Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. К. Ниммо, К. Р. Джилсон, Я. Охта, Применения преобразований Дарбу к самодуальным уравнениям Янга–Миллса, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 284–293

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1932>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 15:22:22

© 2000 г. Дж. Дж. К. Ниммо*, К. Р. Джилсон*, Й. Охта†

ПРИМЕНЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ДАРБУ К САМОДУАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ ЯНГА–МИЛЛСА

Показано, что линейная задача, связанная с самодуальными уравнениями Янга–Миллса, ковариантна по отношению к преобразованиям Дарбу и бинарным преобразованиям Дарбу почти классического типа. Построены решения этой задачи в виде вронскианоподобных и граммианоподобных детерминантов. Показано, что самодуальные условия могут быть корректно реализованы только для решений последнего типа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Начиная с конца семидесятых годов опубликовано большое число статей (см., например, [1–7]), посвященных методам получения решений самодуальных уравнений Янга–Миллса (СДУЯМ). Основной задачей предлагаемой работы является не поиск новых решений, а отыскание замкнутых выражений для широкого класса решений, записанных в терминах детерминантов. Мы стремимся достичь этого, применяя стандартную технику преобразований Дарбу, используемую в теории солитонов и в других областях. Тем самым мы предлагаем читателю, знакомому с преобразованиями Дарбу или методом Хироты (но не владеющему другими методами, используемыми в соответствующей литературе), простой способ понять форму решений этих уравнений. Первоначальной мотивацией этой работы послужило стремление найти обобщение СДУЯМ в $SU(2)$ в форме Хироты для общего случая, рассмотренного в работе [8]. Независимо преобразования Дарбу в последнее время использовались для исследования редуцированной формы СДУЯМ [9].

В разделе 2 описывается стандартная формулировка СДУЯМ, основанная на совместности пары Лакса. Показана эквивалентность этой системы единственному уравнению – уравнению Янга, написанному в терминах матрицы J размера $N \times N$. Оказывается, что пара Лакса не входит в класс операторов, описываемый стандартной теоремой о преобразованиях Дарбу [10].

В разделе 3 мы применим эту теорему и опишем размерную редукцию, необходимую для получения пары Лакса СДУЯМ. Для такой редукции преобразование Дарбу из

*Department of Mathematics, University of Glasgow, Glasgow, UK

†Department of Applied Mathematics, Hiroshima University, Hiroshima, Japan

дифференциального оператора превращается в оператор умножения, линейный по отношению к спектральному параметру. Наше рассмотрение подтверждает представление о неприменимости теоремы в ее стандартной форме. Используя часть доказательства редуцированной формы теоремы, мы получим обобщение, применимое в данном случае.

В разделе 4 описаны бинарное преобразование Дарбу и его редуцированная форма.

Применение результатов разделов 3 и 4 к случаю СДУЯМ обсуждается в разделе 5, где получены формулы для решений J в каждой из двух форм. Выражения для J находятся с помощью преобразований Дарбу в виде отношений “вронскианоподобных” детерминантов. Мы называем эти детерминанты вронскианоподобными, поскольку в нередуцированном случае они являются вронскианами. При редукции дифференцирование в этих детерминантах заменяется умножением на спектральный параметр, но в остальном их структура не меняется. Аналогично бинарное преобразование Дарбу приводит к выражениям в виде отношений граммианоподобных детерминантов.

Наконец, мы рассмотрим случай $J \in SU(N)$, для которого пара Лакса является самосопряженной. Будет показано, что для сохранения этого свойства естественно выбрать бинарное преобразование Дарбу.

2. САМОДУАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Начнем с описания уравнений в форме Янга и их формулировки в виде условия совместности пары Лакса. Рассмотрим четыре матрицы $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ размером $N \times N$, которые все являются функциями четырех комплексных переменных x^0, x^1, x^2 и x^3 . Пусть $\partial_a := \partial/\partial x^a$ ($a = 0, 1, 2, 3$). Введем операторы ковариантной производной

$$D_a = \partial_a + \mathcal{A}_a. \quad (2.1)$$

СДУЯМ представляют собой условия совместности пары Лакса [2]

$$L := D_0 + \lambda D_1, \quad M := D_2 + \lambda D_3, \quad (2.2)$$

а именно $[L, M] = 0$, или

$$[D_0, D_2] = 0, \quad [D_1, D_3] = 0, \quad (2.3)$$

$$[D_0, D_3] + [D_1, D_2] = 0. \quad (2.4)$$

Уравнения (2.3) означают, что пары операторов D_0, D_2 и D_1, D_3 совместны, т.е. существуют общие решения – обратимые матрицы h и k размером $N \times N$ такие, что

$$D_0(h) = D_2(h) = 0,$$

$$D_1(k) = D_3(k) = 0.$$

Решив эти уравнения для $\mathcal{A}_a$, можно выразить все $\mathcal{A}_a$ через h или k . Тогда

$$D_0 = h\partial_0 h^{-1}, \quad D_2 = h\partial_2 h^{-1}, \quad (2.5)$$

$$D_1 = k\partial_1 k^{-1}, \quad D_3 = k\partial_3 k^{-1}. \quad (2.6)$$

Заметим, что здесь и далее мы используем круглые скобки, чтобы отличить обозначение для действия оператора на аргумент от обозначения произведения операторов. Например, выше $D_0(h)$ есть матрица

$$\frac{\partial h}{\partial x^0} + \mathcal{A}_0 h,$$

где $h\partial_0 h^{-1}$ – оператор вида

$$\frac{\partial}{\partial x^0} - \frac{\partial h}{\partial x^0} h^{-1}.$$

Далее, оставшаяся часть СДУЯМ, уравнение (2.4), может быть выражена только через матрицы $J = k^{-1}h$:

$$\partial_3(\partial_0(J)J^{-1}) + \partial_2(\partial_1(J)J^{-1}) = 0. \quad (2.7)$$

Последнее уравнение, известное как уравнение Янга, эквивалентно СДУЯМ. Выполнив калибровочное преобразование $L \rightarrow k^{-1}Lk$, $M \rightarrow k^{-1}Mk$, можно также выразить пару Лакса (2.2) уравнений СДУЯМ через матрицу J и получить пару Лакса более простого вида для уравнения Янга:

$$L = J\partial_0 J^{-1} + \lambda\partial_1, \quad M = J\partial_2 J^{-1} + \lambda\partial_3. \quad (2.8)$$

Как видно, для каждой из описанных выше формулировок СДУЯМ пары Лакса включают операторы вида

$$L := \sum_{i=1}^M a_i \lambda^i, \quad (2.9)$$

где a_i суть линейные операторы первого порядка и в данном случае $M = 1$. В следующем разделе будет показано, что оператор такого вида находится вне рамок класса, к которому обычно применяются преобразования Дарбу. Следовательно, изучение СДУЯМ требует расширения обычной теории.

3. СТАНДАРТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

В статье [10] о преобразовании Дарбу для оператора Шредингера, зависящего от времени, указано, что стандартное преобразование Дарбу, обычно применяемое, например, к уравнению Шредингера, может быть использовано для довольно широкого класса операторов. Однако операторы в паре Лакса СДУЯМ в данный класс не входят. В настоящем разделе мы рассмотрим доказательство этого общего результата и исследуем обобщение, необходимое для работы с интересующим нас случаем.

ТЕОРЕМА 1. Пусть

$$L = \sum_{i=0}^M a_i \partial^i, \quad (3.1)$$

где $\partial = \partial/\partial x$ и a_i – не зависящие от ∂ операторы. Пусть также θ есть такая обратимая матрица, что $L(\theta) = \theta A$, где $\partial(A) = 0$ и $G_\theta := \theta \partial \theta^{-1}$. Форма L является инвариантной по отношению к преобразованию Дарбу

$$L \rightarrow \tilde{L} = G_\theta L G_\theta^{-1}$$

тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} a_0 &= \alpha \partial_y + m_0, \\ a_i &= m_i, \quad i > 0, \end{aligned}$$

где α – скалярная константа ($\partial(\alpha) = 0$), m_i – матрицы и ∂_y – дифференциальный оператор, не зависящий от ∂ .

Теорема означает, что (как обычно для преобразований Дарбу) для любого заданного решения ϕ уравнения $L(\phi) = 0$ функция $\tilde{\phi} := G(\phi)$ есть решение уравнения $\tilde{L}(\tilde{\phi}) = 0$, а коэффициенты $\tilde{a}_i$ в $\tilde{L}$ заданы в терминах коэффициентов a_j в L и θ .

Существует естественная размерная редукция этой теоремы, которая получается при явном выделении в решениях зависимости от x . Пусть $\phi = \phi^r e^{\lambda x}$, λ – постоянный скаляр и $\theta = \theta^r e^{\Lambda x}$, где Λ – постоянная матрица, причем ϕ^r и θ^r не зависят от x . Далее в обозначениях мы не будем писать верхний индекс “ r ”. Если Λ есть диагональная матрица, то ее элементы – собственные значения, а соответствующие столбцы – собственные функции. Однако, вообще говоря, на Λ такие ограничения не накладываются.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть

$$L = \sum_{i=0}^M a_i \lambda^i,$$

где a_i – операторы, не зависящие от λ . Пусть θ – обратимая матрица такая, что

$$\sum_{i=0}^M a_i(\theta) \Lambda^i = 0 \quad \text{и} \quad G_\theta := \theta(\lambda I - \Lambda) \theta^{-1} = \lambda - \Theta,$$

где $\Theta = \theta \Lambda \theta^{-1}$. Форма L инвариантна по отношению к преобразованию Дарбу

$$L \rightarrow \tilde{L} = G_\theta L G_\theta^{-1}, \quad (3.2)$$

если

$$a_0 = \alpha \partial_y + m_0, \quad (3.3)$$

$$a_i = m_i, \quad i > 0, \quad (3.4)$$

где α – скалярная константа ($\partial(\alpha) = 0$) и m_i – матрицы.

Хотя сюда непосредственно не включаются операторы вида (2.9), можно сформулировать обобщение этого следствия, включающее такие операторы. Для того чтобы это увидеть, полезно рассмотреть часть доказательства теоремы 1.

СХЕМАТИЧЕСКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Преобразованный оператор

$$\tilde{L} = \theta \partial \theta^{-1} \sum_{i=0}^M a_i \partial^i \theta \partial^{-1} \theta^{-1}$$

имеет псевдодифференциальный “хвост”, если только часть

$$R := \theta \partial \theta^{-1} \sum_{i=0}^M a_i \partial^i \theta,$$

не зависящая от ∂ , не равна нулю. Это может произойти в одном из следующих двух случаев:

1) $a_i = m_i$, при этом

$$R = \theta \partial \left(\theta^{-1} \sum_{i=0}^M m_i \partial^i(\theta) \right) = \theta \partial (\theta^{-1} L(\theta)) = 0,$$

поскольку $L(\theta) = \theta A$;

2) $a_i = \alpha_i \partial_i$, где $\partial_i := \partial / \partial x^i$ — дифференциальные операторы, не зависящие от ∂ , а α_i — скалярные константы, в этом случае

$$\begin{aligned} R &= \theta \partial \theta^{-1} \sum_{i=0}^M \alpha_i (\partial_i \partial^i(\theta) + \partial^i(\theta) \partial_i) + O(\partial) = \\ &= \theta \partial (\theta^{-1} L(\theta)) + \sum_{i=0}^M \alpha_i \theta \partial \theta^{-1} \partial^i(\theta) \partial_i + O(\partial). \end{aligned}$$

Первый член правой части обращается в нуль, как и в случае 1, поэтому R есть $O(\partial)$ тогда и только тогда, когда или для каждого i выполнено условие $\alpha_i = 0$, или ∂ коммутирует с $\theta^{-1} \partial^i(\theta)$. Таким образом, видно, что только α_0 может быть отличным от нуля, причем на θ не накладываются никакие дополнительные ограничения.

Если аналогичную технику доказательства применить к следствию 1, размерная редукция приводит к замене $\partial^i(\theta)$ на $\theta \Lambda^i$ и ∂ на λ . Ясно, что во втором случае $\partial \theta^{-1} \partial^i(\theta) \rightarrow \lambda \theta^{-1} \theta \Lambda^i = \Lambda^i \lambda$, так что можно положить $\alpha_i \neq 0$ для всех i , а не только для $i = 0$. Итак, следствие 1 можно обобщить.

ТЕОРЕМА 2. Пусть

$$L = \sum_{i=0}^M a_i \lambda^i,$$

где a_i — операторы, не зависящие от λ . Пусть θ — обратимая матрица такая, что

$$\sum_{i=0}^M a_i(\theta) \Lambda^i = 0 \quad \text{и} \quad G_\theta := \theta(\lambda I - \Lambda) \theta^{-1} = \lambda - \Theta,$$

где $\Theta = \theta \Lambda \theta^{-1}$. Форма L инвариантна относительно преобразования Дарбу

$$L \rightarrow \tilde{L} = G_\theta L G_\theta^{-1}$$

тогда и только тогда, когда

$$a_i = \alpha_i \partial_i + m_i, \quad i \geq 0,$$

где α_i — скалярные постоянные, а m_i — матрицы.

4. СТАНДАРТНОЕ БИНАРНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ

Наряду с обычным преобразованием Дарбу существует стандартное бинарное преобразование Дарбу, которое получается как комбинация преобразования Дарбу одной формы с обратным преобразованием другой. Обозначим через S множество собственных функций L , через $\tilde{S}$ множество собственных функций $\tilde{L}$ и т.д. Для L и G_θ (заданных, как в теореме 1), если

$$\tilde{L} := G_\theta L G_\theta^{-1},$$

то $G_\theta: S \rightarrow \tilde{S}$. Формальное операторное сопряжение приводит к соотношению

$$\tilde{L}^\dagger = G_{\theta^{-\dagger}}^{-1} L^\dagger G_{\theta^{-\dagger}}, \quad (4.1)$$

где обозначение $(\cdot)^{-\dagger}$ есть сокращение для $((\cdot)^\dagger)^{-1}$. Таким образом, $G_{\theta^{-\dagger}}: \tilde{S}^\dagger \rightarrow S^\dagger$. Поскольку для любого ρ имеем $G_\rho(\rho) = 0$, из уравнения (4.1) следует, что

$$\tilde{L}^\dagger(\theta^{-\dagger}) = 0. \quad (4.2)$$

Пусть $\hat{L}$ – третья копия L с новыми коэффициентами. Предположим, что $\hat{\theta} \in \hat{S}$ и $G_{\hat{\theta}} \hat{L} G_{\hat{\theta}}^{-1} = \tilde{L}$ (т.е. так же, как и для $G_\theta L G_\theta^{-1}$). Из (4.2) имеем, что $\theta^{-\dagger}, \hat{\theta}^{-\dagger} \in \tilde{S}^\dagger$. При заданном $\rho \in S^\dagger$ величину $\hat{\theta}$ можно определить с точностью до константы с помощью выражения $G_{\theta^{-\dagger}}(\hat{\theta}^{-\dagger}) = \rho$. Именно

$$\hat{\theta} = \theta \Omega(\theta, \rho)^{-1}, \quad (4.3)$$

где Ω – потенциал, определенный из соотношения

$$\partial(\Omega(\phi, \psi)) = \psi^\dagger \phi. \quad (4.4)$$

Теперь можно построить *бинарное преобразование Дарбу* $B_{\theta, \rho} = G_{\hat{\theta}}^{-1} \circ G_\theta$, которое в явном виде записывается как

$$B_{\theta, \rho} = I - \theta \Omega(\theta, \rho)^{-1} \Omega(\cdot, \rho). \quad (4.5)$$

Отсюда следует, что рассматриваемое преобразование имеет смысл для любых матриц θ, ρ размера $N \times n$ таких, что $L(\theta) = L^\dagger(\rho) = 0$, а не только для матриц $N \times N$. В самом деле, можно доказать, что для любого оператора L формы, описанной в теореме 1, оператор

$$\hat{L} = B_{\theta, \rho} L B_{\theta, \rho}^{-1} \quad (4.6)$$

имеет ту же форму, что и L .

Для размерно редуцированного преобразования Дарбу, описанного при формулировке теоремы 2, мы снова принимаем, что $\phi = \phi^r e^{\lambda x}$, λ – постоянный скаляр, и $\theta = \theta^r e^{\Lambda x}$, Λ – постоянная матрица $n \times n$, и сопряженная собственная функция есть $\rho = \rho^r e^{\Xi x}$, где Ξ – некоторая другая постоянная матрица $n \times n$. Отсюда следует, что зависимость потенциала Ω от x также может быть сделана явной, т.е.

$$\Omega(\theta, \rho) = e^{\Xi^\dagger x} \Omega^r(\theta^r, \rho^r) e^{\Lambda x}, \quad \text{где} \quad \Xi^\dagger \Omega^r(\theta^r, \rho^r) + \Omega^r(\theta^r, \rho^r) \Lambda = \rho^{r\dagger} \theta^r, \quad (4.7)$$

и

$$\Omega(\phi, \rho) = e^{(\Xi^\dagger + \lambda I)x} \Omega^r(\phi^r, \rho^r), \quad \text{где} \quad (\Xi^\dagger + \lambda I) \Omega^r(\phi^r, \rho^r) = \rho^{r\dagger} \phi^r. \quad (4.8)$$

Тогда размерно редуцированное бинарное преобразование Дарбу задается уравнением (4.5), где все члены заменены на их редуцированные аналоги, описанные выше. С этого момента мы будем обсуждать только редуцированное преобразование Дарбу. Поэтому для упрощения далее мы будем опускать индекс “ r ” в обозначении редуцированных объектов.

В редуцированном случае Ω есть *алгебраический* потенциал, удовлетворяющий условию

$$\Xi^\dagger \Omega(\theta, \rho) + \Omega(\theta, \rho) \Lambda = \rho^\dagger \theta. \quad (4.9)$$

Например, если выбрать постоянные матрицы диагональными, $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ и $\Xi = \text{diag}(\xi_1, \dots, \xi_n)$, то

$$\Omega(\theta, \rho) = \left(\frac{(\rho^\dagger \theta)_{ij}}{\lambda_j + \xi_i} \right), \quad \Omega(\phi, \rho) = \left(\frac{(\rho^\dagger \phi)_{ij}}{\lambda_j + \xi_i} \right). \quad (4.10)$$

5. ЯВНОЕ РАССМОТРЕНИЕ ДЛЯ СЛУЧАЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА

При формулировке Янга СДУЯМ пара Лакса задается соотношением (2.8), а действие преобразования Дарбу, определенное теоремой 2, сводится к преобразованию матрицы J .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G = \lambda - \Theta$, где $\Theta := \theta \Lambda \theta^{-1}$, Λ — постоянная матрица, а θ — обратимая матрица, и пусть выполнены условия

$$\begin{aligned} J \partial_0 (J^{-1} \theta) + \partial_1 (\theta) \Lambda &= 0, \\ J \partial_2 (J^{-1} \theta) + \partial_3 (\theta) \Lambda &= 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Форма операторов L, M , заданных соотношениями (2.8), инвариантна относительно преобразования Дарбу $L \rightarrow GLG^{-1}$, $M \rightarrow GMG^{-1}$. Это преобразование полностью определено как преобразование $J \rightarrow \Theta J$.

Заметим, что появление матрицы Θ является следствием размерной редукции $\partial(\theta)\theta^{-1}$.

Можно также выписать компактные явные формулы для решений J_n , которые получаются в результате n итераций этого преобразования Дарбу.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для всех $k = 1, \dots, n$ рассмотрим постоянные матрицы Λ_k и не-сингулярные матричные решения θ_k уравнения (5.1) при $\Lambda = \Lambda_k$. Из этих матриц размером $N \times N$ построим матрицу $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$ размером $N \times nN$ и матрицу $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_n)$ размером $nN \times nN$. Введем также следующие обозначения: $\theta^{(k)} := \theta \Lambda^k$ (т.е. результат размерной редукции для k -й производной по x от θ) и $\theta_{j \rightarrow i}^{(k)} := \theta^{(k)}$ (где $\theta^{(k)}$ — матрица, в которой j -я строка заменена на i -ю строку матрицы $\theta^{(k+1)}$). Теперь определим скаляр F и матрицу G размером $N \times N$

соотношениями

$$F = \det \begin{pmatrix} \theta^{(0)} \\ \theta^{(1)} \\ \vdots \\ \theta^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad G_{ij} = \det \begin{pmatrix} \theta^{(0)} \\ \theta^{(1)} \\ \vdots \\ \theta^{(n-2)} \\ \theta_{j \rightarrow i}^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Решение уравнения Янга после n итераций преобразования Дарбу, определенного при формулировке теоремы 2, имеет вид

$$J_n = \frac{G}{F} J. \quad (5.3)$$

В силу теоремы 3 бинарное преобразование Дарбу, построенное в разделе 4, порождается композицией двух преобразований Дарбу: $J \rightarrow \tilde{J}$ и $\hat{J} \rightarrow \tilde{J}$. Таким образом,

$$\tilde{J} = \Theta J \quad \text{и} \quad \tilde{J} = \hat{\Theta} \hat{J}, \quad (5.4)$$

где $\Theta = \theta \Lambda \theta^{-1}$ (как в теореме 3) и $\hat{\Theta} = -\theta \Omega^{-1} \Xi^\dagger \Omega \theta^{-1}$. Это выражение для $\hat{\Theta}$ является размерно редуцированной формой выражения $\partial(\hat{\theta})\hat{\theta}^{-1}$ при $\hat{\theta} = \theta \Omega^{-1}$ (см. (4.3)). Тогда из равенств (5.4) можно получить, что

$$\hat{J} = -\theta \Omega^{-1} \Xi^{-\dagger} \Omega \Lambda \theta^{-1} J. \quad (5.5)$$

Используя условие (4.9), последнее выражение можно переписать в виде

$$\hat{J} = (I - \theta \Omega^{-1} \Xi^{-\dagger} \rho^\dagger) J. \quad (5.6)$$

Формула (5.6) для $\hat{J}$ имеет то преимущество, что она остается корректной, даже когда обращение θ не определено или, в частности, когда в качестве θ и ρ выбраны матрицы размера $N \times n$ (где n произвольно), а не $N \times N$.

С помощью соотношения (5.5) можно обратить матрицу $\hat{J}$ и затем воспользоваться условием (4.9), чтобы получить выражение, применимое к более общему случаю, когда матрицы θ и ρ не являются обратимыми:

$$\hat{J}^{-1} = J^{-1} (I - \theta \Lambda^{-1} \Omega^{-1} \rho^\dagger). \quad (5.7)$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть Λ, Ξ – обратимые постоянные матрицы размера $n \times n$. Пусть также θ удовлетворяет условиям (5.1), а ρ удовлетворяет сопряженным уравнениям

$$\begin{aligned} J^{-\dagger} \partial_0 (J^\dagger \rho) + \partial_1 (\rho) \Xi &= 0, \\ J^{-\dagger} \partial_2 (J^\dagger \rho) + \partial_3 (\rho) \Xi &= 0. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Определим преобразование Дарбу B согласно (4.5), где Ω задается условием (4.9).

Форма операторов L, M из соотношений (2.8) инвариантна относительно бинарного преобразования Дарбу $L \rightarrow B L B^{-1}$, $M \rightarrow B M B^{-1}$, которое полностью задается как

$$J \rightarrow (I - \theta \Omega^{-1} \Xi^{-\dagger} \rho^\dagger) J = \frac{G}{F} J,$$

где G – матрица $N \times N$, а F – скаляр, причем

$$F = |\Omega(\theta, \rho)| \quad (5.9)$$

и

$$G_{ij} = \begin{vmatrix} \Omega(\theta, \rho) & (\rho \Xi^{-1})_{\cdot j}^{\dagger} \\ \theta_{i \cdot} & \delta_{ij} \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

Здесь использованы обозначения $(\dots)_i$ для i -й строки и $(\dots)_{\cdot j}$ для j -го столбца. Аналогично для обратного преобразования имеем

$$J^{-1} \rightarrow J^{-1}(I - \theta \Lambda^{-1} \Omega^{-1} \rho^{\dagger}) = J^{-1} \frac{H}{F},$$

где H – матрица $N \times N$, заданная соотношением

$$H_{ij} = \begin{vmatrix} \Omega(\theta, \rho) & \rho_{\cdot j}^{\dagger} \\ (\theta \Lambda)_{i \cdot} & \delta_{ij} \end{vmatrix}. \quad (5.11)$$

6. $SU(N)$ -РЕДУКЦИЯ

Хорошо известно, что симметрия в паре Лакса, вообще говоря, не сохраняется при преобразовании Дарбу, но может сохраняться при бинарном преобразовании Дарбу. Это возможно благодаря дополнительным степеням свободы при выборе собственной функции и сопряженной собственной функции. Такая ситуация реализуется при построении решений J в $SU(N)$. Прежде чем показать это, заметим, что в недавней работе [8] были построены решения, аналогичные вронскианоподобным решениям, приведенным выше в следствии 2, но только для случая $SU(2)$. Это было осуществлено посредством введения симметрии $SU(2)$ в J с самого начала, однако неясно, как такие решения могут быть получены во всех других случаях.

Пусть $J \in U(N)$, так что $J^{-\dagger} = J$. Тогда пара Лакса (2.8) является самосопряженной, поэтому если выбрать $\Xi = \Lambda$, то уравнения (5.1) и (5.8) становятся идентичными и можно взять $\rho = \theta$. Отсюда следует, что матрица $\Omega(\theta, \rho)$ эрмитова.

Применяя бинарное преобразование Дарбу в этих условиях и учитывая теорему 4, получим новое решение

$$\hat{J} = (I - \theta \Omega^{-1} \Lambda^{-\dagger} \theta^{\dagger}) J \quad \text{и} \quad \hat{J}^{-1} = J^{-1} (I - \theta \Lambda^{-1} \Omega^{-1} \theta^{\dagger}),$$

где соотношение (4.9) теперь принимает вид

$$\Lambda^{\dagger} \Omega + \Omega \Lambda = \theta^{\dagger} \theta.$$

Отсюда следует, что $\hat{J}^{\dagger} = \hat{J}^{-1}$, т.е. $\hat{J} \in U(N)$.

Так как $\hat{J} \in U(N)$, то $\det \hat{J} = \pm 1$. Чтобы показать, что $\hat{J} \in SU(N)$, требуется доказать, что $\det J = 1 \implies \det \hat{J} = 1$. Если θ есть произвольная матрица $N \times n$, это сделать невозможно (быть может, за исключением трудноопределимых случаев специального выбора θ). Однако, если θ – обратимая матрица $N \times N$ и, следовательно, бинарное

преобразование Дарбу может рассматриваться как композиция двух преобразований Дарбу, то можно использовать формулу (5.5) для $\hat{J}$. Тогда видно, что

$$\det \hat{J} = (-1)^N \frac{\det \Lambda}{(\det \Lambda)} \det J,$$

т.е. выбор матрицы Λ размером $N \times N$ такой, что $\det \Lambda = (-1)^N \overline{(\det \Lambda)}$ действительно обеспечивает требуемое свойство. Другими словами, включение $\hat{J} \in SU(N)$ будет следовать из включения $J \in SU(N)$, если

$$\det \Lambda \in \begin{cases} \mathbb{R} & \text{для четных } N, \\ i\mathbb{R} & \text{для нечетных } N. \end{cases} \quad (6.1)$$

Данная частная форма бинарного преобразования Дарбу допускает итерирование для получения решений в случае n , кратных N (см. теорему 4).

СЛЕДСТВИЕ 3. Пусть Λ_i ($i = 1, \dots, m$) – обратимые постоянные матрицы $N \times N$, удовлетворяющие условию (6.1), и пусть $\Lambda = \text{diag}(\Lambda_1, \dots, \Lambda_m)$. Выберем $J \in SU(N)$ так, что уравнения (5.1) окажутся самосопряженными. Выберем также решение (матрицу $N \times mN$) θ . Пусть $\Xi = \Lambda$ и $\rho = \theta$, т.е. матрица Ω эрмитова. Тогда решения, построенные согласно теореме 4, принадлежат $SU(N)$.

7. ВЫВООДЫ

Нами показано, что после незначительной модификации преобразования Дарбу могут быть использованы для построения решений СДУЯМ. Эти решения имеют вид детерминантов типа вронскиана или граммиана. Помимо задач, в которых используется преобразование Дарбу, такие детерминанты применяются в методе Хироты (см., например, недавнюю работу [8]).

Показано также, что решения в $U(N)$ или $SU(N)$ могут быть легко построены при использовании определенным образом подобранного бинарного преобразования Дарбу.

Благодарности. Один из авторов (Дж. Ниммо) благодарит проф. Дж. Сатсума за гостеприимство, проявленное во время пребывания автора в Университете Токио, и Лондонское Королевское общество за финансовую поддержку этого визита.

Список литературы

- [1] M. F. Atiyah, R. S. Ward. Commun. Math. Phys. 1977. V. 55. P. 117–124.
- [2] A. A. Belavin, V. E. Zakharov. Phys. Lett. B. 1978. V. 73. P. 53–57.
- [3] В. Г. Дринфельд, Ю. И. Манин. Функц. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 2. С. 78–79.
- [4] Y. Brihaye, D. B. Fairlie, J. Nuyts, R. G. Yates. J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 2528–2532.
- [5] E. F. Corrigan, D. B. Fairlie, R. G. Yates, P. Goddard. Commun. Math. Phys. 1978. V. 58. P. 223–240.
- [6] N. H. Christ, E. J. Weinberg, N. K. Stanton. Phys. Rev. D. 1978. V. 18. № 3. P. 2013–2025.
- [7] K. Uhlenbeck. J. Diff. Geom. 1989. V. 30. P. 1–50.
- [8] N. Sasa, Y. Ohta, J. Matsukidaira. J. Phys. Soc. Japan. 1998. V. 67. P. 83–86.
- [9] N. V. Ustinov. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 976–985.
- [10] V. B. Matveev. Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 213–216.