Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Винн, Гиперболические модель Гейзенберга и сигма-модель в $(1 + 1)$ измерениях, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 310–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1934>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 12:32:12

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ МОДЕЛЬ ГЕЙЗЕНБЕРГА И СИГМА-МОДЕЛЬ В $(1 + 1)$ ИЗМЕРЕНИЯХ

Гиперболические варианты интегрируемых $(1 + 1)$ -мерных ферромагнитной модели Гейзенберга и сигма-модели обсуждаются в контексте топологических решений, классифицируемых с помощью целого числа “намоток”. Представлены некоторые явные решения, исследовано существование определенных классов таких наматывающих (winding) решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая модель Гейзенберга и нелинейная сигма-модель — хорошо известные $(1 + 1)$ -мерные интегрируемые системы, которые исследовались для случаев как компактных, так и некомпактных пространств [1–12]. Эти модели важны как с математической, так и с физической точек зрения, поскольку, например, их классическое решение есть просто гармоническое отображение на (псевдо-)римановом многообразии [6]. Известно также, что модель Гейзенберга калибровочно-эквивалентна нелинейным уравнениям Шредингера типа притяжения (в компактном случае) [8] или отталкивания (для некомпактного полевого пространства) [3], в то время как редукция некомпактной $O(2, 1)$ -сигма-модели эквивалентна уравнению Лиувилля [10]. Модель Гейзенберга описывает (например, в компактном случае) классический спин $\vec{S}$, распределенный вдоль линии, т.е. непрерывный одномерный ферромагнетик. Сигма-модели на некомпактных многообразиях используются в релятивистской теории струн [10] и в теории гравитации [12].

Ниже мы продолжаем начатое в работе [2] обсуждение решений гиперболической $(1 + 1)$ -мерной модели Гейзенберга (ГМГ) и гиперболической сигма-модели (ГСМ), классифицированных с помощью целого числа намоток. Поле $\vec{\psi}(t, x) = (\psi^1, \psi^2, \psi^3)$ принимает значения на однополостном гиперboloиде H^2 в пространстве $\mathbb{R}^{2+1}$ и удовлетворяет ограничению

$$\eta_{ab} \psi^a \psi^b = 1, \quad (1)$$

где $\eta_{ab} = \text{diag}(1, 1, -1)$. Переменная $t \in \mathbb{R}$ означает время, а $x \in X$ — пространственная переменная. В случае $X = \mathbb{R}$ на поле накладывается граничное условие $\vec{\psi}(t, \infty) =$

*Department of Mathematical Sciences, University of Durham, Durham, UK.
E-mail: A.E.Winn@durham.ac.uk

$\vec{\psi}(t, -\infty)$, а в случае $X = S^1$ поле $\vec{\psi}$ периодически по x . Если метрика на гиперboloиде (1) индуцируется тензором η_{ab} , то многообразие является симметричным пространством $SO(2, 1)/SO(1, 1)$. Его фундаментальная группа совпадает с группой целых чисел $\mathbb{Z}$. Поэтому для каждого фиксированного t функция $\vec{\psi}$ есть непрерывное отображение кольца на гиперboloид H^2 и, следовательно, имеет число намоток $N \in \mathbb{Z}$, не зависящее от t . Поле $\vec{\psi}$ можно представить в виде замкнутой струны, намотанной вокруг гиперboloида и эволюционирующей во времени.

Модель Гейзенберга получается при рассмотрении плотности гамильтониана

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \eta_{ab} \psi_x^a \psi_x^b \quad (2)$$

(индекс x означает дифференцирование по x) со скобками Пуассона

$$\{\psi^a(x), \psi^b(y)\} = -\delta(x-y) \epsilon^{abc} \eta_{cd} \psi^d(x). \quad (3)$$

Гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} \int_X \mathcal{H} dx \quad (4)$$

не является положительно-определенным из-за indefinitности метрики в поле в пространстве. Уравнения движения для этой системы заданы соотношениями

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi^a(x) = -\epsilon_{bc}^a \frac{\partial^2 \psi^b}{\partial x^2} \psi^c. \quad (5)$$

Сигма-модель определяется плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \psi_\mu^a \psi_\nu^b \eta_{ab} \quad (6)$$

и уравнениями движения

$$(\psi_{\mu\nu}^a + \psi^a(\psi_\mu^b \psi_\nu^c) \eta_{bc}) \eta^{\mu\nu} = 0, \quad (7)$$

причем здесь и далее $\eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1)$ и $x^\mu = (t, x)$. Обе модели в $(1+1)$ измерениях интегрируемы в том смысле, что для каждой модели существует подходящая пара Лакса, которую можно получить аналитическим продолжением из аналогичной системы S^2 .

2. ВОЛНЫ ТРАНСЛЯЦИЙ В ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Гиперboloид может быть параметризован полярными углами θ и ϕ так, что

$$\psi^a = (\text{ch } \theta \cos \phi, \text{ch } \theta \sin \phi, \text{sh } \theta). \quad (8)$$

Уравнение (5) в этом случае будет эквивалентно уравнениям

$$\theta_t = 2(\text{sh } \theta) \theta_x \phi_x + (\text{ch } \theta) \phi_{xx}, \quad (9a)$$

$$\phi_t = (\text{sech } \theta) \theta_{xx} + (\text{sh } \theta) \phi_x^2. \quad (9b)$$

В работе [2] было показано существование некоторых простых статических и зависящих от времени “наматывающих” (winding) решений для этой модели. Здесь мы продолжим поиск “наматывающих” решений типа волны трансляций. Введем функции $f(\xi) = \theta(t, x)$ и $g(\xi) + ct = \phi(t, x)$, где характеристическая переменная $\xi = x - vt$, v – скорость волны, а взаимодействия с внешними магнитными полями вводятся через константу c . Подстановка этих функций в (9) приводит к уравнению

$$g' = (k - v \operatorname{sh} f) \operatorname{sech}^2 f, \quad (10)$$

где k постоянно, а штрих означает дифференцирование по ξ . Отсюда, в свою очередь, получается уравнение для f :

$$f'' = (v^2 - k^2) \operatorname{th} f \operatorname{sech}^2 f + kv \operatorname{sech} f (1 - 2 \operatorname{sech}^2 f) + c \operatorname{ch} f.$$

Первый интеграл

$$f'^2 = \frac{(v^2 - k^2) \operatorname{sh}^2 f - 2kv \operatorname{sh} f + 2c \operatorname{sh} f \operatorname{ch}^2 f + 2Q \operatorname{ch}^2 f}{\operatorname{ch}^2 f},$$

где Q постоянно, может быть упрощен принятием обозначения $p = \operatorname{sh} f$, так что

$$\frac{p'^2}{2} = cp^3 + \frac{p^2}{2}(v^2 - k^2 + 2Q) + p(c - kv) + Q = P(p), \quad (11)$$

где k, v, c, Q – четыре действительных параметра. Для получения наматывающего решения надо, чтобы функция $f(\xi)$ была в некотором смысле периодична по x (в зависимости от граничных условий) и чтобы интеграл по области X от (10) был конечным и кратным 2π , т.е.

$$\Delta\phi = \int_X g' dx = \int_X \frac{k - vp}{1 + p^2} dx = 2\pi N,$$

где $N \in \mathbb{Z}$. Рассматривая случай $c = 0$, т.е. случай отсутствия внешнего поля, получаем

$$\frac{p'^2}{2} = \frac{\alpha}{2} p^2 - kvp + Q = P(p), \quad (12)$$

где $\alpha = v^2 - k^2 + 2Q$. Для наматывающего решения необходимы ограничения $\alpha < 0$ и $Q > k^2 v^2 / 2\alpha$, так что функция $P(p)$ положительна и ограничена между двумя действительными нулями. Переопределение констант и интегрирование приводят к решению

$$p(\xi) = p_0 + \frac{\sqrt{2A}}{N} \sin[N(\xi - \xi_0)], \quad (13)$$

где $A > 0$, $N (\neq 0) \in \mathbb{Z}$, p_0 и ξ_0 – постоянные. Это решение $p(\xi) = \operatorname{sh} f$ периодично с периодом 2π и представляет собой вариант волны трансляций статического решения (13) из работы [2]. То, что это наматывающее решение, можно увидеть следующим образом. Принимая $N = 1$ (обобщение для $|N| > 1$ достаточно просто) и полагая $\alpha = -1$ (тем самым исключая Q), при $\xi_0 = 0$ можно переписать решение (13) в через наши исходные константы k, v :

$$p(\xi) = -kv + \sqrt{(v^2 + 1)(k^2 - 1)} \sin \xi. \quad (14)$$

Это решение имеет период 2π и зависит от двух параметров $v \in \mathbb{R}$ и $k \geq 1$, так что:

- 1) если $v = 0$, то $\Delta\phi = 2\pi$ для любых $k \geq 1$ (ср. с пунктом 3 ниже);
- 2) если $k = 1$, то $\Delta\phi = 2\pi$ для любых v (причем для этого наматывающего решения $p \equiv -v$);
- 3) если $v \neq 0$ и $k > 1$, уравнение (10) сводится к уравнению

$$g' = \frac{1}{2} \left(\frac{v + ik}{kv + i - \gamma \sin \xi} + \frac{v - ik}{kv - i - \gamma \sin \xi} \right).$$

Интегрирование этого уравнения дает

$$g(\xi) = \operatorname{Re} \left\{ -\frac{i}{2} \left[\ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \frac{i\gamma + ik - v}{1 + ikv}}{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \frac{i\gamma - ik + v}{1 + ikv}} \right) - \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \frac{i\gamma + ik + v}{1 - ikv}}{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \frac{i\gamma - ik - v}{1 - ikv}} \right) \right] + \Lambda \right\}, \quad (15)$$

где Λ – константа интегрирования. Соотношение (15) можно записать в виде

$$g(\xi) = \operatorname{Re} \left[-i \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \frac{a}{b}}{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \frac{c}{b}} \right) + \Lambda \right], \quad (16)$$

где $a = -i\gamma - ik + v$, $b = 1 + ikv$, $c = -i\gamma + ik - v$. Увидеть, что решение в этой форме является решением наматывающего типа, не так просто. Однако можно показать, что (16) может быть переписано в виде

$$g(\xi) = \operatorname{Re} \left[-i \ln \left(\frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \Omega}{-\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \Omega^{-1}} \right) \right], \quad (17)$$

где

$$\Omega = \frac{v - ik - i\gamma}{1 + ikv} \left(= \frac{a}{b} \right).$$

Такое решение относится к типу наматывающих, в чем можно убедиться, анализируя поведение функции

$$\Xi(x) = \frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \Omega}{-\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \Omega^{-1}}$$

при изменении x от $-\pi$ до π . Действительно, функция $\Xi(x)$ есть непрерывная функция x , не обращающаяся в нуль при действительных x , и $\Xi \rightarrow -1$ при $x \rightarrow \pm\pi$, так что Ξ имеет форму петли, начинающейся и заканчивающейся в -1 . Рассматривая в комплексном Ξ -пространстве разрез от начала координат вдоль отрицательной действительной оси, мы можем показать, что Ξ однократно оборачивается вокруг начала координат, т.е. $\Delta\phi = \pm 2\pi$. Для этого функция Ξ должна пересекать положительную действительную ось один и только один раз, так что уравнение $\Xi = \bar{\Xi}$ должно иметь *единственное* действительное решение x . Это в самом деле так, поскольку равенство $\Xi = \bar{\Xi}$ предполагает, что

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \Omega}{-\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \Omega^{-1}} = \frac{\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} + \bar{\Omega}}{-\operatorname{tg} \frac{\xi}{2} - \bar{\Omega}^{-1}} \implies \operatorname{tg} \frac{\xi}{2} = \frac{\bar{\Omega}\Omega^{-1} - \Omega\bar{\Omega}^{-1}}{\Omega + \bar{\Omega}^{-1} - \Omega^{-1} - \bar{\Omega}},$$

поэтому

$$\xi = 2 \operatorname{tg}^{-1} \left[\frac{-2(v - k^2 v - \gamma k v)(1 + k^2 v^2)}{(v - k^2 v - \gamma k v)^2 + (k + \gamma + k v^2)^2 + (1 + k^2 v^2)^2} \right],$$

чем и задается единственное и действительное решение x для всех $k, v \in \mathbb{R}$. Тогда $\phi = \pm 2\pi$, т.е. решение (17) действительно есть наматывающее решение для ГМГ, причем $X = S^1$ и $c = 0$. Таким образом, (16) тоже является наматывающим решением.

Пытаясь найти более общее решение, рассмотрим другой пример и положим, что $c = 1$. В результате подстановок

$$\alpha = \frac{1}{6}(k^2 - v^2 + 2Q), \quad \Delta = \alpha^2 - \frac{1}{3}(1 - kv)$$

уравнение (11) преобразуется к виду

$$P(p) = \frac{p'^2}{2} = p^3 - 3p^2\alpha + 3(\alpha^2 - \Delta)p + Q, \quad (18)$$

включающему три действительных параметра k, v, Q . Чтобы решение уравнения (18) было волной трансляций наматывающего типа, функция $P(p)$ должна иметь три действительных нуля. При этом существует положительная ограниченная область, в которой решение может осциллировать. Этим накладывается требование $\Delta > 0$. Выясним условия такого поведения для пространств $X = S^1$ и $X = \mathbb{R}$. Чтобы упростить рассмотрение, прежде всего отметим, что если функция $P(p)$, заданная согласно (18), имеет три действительных и несовпадающих нуля $p_1 > p_2 > p_3$, то существует следующее решение, выражающееся через эллиптические функции:

$$p(\xi) = p_2 - (p_2 - p_3) \operatorname{sn}^2 \left((\xi - \xi_3) \sqrt{\frac{p_1 - p_3}{2}} \mid m \right), \quad (19)$$

где параметр $m = (p_2 - p_3)/(p_1 - p_3)$. Заметим, что данное решение есть также решение типа волны трансляций для уравнения Кортевега–де Фриза [13] и при заданных значениях p_1, p_2, p_3 форма кноидальной волны может быть установлена как с помощью таблиц эллиптических функций Якоби, так и прямым вычислением. Чтобы выяснить, является ли данное решение решением наматывающего типа, следует проинтегрировать (10) при $p(\xi)$, заданном в виде (19), что является непрстой (а может быть, и невыполнимой) задачей. Поэтому мы рассматриваем предельные случаи, когда $m = 0$ или $m = 1$. При $m = 0$ имеем $p_2 = p_3$ и у функции $P(p)$ два нуля совпадают при отсутствии положительной ограниченной области, о которой говорилось выше. Тогда решение есть $p = p_3 = \operatorname{sh} f$, и в этом случае функция

$$g' = \frac{k - vp_3}{1 + p_3^2} = N$$

постоянна, так что, если $N \in \mathbb{Z}$, восстанавливается наматывающее решение

$$\phi = Nx + t$$

из работы [2]. Другой предельный случай реализуется, когда функция $P(p)$ имеет один “двойной” и один изолированный нуль и область между ними положительна и ограничена. Если p_1 – двойной, а p_3 – изолированный нули, то эта ситуация соответствует волне трансляций в пространстве $X = \mathbb{R}$, где решение имеет минимум при $p = p_3$ (поскольку $P'(p_3) > 0$) и стремится к $p = p_1$ при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Возвращаясь теперь к решению (19) и рассматривая предел, когда параметр

$$m = \frac{p_2 - p_3}{p_1 - p_3} = 1,$$

мы видим, что точка p_2 должна совпадать с точкой p_1 , что в точности соответствует описанной ситуации. Поскольку $\operatorname{sn}(u|m) = \operatorname{sech} u$ при $m = 1$, решение (19) редуцируется к виду

$$p(\xi) = p_1 - (p_1 - p_3) \operatorname{sech}^2 \left((\xi - \xi_0) \sqrt{\frac{p_1 - p_3}{2}} \right). \quad (20)$$

Можно найти явные выражения для p_1, p_3 , удовлетворяющие уравнению (18). Оказывается, однако, что это решение не является наматывающим решением модели Гейзенберга. После подстановки (20) в (10) (например, для случая одного витка) получим

$$g' = \frac{k - v\gamma}{\gamma^2 - 1} + \Omega \left(\frac{1}{\lambda - \operatorname{ch} X} + \frac{1}{\lambda + \operatorname{ch} X} \right) + \\ + \bar{\Omega} \left(\frac{1}{\bar{\lambda} - \operatorname{ch} X} + \frac{1}{\bar{\lambda} + \operatorname{ch} X} \right), \quad (21)$$

где

$$X = (\xi - \xi_0), \quad \gamma = \frac{1}{6}(k^2 - v^2 + 2Q + 4), \quad \Omega = \frac{(v - ik)\sqrt{\gamma + i}}{2\sqrt{2}(\gamma + i)^2}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{2}{\gamma + i}}.$$

При интегрировании по области $X = \mathbb{R}$ соотношения (21) возникает расходимость, так что функция ϕ “оборачивается” бесконечное число раз вокруг гиперboloида H^2 . Таким образом, это решение не является наматывающим решением, поскольку число намоток N должно быть конечным.

Заметим далее, что такое поведение проявляется и в соответствующей плотности гамильтониана. Например, рассмотрим простой случай $p_1 = 0$, так что $Q = 0$, и для решения с одним витком $\sqrt{\Delta} = -2/3$, $v^2 = 2 + \sqrt{5}$ и $p_3 = -2$. Тогда плотность гамильтониана задается выражением

$$\mathcal{H} = \frac{[1 + 2(2 + \sqrt{5}) \operatorname{sech}^2 X]^2 - 16(\sqrt{2 + \sqrt{5}}) \operatorname{sech}^4 X \operatorname{th}^2 X}{(\sqrt{2 + \sqrt{5}})(1 + 4 \operatorname{sech}^4 X)},$$

график которого показан на рисунке. Видно, что при $X = \xi - \xi_0 \rightarrow \pm\infty$ плотность $\mathcal{H}$ не стремится к нулю, следовательно, гамильтониан бесконечен. Поскольку этот профиль плотности $\mathcal{H}$ обладает привлекательным однородным “горбом”, возможно применение некоторой перенормировочной процедуры, которая устраняла бы эту бесконечность, однако здесь мы не будем исследовать данную возможность.

В работе [2] утверждалось, что для этой модели не существует решений наматывающего типа вида волны трансляций при $X = \mathbb{R}$. Сейчас мы покажем, что это действительно так. Для существования таких решений требуется, чтобы:

- 1) решение $p(\xi)$ было действительным и ограниченным, т.е. $P(p) = p'^2 \geq 0$ (из формы (11) $P(p)$ видно, что $p(\xi)$ меняется монотонно, пока $p'(\xi)$ не обращается в нуль);
- 2) $P(p)$ имело два действительных нуля: один двойной и один простой (соответственно p_0 и p_1 , где решение $p(\xi)$ имеет минимум при $p = p_1$ и $p(x) \rightarrow p_0$ при $x \rightarrow \pm\infty$).

Вспомнив, что

$$\Delta\phi = \int_X \frac{dg}{d\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k - vp(\xi)}{1 + p^2(\xi)} dx,$$

необходимо потребовать, чтобы:

- 3) $p(\xi) \rightarrow k/v$ при $x \rightarrow \pm\infty$, где k/v есть нуль для $dg/d\xi$, так что $p_0 = k/v$ (см. пункт 2 выше);
- 4) $p'(\xi) \rightarrow M$ (M – постоянная) при $x \rightarrow \pm\infty$. На самом деле, при $X = \mathbb{R}$ из утверждений 3 и 1 следует, что $M = 0$, так что $P(p = k/v) = 0$.

Заметив, что для $p_0 = k/v$ функция $P(p)$ должна иметь форму

$$P(p) = \left(p - \frac{k}{v}\right)^2 (\alpha p - \beta) \quad (22)$$

при некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, нам достаточно применить условие 4 к уравнению (11), чтобы показать, что условия 1–4 не могут быть удовлетворены для решения $p = \operatorname{sh} f$ ГМГ. Подстановка условия $P(p = k/v) = 0$ в уравнение (11) дает

$$(k^2 + v^2)(2Qv + 2ck - k^2v) = 0. \quad (23)$$

Уравнение (23) имеет следующие решения:

$$v = \pm ik, \quad (23a)$$

$$v = c = 0, \quad (23б)$$

$$v = k = 0, \quad (23в)$$

$$k = Q = 0, \quad (23г)$$

$$Q = \frac{k}{2v}(kv - 2c), \quad (23д)$$

$$c = \frac{v}{2k}(k^2 - 2Q). \quad (23е)$$

Три первых случая могут не рассматриваться, поскольку требуются действительные ненулевые значения v . Случай (23г) приводит к функции

$$P(p) = \frac{v^2}{2} p^2,$$

что вступает в противоречие с утверждением 2 (см. выше). Подстановка решения (23д) в (11) и сравнение получившегося уравнения с (22) допускают только $v = \pm ik$. Остается рассмотреть (23е). В этом случае находим, что или $v = \pm ik$, или $k^2 = 2Q$. Из последнего выражения следует, что

$$P(p) = \frac{1}{2} \left(p - \frac{k}{v} \right)^2,$$

что вновь противоречит утверждению 2 (см. выше). Таким образом, для значений параметров, удовлетворяющих (22), исключены все перечисленные выше возможности, поэтому не существует решения $p = \operatorname{sh} f$, удовлетворяющего всем условиям 1–4. Итак, показано, что, хотя для пространства $X = S^1$ решения наматывающего типа вида волн трансляций имеются, не существует таких решений для модели ГМГ, когда X – действительное пространство $\mathbb{R}$.

3. ГИПЕРБОЛИЧЕСКАЯ СИГМА-МОДЕЛЬ

При параметризации (8) гиперboloида уравнения движения для ГСМ имеют вид

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} = -\operatorname{ch} \theta \operatorname{sh} \theta (\phi_t^2 - \phi_x^2), \quad (24)$$

$$(\phi_t \operatorname{ch}^2 \theta)_t = (\phi_x \operatorname{ch}^2 \theta)_x. \quad (25)$$

Энергия задается интегралом

$$E = \int_X \epsilon \, dx,$$

где плотность энергии

$$\epsilon = \operatorname{ch}^2 \theta (\phi_t^2 + \phi_x^2) - (\theta_t^2 + \theta_x^2). \quad (26)$$

Заметим, что это выражение содержит неопределенность, связанную с сигнатурой метрики на H^2 .

При попытке найти решение с $\phi = Nx$ оказывается, что θ зависит только от t , а в таком случае уравнения (24), (25) допускают решение

$$\operatorname{th} \theta = \operatorname{sn}[\rho(t - t_0)|m] \quad (27)$$

с $m = 1 - N^2/\rho^2$ (ρ, t_0 – константы), $\rho > |N|$. Такое решение почти идентично решению уравнений для положительно-определенного случая [2]. Поскольку $\operatorname{th}^{-1} u \rightarrow \infty$ при $u \rightarrow 1$, можно видеть, что $\theta(t) \rightarrow \infty$ при $\operatorname{sn}(\rho(t - t_0)|m) \rightarrow 1$, т.е. функция $\theta(t)$ достигает бесконечных значений за конечное время. Для этого решения энергия имеет вид

$$E = \int_X [A(\theta) - B(\theta)] \, dx,$$

где $A(\theta) = N^2 \operatorname{ch}^2 \theta$ и $B(\theta) = N^2 \operatorname{sh}^2 \theta + \rho^2$. Каждая из этих положительных функций обращается в бесконечность за конечное время (такая неустойчивость явно присутствует в решениях). Однако интересно заметить, что полная энергия является сохраняющейся (отрицательной) величиной. Такой же расчет для случая положительной определенности [2] показывает, что полная энергия положительна и ее значение действительно превышает значение нижней границы для энергии.

В поисках решений этой системы мы, как и в предыдущем разделе, обратимся к решениям вида волн трансляций для ГСМ. Уравнения движения в этом случае при $\theta = f(\xi)$, $\phi = g(\xi) + ct$ имеют вид

$$f''(v^2 - 1) = -(g'^2(v^2 - 1) - 2vcg' + c^2) \operatorname{ch} f \operatorname{sh} f, \quad (28)$$

$$g''(v^2 - 1) = -2(f'g'(v^2 - 1) - cvf') \operatorname{th} f. \quad (29)$$

Сначала опять рассмотрим случай $c = 0$, когда

$$f'' = -g'^2 \operatorname{ch} f \operatorname{sh} f, \quad (30)$$

$$g'' = -2f'g' \operatorname{th} f. \quad (31)$$

Заметив, что

$$(g' \operatorname{ch}^2 f)' = 2f'g' \operatorname{ch} f \operatorname{sh} f + g'' \operatorname{ch}^2 f = 0$$

в силу (31), получаем следующие первые интегралы для g и f :

$$g' = B \operatorname{sech}^2 f, \quad (32)$$

$$f' = \sqrt{B^2 - N^2 - B^2 \operatorname{th}^2 f}, \quad (33)$$

где B и N – константы. Аналогичное решение для (13) может быть выведено из этих уравнений. Именно

$$p(\xi) = \sqrt{\frac{B^2}{N^2} - 1} \sin[N(\xi - \xi_0)], \quad (34)$$

где снова $p = \operatorname{sh} f$, а ξ_0 – константа. Это решение – наматывающее решение для ГСМ, что может быть показано так, как это было сделано для решения (13) в рамках ГМГ. На самом деле, поскольку ГСМ релятивистски инвариантна, приведенное выше решение также может быть получено из статического состояния, обсуждавшегося в работе [2].

Если $c \neq 0$, возникают следующие уравнения:

$$P(p) = p'^2 = \frac{c^2}{(v^2 - 1)^2} \left[p^4 + p^2 \frac{6c^2 + 4Q(v^2 - 1)^2}{4c^2} + \frac{2c^2 + 4Q(v^2 - 1)^2 + (4R(v^2 - 1)^2 - cv)^2}{4c^2} \right], \quad (35)$$

$$g' = \frac{cv + 2R(v^2 - 1) + 2cvp^2}{1 + p^2}, \quad (36)$$

где R и Q – константы. Для периодичности функции $\operatorname{sh} f$ необходимо, чтобы функция $P(p)$ имела вид

$$P(p) = (p^2 - J^2)(p^2 - K^2) \quad (37)$$

при $J, K \in \mathbb{R}$, так что $P(p)$ положительна и ограничена в области между двумя нулями $p = \pm J$. Сравнение коэффициентов приводит к двум следующим уравнениям для J и K :

$$\begin{aligned} -(J^2 + K^2) &= \frac{6c^2 + 4Q(v^2 - 1)^2}{4c^2}, \\ J^2 K^2 &= \frac{2c^2 + 4Q(v^2 - 1)^2 + (4R(v^2 - 1)^2 - cv)^2}{4c^2}. \end{aligned} \quad (38)$$

Если принять, что $q = Q(v^2 - 1)^2$, $r = R(v^2 - 1)^2$, $4\rho = 4r - cv$ и (без ограничения общности) $c = 1$, то отсюда получаются условия $q < -3/2$, $2q > -(8\rho^2 + 1)$ и $1 - 2q \geq 8|\rho|$. Такие q, ρ можно найти, так что решение для $p(\xi)$ после сдвига по x можно записать через эллиптическую функцию

$$p(\xi) = J \operatorname{sn} \left[\frac{cK(\xi - \xi_0)}{v^2 - 1} \middle| m \right] \quad (39)$$

при $m = J^2/K^2$. Исследуя предельные случаи этого решения, находим, что $p(\xi) \equiv 0$ при $m = 0$. В пределе $m = 1$, если положить $K = J = p_0$, получим

$$p(\xi) = p_0 \operatorname{th} \left[\frac{cp_0(\xi - \xi_0)}{v^2 - 1} \right]. \quad (40)$$

В этом случае полином $P(p)$ положителен и ограничен между двумя двойными нулями $p = \pm p_0$, так что решение начинается с $-p_0$ при $x = -\infty$ и меняется до p_0 при $x = +\infty$, проходя только половину периода и эффективно выходя из пространства x . Поскольку это единственно возможный вариант для случая $X = \mathbb{R}$, то тем самым показано, что для этой модели с $X = \mathbb{R}$ наматывающих решений вида волн трансляций нет.

Если $P(p)$ имеет вид (37), для наматывающих решений, как обычно, требуется, чтобы $\Delta\phi = 2\pi N$. Тогда в описанном выше предельном случае $m = 1$ следует ожидать, что $\Delta\phi$ окажется вдвое меньше этой величины, т.к. пройдена только половина периода. Однако это не так, поскольку

$$g' = \frac{cv}{v^2 - 1} + \frac{2R(v^2 - 1) - cv}{2(v^2 - 1)(1 + p_0^2 \operatorname{th}^2 X)},$$

где

$$X = \pm \frac{cp_0(\xi - \xi_0)}{v^2 - 1}$$

и интеграл от этого выражения по всему пространству $\mathbb{R}$ очевидным образом расходится. Хотя эти рассуждения не могут считаться доказательством, они указывают на то, что общее решение (39) не может быть наматывающим решением.

4. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Интегрируемые системы, которые допускают топологические решения, зависящие от времени, встречаются сравнительно редко. Вероятно, единственным хорошо известным примером является случай уравнения синус-Гордон. Описанные в этой статье модели относятся к именно таким интегрируемым моделям. Нами показано, что, хотя для гиперболической модели Гейзенберга с $X = \mathbb{R}$ решений вида волн трансляций, классифицируемых с помощью целого числа намоток, не существует и такие решения едва ли существуют для ГСМ с таким же X , они существуют, если $X = S^1$. В действительности мы показали, что существуют решения для $X = S^1$, имеющие в обеих моделях одинаковую форму (но не совпадающие). Таким образом, может представлять интерес попытка осуществления какой-то формы интерполяции между решениями и, возможно, между самими моделями.

Благодарности. Эта работа выполнена при поддержке EPSRC (Исследовательская студенческая стипендия). Автор благодарен профессору Р. С. Уорду за его терпение и руководство.

Список литературы

- [1] *L. A. Takhtajan.* Phys. Lett. A. 1977. V. 64. № 2. P. 235.
- [2] *R. S. Ward, A. E. Winn.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. L261.
- [3] *A. Kundu.* Lett. Math. Phys. 1982. V. 6. P. 479.
- [4] *A. Kundu.* J. Phys. A. 1986. V. 19. P. 1303.
- [5] *D. Lambert, B. Piette.* Class. Q. Grav. 1988. V. 5. P. 307.
- [6] *J. P. Antoine, B. Piette.* J. Math. Phys. 1988. V. 29. № 7. P. 1687.
- [7] *J. H. Lee, O. K. Pashaev.* Abelian Gauge Theory and Integrable σ -Models. MIAS 97-3. Massachusetts: MIAS, 1997.
- [8] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986.
- [9] *H. Eichenherr, J. Honerkamp.* J. Math. Phys. 1981. V. 22. № 2. P. 374.
- [10] *H. J. de Vega, N. Sanchez.* Phys. Rev. D. 1993. V. 47. № 8. P. 3394.
- [11] *J. Tjon, J. Wright.* Phys. Rev. B. 1977. V. 15. № 7. P. 3470.
- [12] *P. O. Mazur.* J. Phys. A. 1982. V. 15. P. 3173; Acta Phys. Polon. B. 1983. V. 14. P. 219; Phys. Lett. A. 1984. V. 100. P. 314.
- [13] *P. F. Drazin, R. S. Johnson.* Solitons: an Introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.