Общероссийский математический портал

Ю. Сонг-Жу, К. Тода, Т. Фукуяма, Поиск интегрируемого уравнения в $(3 + 1)$ измерениях, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 305–309

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1933>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:06:58

© 2000 г.

Юу Сонг-Жу*, К. Тода*, Т. Фукуяма*

ПОИСК ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ В $(3 + 1)$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Проведена модификация операторов L и T уравнения Кортевега–де Фриза для поиска $(3 + 1)$ -мерного интегрируемого уравнения. Однако уравнение Лакса в этом случае редуцируется к $(2 + 1)$ -мерному уравнению. Предложены другие модифицированные уравнения и пары Лакса для них. Сделана попытка вывода уравнения Харри-Дима (ХД) повышенной размерности. В результате получено новое $(2 + 1)$ -мерное уравнение ХД.

1. ВВЕДЕНИЕ

Построение интегрируемых систем повышенной размерности является одной из центральных проблем при исследовании интегрируемых систем. Стандартный способ такого построения состоит в модификации оператора Лакса исходного уравнения. Уравнение Богоявленского–Шиффа (БШ) [1, 2] в потенциальной форме есть $(2 + 1)$ -мерное нелинейное уравнение

$$\phi_{xt} + \frac{1}{4}\phi_{xxxz} + \phi_x\phi_{xz} + \frac{1}{2}\phi_{xx}\phi_z = 0. \quad (1)$$

Преобразование Гарднера $\phi_x = v + \epsilon v_x + \epsilon^2 v^2$ приводит (1) к виду

$$v_t + \frac{1}{2}[v(\phi_z - \epsilon v_z)]_x + \frac{1}{4}(v^2 + v_{xx})_z = 0, \quad (2)$$

из которого следует наличие бесконечного числа законов сохранения [3]. Уравнение БШ обладает свойством Пенлеве [2, 4]. Заменой зависимой переменной $\phi = 2(\log \tau)_x$ уравнение (1) приводится к трилинейной форме

$$\mathcal{T}_x(36\mathcal{T}_x\mathcal{T}_t + \mathcal{T}_x^3\mathcal{T}_z^* + 8\mathcal{T}_x^2\mathcal{T}_x^*\mathcal{T}_z)\tau \cdot \tau \cdot \tau = 0. \quad (3)$$

Операторы $\mathcal{T}$ и $\mathcal{T}^*$ определены в работах [5, 6]. Нами получено N -солитонное решение уравнения БШ [7]. Таким образом, уравнение БШ является $(2 + 1)$ -мерным интегрируемым уравнением.

В разделе 2 мы модифицируем пару Лакса уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ) для построения $(3 + 1)$ -мерного уравнения. Затем выводятся некоторые другие модифицированные уравнения. В разделе 3 предпринята попытка вывода уравнения Харри-Дима (ХД) повышенной размерности с использованием того же метода, что и в разделе 2.

*Department of Mathematics and Physics, Ritsumeikan University, Japan

2. ПОИСК ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ В (3 + 1) ИЗМЕРЕНИЯХ: УРАВНЕНИЕ КДФ

В этом разделе мы займемся построением (3 + 1)-мерного уравнения. Дрюма [8] преобразовал оператор L уравнения КДФ от (1 + 1) к (2 + 1) измерениям и получил пару Лакса уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП). Богоявленский модифицировал оператор T уравнения КДФ и нашел пару Лакса для уравнения БШ [1]. Мы рассматриваем уравнение Лакса

$$[L, T] = 0. \quad (4)$$

Операторы L и T имеют потенциальную форму [9, 10]

$$L(x, y, z, t) = \partial_x^2 + \phi_x(x, y, z, t) + \partial_y - \lambda \equiv L'(x, y, z, t) + \partial_y, \quad (5)$$

$$T(x, y, z, t) = \partial_z L'(x, y, z, t) + T'(x, y, z, t) + \partial_t, \quad (6)$$

где

$$T'(x, y, z, t) = \frac{1}{2}\phi_z\partial_x - \frac{1}{4}\phi_{xz} - \frac{1}{4}\partial_x^{-1}\phi_{yz} + \partial_z^2 \quad (7)$$

и c – некоторая константа. Однако уравнение Лакса (4) в (3 + 1) измерениях редуцируется к уравнению в (2 + 1) измерениях

$$\phi_{xt} + \frac{1}{4}\phi_{xxxx} + \phi_x\phi_{xz} + \frac{1}{2}\phi_{xx}\phi_z + \partial_x^{-1}\phi_{zzz} = 0 \quad (8)$$

при условии, что $z = y$. Это последнее условие возникает в связи с тем, что коэффициент при ∂_z в уравнении Лакса (4) с операторами (5) и (6) должен быть равен нулю. Таким образом, попытка построения (3 + 1)-мерного уравнения не удалась, но мы получили пару Лакса уравнения (8), совпадающую с найденной Ху и Ли [11]. Нами проверено, что уравнение (8) проходит тест Пенлеве. Замена переменной $\phi = 2(\log \tau)_x$ приводит уравнение (8) к трilinearной форме

$$(36T_x^2T_t + T_x^4T_z^* + 8T_x^3T_x^*T_z + 9T_z^3)\tau \cdot \tau \cdot \tau = 0. \quad (9)$$

Уравнение (9) совпадает с уравнением, полученным в работе [6] с помощью анализа сингулярности трilinearных уравнений. Мы получили N -солитонное решение уравнения (9) прямым методом Хироты [10]. Поэтому уравнение (8) должно иметь бесконечный набор инвариантов. Имея это в виду, мы переходим к обсуждению преобразования Миуры уравнения (8). Преобразование Миуры по зависимой переменной уравнения (8) имеет вид

$$\phi_x = \psi_x^2 + \sigma\psi_{xx} + \sigma\psi_z, \quad (10)$$

где $\sigma = \pm i$. Это преобразование совпадает с потенциальным уравнением КП [12]. Можно получить модифицированное уравнение

$$\psi_{xt} + \frac{1}{4}\psi_{xxxx} + \sigma\psi_{xz}\psi_z + \left(\frac{1}{2}\psi_x + \frac{1}{2}\psi_{xx}\partial_x^{-1} - \frac{1}{4}\sigma\partial_x^{-1}\partial_z\right)((\psi_x^2)_z + \sigma\psi_{zz}) = 0. \quad (11)$$

Пара Лакса для уравнения (11) выглядит следующим образом (при этом в (11) надо произвести замену $\sigma \rightarrow -\sigma$):

$$L = \partial_x^2 + 2\sigma\psi_x\partial_x + \partial_z, \quad (12)$$

$$T = \partial_x^2\partial_z + \sigma\psi_z\partial_x^2 + 2\sigma\psi_x\partial_x\partial_z + \frac{1}{2}\partial_z^2 + \\ + \left(-2\psi_x\psi_z + \frac{3}{2}\sigma\psi_{xz} + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}(\psi_x^2)_z - \frac{1}{2}\sigma\partial_x^{-1}\psi_{zz}\right)\partial_x + \partial_t. \quad (13)$$

Преобразование Миуры потенциального уравнения КдФ [13] и уравнения БШ [3, 7] имеет вид

$$\phi_x = \psi_x^2 + \sigma\psi_{xx}. \quad (14)$$

Соответствующие модифицированные уравнения называются соответственно потенциальным модифицированным уравнением КдФ и модифицированным уравнением БШ. Последнее уравнение есть

$$\psi_{xt} + \frac{1}{4}\psi_{xxxz} + \psi_x^2\psi_{xz} + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}(\psi_x^2)_z = 0. \quad (15)$$

Преобразование Миуры для потенциального уравнения КП такое же, как и для уравнения (8), т.е. оно задается соотношением (10) [12]. В этой статье мы вывели модифицированный вариант (11) уравнения (8) из преобразования Миуры (10). Конопельченко и Дубровский получили пары Лакса модифицированных уравнений КдФ и КП [14]. Однако пары Лакса модифицированного уравнения БШ (15) и уравнения (11) ранее не обсуждались. Пара Лакса для модифицированного уравнения БШ (15) имеет вид

$$L = \partial_x^2 + 2\sigma\psi_x\partial_x, \quad (16)$$

$$T = \partial_x^2\partial_z + \sigma\psi_z\partial_x^2 + 2\sigma\psi_x\partial_x\partial_z + \\ + \left(-2\psi_x\psi_z + \frac{3}{2}\sigma\psi_{xz} + \frac{1}{2}\partial_x^{-1}(\psi_x^2)_z\right)\partial_x + \partial_t. \quad (17)$$

Таким образом, нам удалось построить пары Лакса для модифицированных уравнений повышенной размерности (уравнение БШ и уравнение (11)) [10].

3. ПОИСК ИНТЕГРИРУЕМОГО УРАВНЕНИЯ В (3 + 1) ИЗМЕРЕНИЯХ: УРАВНЕНИЕ ХД

В этом разделе мы строим уравнение повышенной размерности для уравнения ХД [15]. Соответствующая пара Лакса в случае (1 + 1) измерений имеет вид

$$L(x, t) = u^2(x, t)\partial_x^2 - \lambda, \quad (18)$$

$$T(x, t) = u(x, t)(\partial_x L(x, t)) + T'(x, t) + \partial_t, \quad (19)$$

где

$$T'(x, t) = -\frac{1}{2}u^2u_x\partial_x^2. \quad (20)$$

Конопельченко и Дубровский преобразовали только оператор L уравнения ХД от $(1+1)$ измерений к $(2+1)$ измерениям,

$$L(x, y, t) = u^2(x, y, t)\partial_x^2 - \lambda + \partial_y \equiv L'(x, y, t) + \partial_y, \quad (21)$$

$$T(x, y, t) = u(x, y, t)(\partial_x L'(x, y, t)) + T'(x, y, t) + \partial_t, \quad (22)$$

где

$$T'(x, y, t) = -\frac{1}{2}u^2 \left[u_x + 3\partial_x^{-1} \left(\frac{u_y}{u^2} \right) \right] \partial_x^2, \quad (23)$$

и получили $(2+1)$ -мерное уравнение ХД [14].

Прежде всего выведем другое $(2+1)$ -мерное уравнение ХД. Введем операторы L и T лаكсовой пары с помощью соотношений

$$L(x, z, t) = u^2(x, z, t)\partial_x^2 - \lambda, \quad (24)$$

$$T(x, z, t) = u(x, z, t)(\partial_z L(x, z, t)) + T'(x, z, t) + \partial_t. \quad (25)$$

Из уравнения Лакса (4) можно получить, что

$$\begin{aligned} T' = u^3 \left[1 + \partial_x^{-1} \left(\frac{u_z}{u^2} \right) \right] \partial_x^3 + (u^2 - u^3) \partial_x^2 \partial_z + \\ + \left[\frac{3}{2}u^2 u_x - 2u^2 u_z + \frac{3}{2}u u_z + \frac{3}{2}u^2 u_x \partial_x^{-1} \left(\frac{u_z}{u^2} \right) \right] \partial_x^2. \end{aligned} \quad (26)$$

Соответствующее новое $(2+1)$ -мерное уравнение ХД принимает вид

$$u_t + \frac{1}{4}u^3 u_{xxx} \left[1 + \partial_x^{-1} \left(\frac{u_z}{u^2} \right) \right] - \frac{1}{4}u u_x u_{xz} + \frac{1}{4}u u_z u_{xx} + \frac{1}{4}u^2 u_{xxz} = 0. \quad (27)$$

Для построения $(3+1)$ -мерного уравнения ХД, как и в разделе 2, модифицируем оба оператора L и T :

$$L(x, y, z, t) = L(x, y, z, t) + \partial_y - \lambda \equiv L'(x, y, z, t) + \partial_y, \quad (28)$$

$$T(x, y, z, t) = u(x, y, z, t)(\partial_z L'(x, y, z, t)) + T'(x, y, z, t) + \partial_t. \quad (29)$$

В этом случае уравнение Лакса (4) приводит к тому же оператору T в форме (22). Таким образом, уравнение Лакса (4) в $(3+1)$ измерениях сводится к $(2+1)$ -мерному уравнению.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой статье получена пара Лакса для нелинейных уравнений (8), (11), (15) и (27). Попытка применения описанного в статье метода для вывода $(3+1)$ -мерных уравнений в случаях уравнений КдФ и ХД к успеху не привела. В настоящее время мы работаем над изучением и модификацией пары Лакса для других уравнений, таких как уравнения Бюргерса, Буссинеска, Савады–Котеры.

Благодарности. Во время конференции NEEDS'98 нам стало известно, что в 1975 г. профессором Калоджеро было выведено уравнение, которое мы называем уравнением БШ. Мы благодарны Ф. Калоджеро, А. В. Михайлову, Дж. Хиетаринту и К. Ху. Один из авторов (К. Т.) благодарит также М. Мичальски, А. Пэйкера и их семьи.

Список литературы

- [1] *О. И. Богоявленский*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1989. Т. 53. № 2. С. 243.
- [2] *J. Schiff*. Painlevé Transcendents, Their Asymptotics and Physical Applications. New York: Plenum, 1992.
- [3] *О. И. Богоявленский*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 1. С. 123.
- [4] *О. И. Богоявленский*. Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 6. С. 1123.
- [5] *B. Grammaticos, A. Ramani, J. Hietarinta*. Phys. Lett. A. 1994. V. 190. P. 65.
- [6] *J. Hietarinta, B. Grammaticos, A. Ramani*. Integrable trilinear PDE's. solv-int/9411003.
- [7] *S. Yu, K. Toda, N. Sasa, T. Fukuyama*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 3337.
- [8] *В. С. Дрюма*. Письма в ЖЭТФ. 1974. Т. 19. С. 753.
- [9] *S. Yu, K. Toda, T. Fukuyama*. Hierarchy of higher dimensional integrable systems. solv-int/9802005.
- [10] *S. Yu, K. Toda, T. Fukuyama*. N -soliton solutions to a new $(2 + 1)$ -dimensional integrable equations. solv-int/9803012 (направлено в J. Phys.).
- [11] *X. Hu, Y. Li*. J. Grad. School USTC (Acad. Sin.) (in Chinese). 1989. V. 6. P. 8.
- [12] *B. G. Konopelchenko*. Phys. Lett. A. 1982. V. 92. P. 323.
- [13] *R. Miura*. J. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 1202.
- [14] *B. G. Konopelchenko, V. G. Dubrovsky*. Phys. Lett. A. 1984. V. 102. P. 15.
- [15] *Ф. Калоджеро, А. Дегасперис*. Спектральные преобразования и солитоны. М.: Мир, 1982.