x и y , соответственно.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем говорить, что подстановка (2) является дифференциальной подстановкой из уравнения (3) в уравнение (1), если g зависит хотя бы от одной из производных w и выполнено соотношение

$$D_x D_y(g) = F(x, y, g, D_x(g), D_y(g)). \quad (13)$$

Для определенности будем в дальнейшем считать, что подстановка зависит хотя бы от одной из производных w по x .

Заметим, что если уравнение (1) допускает решение вида

$$u = \varphi(x, y, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(r)}(x)), \quad (14)$$

где $f(x)$ – произвольная функция, то уравнение (1) может быть связано с любым уравнением (3), обладающим нетривиальными x -интегралами, подстановкой вида

$$u = \varphi(x, y, X, D_x(X), D_x^2(X), \dots, D_x^r(X)), \quad (15)$$

где X – некоторый нетривиальный x -интеграл уравнения (3). Например, любое уравнение $u_{xy} = a(x, y, u, u_x)u_y$ связано подстановкой $u = X$ с любым уравнением, допускающим нетривиальный x -интеграл X .

Верно и обратное: если уравнения (1) и (3) связаны подстановкой вида (15), то уравнение (1) имеет решение вида (14). Подстановки вида (15) мы будем называть *вырожденными* и исключим их из рассмотрения, поскольку в этом случае правильнее говорить не о наличии у уравнения (1) подстановки, а о наличии у этого уравнения решений специального вида. Естественно также считать вырожденными и подстановки вида

$$u = \varphi(x, y, Y, D_y(Y), D_y^2(Y), \dots, D_y^r(Y)),$$

где Y – некоторый y -интеграл уравнения (3), но такой случай не может быть реализован в силу нашего предположения о зависимости подстановки от производных w по x .

ЛЕММА 1. Пусть уравнения (1) и (3) связаны подстановкой (2) и найдется i такое, что $x, y, g, D_y(g), \dots, D_y^i(g)$ функционально зависимы. Тогда уравнение (3) имеет нетривиальные x -интегралы, подстановка (2) является вырожденной и уравнение (1) допускает решение вида (14).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим $D_y^j(g)$ через g_j . Возьмем в качестве i минимальное значение, при котором выполнены условия леммы. Тогда $x, y, g_j, j = \overline{0, i-1}$, функционально независимы и найдется функция B такая, что

$$g_i = B(x, y, g, g_1, \dots, g_{i-1}).$$

Для любой функции S , зависящей от $x, y, g_j, j = \overline{0, i-1}$, ее полная производная по y в силу уравнения (3) может быть записана в виде

$$D_y(S) = S_y + g_1 S_g + g_2 S_{g_1} + \dots + B(x, y, g, \dots, g_{i-1}) S_{g_{i-1}}.$$

Приравнивая это соотношение к нулю, получаем уравнение, которое имеет $i+1$ функционально независимых решений $x, S_1, S_2, \dots, S_i$, где S_k должны зависеть хотя бы от одной из переменных g_j и в силу функциональной независимости последних задают нетривиальные интегралы уравнения (3).

Принимая во внимание то, что S_y может быть выражена через S_{g_j} из соотношения $D_y(S) = 0$, получим, что в случае $B \neq 0$ необходимым условием функциональной независимости $x, S_1, \dots, S_i$ является условие

$$\frac{D(S_1, \dots, S_i)}{D(g, g_1, \dots, g_{i-1})} \neq 0.$$

Последнее соотношение означает, что g может быть записана как функция от x, y и интегралов S_k . Учитывая утверждение 1, получим

$$g = \varphi(x, y, X, D_x(X), D_x^2(X), \dots, D_x^r(X)),$$

где X — интеграл уравнения (3) минимального порядка.

Если же $B = 0$, то получим тот же результат многократным интегрированием соотношения $D_y^i(g) = 0$. Лемма доказана.

Обозначим через w_i и $\bar{w}_i$ i -е производные w по x и y , соответственно. Ниже все функции предполагаются зависящими не только от x и y , но и от w и ее вышеуказанных производных. Будем говорить, что функция f имеет *порядок* (m, n) , если она не зависит от переменных $\bar{w}_i$, $i > m$, w_j , $j > n$, и $f_{\bar{w}_m} \neq 0$, $f_{w_n} \neq 0$. Если функция f имеет порядок (m, n) , мы будем писать $\text{ord}_y(f) = m$, $\text{ord}_x(f) = n$. Через $[Z]$ обозначим множество операторов вида

$$\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \zeta_{ij} D_x^i \circ D_y^j \circ Z,$$

где ζ_{ij} — некоторые функции, k — произвольное неотрицательное целое число, а Z — оператор вида (6).

ЛЕММА 2. Пусть для некоторого оператора Z вида (6) найдутся оператор

$$P = \sum_{i=0}^n \xi_i D_x^i + \sum_{i=1}^m \xi_{-i} D_y^i,$$

где ξ_i — некоторые функции, $\text{ord}_x(\xi_i) \leq l$, $\xi_n \neq 0$, $l \geq n > 0$, а также оператор

$$M = D_x D_y + \alpha(x, y, w, w_x, w_y) D_x + \beta(x, y, w, w_x, w_y) D_y + \gamma(x, y, w, w_x, w_y)$$

такие, что выполнено соотношение

$$Z \circ P = 0 \pmod{[M]}. \quad (16)$$

Тогда:

а) $\text{ord}_x(a) \leq l$;

б) при $n > 1$ выполнено условие $\text{ord}_x(K_0) \leq l$, где через K_0 обозначен главный y -инвариант Лапласа оператора Z ;

в) при $n > 1$ для y -преобразования Лапласа Z_{-1} оператора Z найдется оператор

$$\tilde{P} = \sum_{i=0}^{n-1} \tilde{\xi}_i D_x^i + \sum_{i=1}^{m+1} \tilde{\xi}_{-i} D_y^i, \quad \tilde{\xi}_{n-1} = K_0 \xi_n, \quad \text{ord}_x(\tilde{\xi}_i) \leq l,$$

такой, что $Z_{-1} \circ \tilde{P} = 0 \pmod{[M]}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукцией по i нетрудно проверить, что

$$D_x \circ D_y^i = \zeta_{-1}^i D_x + \sum_{j=0}^i \zeta_j^i D_y^j \pmod{[M]}, \quad (17)$$

$$D_y \circ D_x^i = \eta_{-1}^i D_y + \sum_{j=0}^i \eta_j^i D_x^j \pmod{[M]}, \quad (18)$$

где $\text{ord}_x(\zeta_j^i) \leq 1$, $\text{ord}_x(\eta_j^i) \leq i$ и $\eta_i^i = -\alpha$. Кроме того, при $i > 1$ верна формула

$$\eta_{i-1}^i = \alpha\beta - \gamma - (i-1)D_x(\alpha). \quad (19)$$

Воспользовавшись формулами (17), (18), исключим из левой части соотношения (16) члены вида $D_x \circ D_y^i$ и $D_y \circ D_x^i$. Полученное в результате этой операции выражение должно уже просто равняться нулю, а не с точностью до $[M]$, так как оно не содержит $D_x^i \circ D_y^j$ с $ij \neq 0$. Собирая в этом выражении члены с D_x^{n+1} и D_x^n и учитывая (19), получим

$$(D_y + a - \alpha)(\xi_n) = 0 \quad (20)$$

и при $n > 1$

$$(\gamma - \alpha\beta + (n-1)D_x(\alpha) + K_0)\xi_n - (D_y + a - \alpha)(\xi_{n-1}) = 0. \quad (21)$$

Формула (20) доказывает утверждение “а” леммы.

Формула (21) с учетом (20) может быть записана в виде

$$K_0 = D_y \left(\frac{\xi_{n-1}}{\xi_n} \right) + \alpha\beta - \gamma - (n-1)D_x(\alpha).$$

Нетрудно видеть, что последнее соотношение доказывает утверждение “б” леммы.

Воспользовавшись формулами (7) и (16), получим

$$(D_y + a_1) \circ Z \circ P = Z_{-1} \circ (D_y + a) \circ P = 0 \pmod{[M]}. \quad (22)$$

Тогда

$$\begin{aligned} (D_y + a) \circ P &= \sum_{i=0}^n ((D_y + a)(\xi_i) D_x^i + \xi_i D_y \circ D_x^i) + \\ &+ \sum_{i=1}^m ((D_y + a)(\xi_{-i}) D_y^i + \xi_{-i} D_y^{i+1}). \end{aligned}$$

В последнем соотношении исключим все члены с $D_y \circ D_x^i$ по формуле (18). Ясно, что порядки $\text{ord}_x(\tilde{\xi}_i)$ коэффициентов полученного в результате этого действия оператора

$$\tilde{P} = \sum_{i=0}^n \tilde{\xi}_i D_x^i + \sum_{i=1}^{m+1} \tilde{\xi}_{-i} D_y^i$$

могут возрасти либо из-за дифференцирования D_y (это может произойти лишь в случае $\text{ord}_x(\xi_i) = 0$, и тогда $\text{ord}_x(D_y(\xi_i)) \leq 1 \leq l$), либо за счет умножения на a и η_j^i . Но порядки последних, как показано выше, не превосходят l , и поэтому $\text{ord}_x(\tilde{\xi}_i) \leq l$.

Более тщательные вычисления с применением формулы (19) показывают, что

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_n &= (D_y + a - \alpha)(\xi_n), \\ \tilde{\xi}_{n-1} &= (D_y + a - \alpha)(\xi_{n-1}) - (\gamma - \alpha\beta + (n-1)D_x(\alpha))\xi_n.\end{aligned}$$

Учитывая (20), (21), из последних формул получаем $\tilde{\xi}_n = 0$, $\tilde{\xi}_{n-1} = K_0\xi_n$. Кроме того, так как по построению $\tilde{P} = (D_y + a) \circ P \pmod{[M]}$, из формулы (22) следует утверждение “в” леммы:

$$Z_{-1} \circ \tilde{P} = 0 \pmod{[M]}.$$

Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *Если уравнение (1) связано невырожденной подстановкой $u = g$, $\text{ord}_x(g) = n > 0$, с некоторым уравнением (3), то $F_{u_x u_x} = 0$. Если, кроме того, $n > 1$, то y -инварианты Лапласа K_i уравнения (1) не зависят от u_j для всех $i < n-1$ и любого $j > 0$.*

Заметим, что условие $F_{u_x u_x} = 0$ равносильно независимости K_0 от производных u по x и при $K_0 \neq 0$ является достаточным (см. [10]) для наличия у уравнения (1) подстановки первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через q_* линейризацию функции q :

$$q_* = \frac{\partial q}{\partial w} + \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{w}_i} D_y^i + \frac{\partial q}{\partial w_i} D_x^i \right).$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в том, что верны формулы

$$\begin{aligned}(D_x(q))_* &= D_x \circ q_* \pmod{[L]}, \\ (D_y(q))_* &= D_y \circ q_* \pmod{[L]},\end{aligned}\tag{23}$$

где через L обозначен оператор линейризации уравнения (3):

$$L = D_x D_y - Q_{w_x} D_x - Q_{w_y} D_y - Q_w.$$

Линеаризуя соотношение (13) и учитывая формулы (23), получим

$$Z \circ g_* = 0 \pmod{[L]},\tag{24}$$

где

$$Z = D_x D_y - \hat{F}_{u_x} D_x - \hat{F}_{u_y} D_y - \hat{F}_u,$$

а $\hat{F}_{u_x}$, $\hat{F}_{u_y}$ и $\hat{F}_u$ получаются из F_{u_x} , F_{u_y} и F_u заменой u , u_x и u_y на g , $D_x(g)$ и $D_y(g)$.

Применяя к (24) утверждение “а” леммы 2, получим

$$\text{ord}_x(F_{u_x}(x, y, g, D_x(g), D_y(g))) \leq n,$$

откуда после дифференцирования по w_{n+1} следует

$$F_{u_x u_x}(x, y, g, D_x(g), D_y(g))g_{w_n} = 0.$$

В силу леммы 1 переменные $x, y, g, D_x(g), D_y(g)$ функционально независимы, поэтому последнее соотношение может выполняться лишь в случае $F_{u_x u_x} = 0$.

Множественно применяя к (24) утверждение “в” леммы 2, получим

$$Z_{-i} \circ P_i = 0 \pmod{[L]}$$

для всех положительных $i < n - 1$, причем порядки ord_x коэффициентов операторов P_i не будут превосходить n . В силу утверждения “б” леммы 2 это означает, что порядок главных y -инвариантов Лапласа операторов Z_{-i} (которые, как видно из рассуждений, предшествующих определению 1, совпадают с i -ми y -инвариантами $\hat{K}_i$ оператора Z) не превосходит n .

В силу (13) $\hat{K}_i$ получаются из y -инвариантов K_i уравнения (1) заменой $u_j, \bar{u}_k$ на $D_x^j(g), D_y^k(g)$. С учетом функциональной независимости $x, y, g, D_x^j(g), D_y^k(g)$, вытекающей из леммы 1, соотношение $\text{ord}_x(\hat{K}_i) \leq n$ может выполняться лишь в случае, если K_i не зависит от производных u по x . Теорема доказана.

4. УРАВНЕНИЯ, ДОПУСКАЮЩИЕ ПОДСТАНОВКИ СКОЛЬ УГОДНО ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Из теоремы 1 следует, что y -инварианты Лапласа любого уравнения вида (1), допускающего невырожденные подстановки сколь угодно высокого порядка, должны не зависеть от производных u по x . Наличие таких подстановок мы можем гарантировать в следующих трех случаях.

1. Уравнение переводится некоторой невырожденной подстановкой само в себя — многократное применение этой автоподстановки дает нам подстановки сколь угодно высокого порядка.

2. Уравнение (1) допускает решение, зависящее как от произвольной функции от x , так и от произвольной функции от y , — подстановки сколь угодно высокого порядка мы получаем из этого решения заменой произвольных функций на x - и y -интегралы уравнения (3).

3. Уравнением, допускающим подстановки сколь угодно высокого порядка, является и уравнение, получающееся подстановкой (2) из линейного уравнения (4). Действительно, мы можем повысить порядок подстановки, переходя от уравнения (4) к линейному уравнению, из которого (4) получается x -преобразованием Лапласа, и рассматривая композицию этого преобразования Лапласа с подстановкой (2). Но поскольку не удастся доказать, что при таком повышении порядка подстановки сохранится ее невырожденность, мы докажем соответствующее утверждение (см. ниже теорему 4), опираясь на результат работы [6].

Рассмотрим теперь каждый из трех вышеперечисленных случаев подробнее.

ТЕОРЕМА 2. Пусть невырожденная подстановка $u = g$, $\text{ord}_x(g) = n > 0$, переводит решения уравнения (3) снова в решения этого же уравнения. Тогда y -инварианты Лапласа K_i уравнения (3) не зависят от w_j при любых $i \geq 0$ и $j > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $\hat{g}$ функцию, получающуюся из g заменой ее аргументов $w_i, \bar{w}_j$ на $D_x^i(g), D_y^j(g)$. Очевидно, что $\text{ord}_x(\hat{g}) = 2n$, и подстановка $u = \hat{g}$ переводит решения уравнения (3) снова в решения этого же уравнения. Покажем от противного, что эта подстановка невырожденна. Для вырожденной подстановки должно найтись такое i , что

$$D_y^i(\hat{g}) = B(x, y, \hat{g}, D_y(\hat{g}), \dots, D_y^{i-1}(\hat{g})). \quad (25)$$

Но в силу определяющего автоподстановку соотношения

$$D_x D_y(g) = Q(x, y, g, D_x(g), D_y(g))$$

$D_y^l(\hat{g})$ получаются из $D_y^l(g)$ заменой производных $w_i, \bar{w}_j$ на $D_x^i(g), D_y^j(g)$. В совокупности с функциональной независимостью $x, y, D_x^i(g), D_y^j(g)$ (см. лемму 1) это означает, что соотношение (25) может выполняться лишь в случае

$$D_y^i(g) = B(x, y, g, D_y(g), \dots, D_y^{i-1}(g)),$$

что противоречит невырожденности подстановки $u = g$.

Повторяя вышеописанную процедуру “удвоения порядка” автоподстановки, мы можем получить невырожденные подстановки сколь угодно высокого порядка, что и доказывает теорему.

ТЕОРЕМА 3. Пусть уравнение (1) допускает решения вида

$$u = \varphi(x, y, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x), h(y), h'(y), \dots, h^{(m)}(y)),$$

где $f(x)$ и $h(y)$ – произвольные функции, а φ зависит от обеих этих функций. Тогда y -инварианты Лапласа K_i уравнения (1) не зависят от u_j , а его x -инварианты H_i не зависят от $\bar{u}_j$ при любых $i \geq 0$ и $j > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное уравнение (3), допускающее нетривиальный x -интеграл X и нетривиальный y -интеграл Y . Обозначим через $\hat{\varphi}_{ij}$ функцию

$$\varphi(x, y, D_x^i(X), D_x^{i+1}(X), \dots, D_x^{i+n}(X), D_y^j(Y), D_y^{j+1}(Y), \dots, D_y^{j+m}(Y)).$$

Нетрудно видеть, что $u = \hat{\varphi}_{ij}$ является подстановкой из (3) в (1) при любых неотрицательных i и j . Эта подстановка является невырожденной, так как зависит как от производных w по x , так и от производных w по y . Тот факт, что эта подстановка может иметь сколь угодно высокий порядок за счет увеличения i и j , в совокупности с теоремой 1 и утверждением, получающимся из нее заменой x на y , завершает доказательство теоремы.

В работе [6] было доказано следующее

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Пусть для некоторого оператора Z вида (6) найдутся оператор

$$P = \sum_{i=0}^n \xi_i D_x^i + \sum_{i=1}^m \xi_{-i} D_y^i,$$

где ξ_i – некоторые функции, $\text{ord}_x(\xi_i) \leq l$, $\xi_n \neq 0$, $n > 0$, а также оператор

$$M = D_x D_y + \alpha(x, y) D_x + \beta(x, y) D_y + \gamma(x, y)$$

такие, что выполнено соотношение (16). Тогда y -инварианты Лапласа K_i оператора Z удовлетворяют условию $\text{ord}_x(K_i) \leq \max\{1, l\}$.

Опираясь на это утверждение и лемму 1 и используя рассуждения, аналогичные примененным при доказательстве теоремы 1, можно легко доказать, что верна

ТЕОРЕМА 4. Пусть невырожденная подстановка $u = g$, $\text{ord}_x(g) > 0$, переводит уравнение (4) в уравнение (1). Тогда y -инварианты Лапласа K_i уравнения (1) не зависят от u_j при любых $i \geq 0$ и $j > 0$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-00431).

Список литературы

- [1] А. В. Жибер, В. В. Соколов, С. Я. Старцев. Докл. РАН. 1995. Т. 343. № 6. С. 746.
- [2] V. V. Sokolov, A. V. Zhiber. Phys. Lett. A. 1995. V. 208. P. 303.
- [3] I. M. Anderson, N. Kamran. Duke Math. J. 1997. V. 87. № 2. P. 265.
- [4] I. M. Anderson, M. Juras. Duke Math. J. 1997. V. 89. № 2. P. 351.
- [5] С. Я. Старцев. ТМФ. 1998. Т. 116. № 3. С. 336.
- [6] С. Я. Старцев. ТМФ. 1999. Т. 120. № 2. С. 237.
- [7] В. Э. Адлер, С. Я. Старцев. ТМФ. 1999. Т. 121. № 2. С. 271.
- [8] М. Ю. Звягин. ДАН СССР. 1991. Т. 316. № 1. С. 36.
- [9] В. С. Новиков. ТМФ. 1998. Т. 116. № 2. С. 193.
- [10] V. V. Sokolov, S. I. Svinolupov. Eur. J. Appl. Math. 1995. V. 6. P. 145.
- [11] А. В. Жибер, А. Б. Шабат. ДАН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 29.
- [12] А. В. Жибер. Изв. РАН. Сер. матем. 1994. Т. 58. № 4. С. 33.

Поступила в редакцию 24.X.2000 г.