Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Блажак, Обратные бигамильтоновы разделимые цепочки, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 2, 171–181

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1937>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 09:50:47

© 2000 г.

М. Блажак*

ОБРАТНЫЕ БИГАМИЛЬТОНОВЫ РАЗДЕЛИМЫЕ ЦЕПОЧКИ

Для любой заданной разделимой бигамильтоновой цепочки предложена процедура построения соответствующей обратной цепочки.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим конечномерную гамильтонову систему, заданную гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(q) + c\beta(q), \quad (1)$$

где (q_i, p_i) , $i = 1, \dots, N$, — координаты и сопряженные импульсы, а c — дополнительная координата Казимира. Предположим, что в расширенном фазовом пространстве $M \ni (q, p, c)$ ($\dim M = 2N + 1$) система (1) принадлежит бигамильтоновой цепочке

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h_0 &= 0, \\ \pi_0 \nabla h_1 &= K_1 = \pi_1 \nabla h_0, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h_r &= K_r = \pi_1 \nabla h_{r-1}, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h_N &= K_N = \pi_1 \nabla h_{N-1}, \\ 0 &= \pi_1 \nabla h_N, \end{aligned} \quad (2)$$

где $h_0 = c$, $h_1 = H$.

Матрицы

$$\pi_0 = \begin{pmatrix} \theta_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \overline{K}_1 \\ -\overline{K}_1^T & 0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

образуют пару вырожденных совместимых матриц Пуассона в пространстве M , а матрицы

$$\theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ -B^T & D \end{pmatrix} \quad (4)$$

*Physics Department, A. Mickiewicz University, Poznań, Poland

суть невырожденные совместимые матрицы Пуассона в $\overline{M} \ni (q, p)$ ($\dim \overline{M} = 2N$). В выражениях (3), (4) $\overline{K}_1 = \theta_0 \overline{\nabla} h_1$, где $\overline{\nabla}$ – градиентный оператор в $\overline{M}$, а A, B, D зависят от координат (q, p) . Заметим, что цепочка начинается с оператора Казимира с π_0 и заканчивается оператором Казимира с π_1 . Кроме того, $K_r = \pi_0 \nabla h_r = (\overline{K}_r, 0)^T$, где оператор $\overline{K}_r = \theta_0 \overline{\nabla} h_r$ (∇ – оператор градиента в M , и $\phi = \theta_1 \circ \theta_0^{-1}$) есть оператор Ниженуиса (“наследственный” оператор), но не рекурсивный, поскольку он не инвариантен вдоль любого тока, генерируемого $\overline{K}_r$. Много примеров, относящихся к рассматриваемой ситуации, приведено в работе [1].

В работах [1–3] было показано, что каждая иерархия (2) с матрицей θ_1 вида

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & B(q) \\ -B(q)^T & D(q, p) \end{pmatrix} \quad (5)$$

и, следовательно, с гамильтонианами

$$h_r(q, p, c) = h_r(q, p) + c\beta_r(q) \quad (6)$$

является разделимой. Выражение для θ_1 вида (5) – наиболее общая форма второго тензора Пуассона в случае, если переход $(q, p, c) \rightarrow (\lambda, \mu, c)$ от естественных координат к координатам разделения задается точечным преобразованием.

В этой статье будет показано, что для каждой разделимой бигамильтоновой цепочки (2)–(6) существует соответствующая обратная бигамильтонова разделимая цепочка

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h'_{N+1} &= 0, \\ \pi_0 \nabla h'_N &= K'_N = \pi_{-1} \nabla h'_{N+1}, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h'_r &= K'_r = \pi_{-1} \nabla h'_{r+1}, \\ &\dots \\ \pi_0 \nabla h'_1 &= K'_1 = \pi_{-1} \nabla h'_2, \\ 0 &= \pi_{-1} \nabla h'_1, \end{aligned} \quad (7)$$

где $h'_{N+1} = h_0 = c$,

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} \theta_{-1} & \overline{K}'_N \\ -\overline{K}'_N{}^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \theta_{-1} = \theta_0 \circ \theta_1^{-1} \circ \theta_0 = \phi^{-2} \circ \theta_1, \quad (8)$$

$\overline{K}'_N = \theta_0 \overline{\nabla} h'_N$ и

$$h'_r(q, p, c) = h_r(q, p) + c\beta'_r(q), \quad \beta'_r(q) = \frac{\beta_{r-1}(q)}{\beta_N(q)}, \quad r = 1, \dots, N. \quad (9)$$

Заметим, что соответствующие гамильтонианы и векторные поля в двух цепочках отличаются только частью, зависящей от c .

2. ПОСТРОЕНИЕ ОБРАТНЫХ БИГАМИЛЬТОНОВЫХ ЦЕПОЧЕК

Согласно результатам работ [1–3] естественная бигамильтонова цепочка (2)–(6) может быть приведена к представлению Дарбу–Ниженуиса (ДН) посредством канонического точечного преобразования переменных $\varphi: (\lambda, \mu) \rightarrow (q, p)$. Преобразование φ строится с помощью производящей функции

$$W = \sum_{i=1}^N p_i \sigma_i(\lambda)$$

из уравнений

$$q_i = \frac{\partial W}{\partial p_i}, \quad \mu_i = \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}, \quad (10)$$

где величины $q_i = \sigma_i(\lambda)$ вычисляются из соотношения

$$\beta_r(q) = (-1)^k \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r \\ j_1 < \dots < j_r}} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_r} := \rho_r(\lambda), \quad r = 1, \dots, N, \quad (11)$$

а $\beta_0(q) = 1 := \rho_0(\lambda)$, где $\rho_r(\lambda)$ – симметричные полиномы (полиномы Виета):

$$\begin{aligned} \rho_1(\lambda) &= -\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_N, \\ \rho_2(\lambda) &= \lambda_1 \lambda_2 + \lambda_1 \lambda_3 + \dots + \lambda_{N-1} \lambda_N, \\ &\dots \\ \rho_N(\lambda) &= (-1)^N \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_N. \end{aligned} \quad (12)$$

В координатах ДН цепочка (2) преобразуется в бигамильтонову цепочку Ниженуиса, для которой

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \begin{pmatrix} 0 & I & 0 \\ -I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \pi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & \frac{\partial h_1}{\partial \mu} \\ -\Lambda & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial \lambda} \\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial \lambda}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N),$$

$$h_r(\lambda, \mu, c) = - \sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho_r}{\partial \lambda_i} \frac{f_i(\lambda_i, \mu_i)}{\Delta_i(\lambda)} + c \rho_r(\lambda) = h_r(q, p, c) \varphi,$$

$\rho_r(\lambda)$ задаются уравнениями (11), (12), $\Delta_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda_i - \lambda_j)$ и $f_i(\lambda_i, \mu_i)$ – произвольные гладкие функции. Координаты ДН (λ, μ) являются координатами разделения

в том смысле, что для произвольного гамильтониана (13) можно решить соответствующее уравнение Гамильтона–Якоби [1, 3]. Заметим, что в ДН-координатах оператор Ниженуиса ϕ диагонален:

$$\phi = \begin{pmatrix} \Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Применим к бигамильтоновой цепочке в ДН-координатах каноническое преобразование

$$\psi : \quad \lambda_i = \frac{1}{\bar{\lambda}_i}, \quad \mu_i = -\bar{\lambda}_i^2 \bar{\mu}_i. \quad (15)$$

Получим

$$\begin{aligned} \rho_r(\lambda) &= \frac{\rho_{N-r}(\bar{\lambda})}{\rho_N(\bar{\lambda})} := \bar{\rho}_{N+1-r}(\bar{\lambda}), \\ \bar{\rho}_{N+1-r}(\bar{\lambda}) &= (-1)^r \sum_{\substack{j_1, \dots, j_r \\ j_1 < \dots < j_r}} \frac{1}{\bar{\lambda}_{j_1} \dots \bar{\lambda}_{j_r}}, \\ \frac{\partial \rho_r(\lambda)}{\partial \lambda_i} &= -\frac{\bar{\lambda}_i}{\rho_N(\bar{\lambda})} \frac{\partial \bar{\rho}_{N+1-r}(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}_i}, \\ \Delta_i(\lambda) &= -\frac{\Delta_i(\bar{\lambda})}{\rho_N(\bar{\lambda})} \frac{1}{\bar{\lambda}_i^{N-2}}, \end{aligned} \quad (16)$$

следовательно,

$$\bar{h}_{N+1-r}(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, c) = h_r(\lambda, \mu, c)\psi, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} \bar{h}_r(\bar{\lambda}, \bar{\mu}, c) &= -\sum_{i=1}^N \frac{\partial \rho_r(\bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}_i} \frac{\bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i)}{\Delta_i(\bar{\lambda})} + c \bar{\rho}_r(\bar{\lambda}), \\ \bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i) &= \bar{\lambda}_i^{N-1} f_i\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_i}, -\bar{\lambda}_i^2 \bar{\mu}_i\right), \end{aligned} \quad (18)$$

и $\bar{\pi}_0 = \pi_0$,

$$\begin{aligned} \bar{\pi}_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{\Lambda}^{-1} & \frac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\mu}} \\ -\bar{\Lambda}^{-1} & 0 & -\frac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\lambda}} \\ -\left(\frac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\mu}}\right)^T & \left(\frac{\partial \bar{h}_N}{\partial \bar{\lambda}}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \\ \bar{\Lambda}^{-1} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\bar{\lambda}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{\lambda}_N}\right). \end{aligned} \quad (19)$$

Можно заметить, что

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1(\lambda) &= (-1)^N \frac{1}{\lambda_1 \dots \lambda_N}, \\ &\dots \\ \bar{\rho}_{N-1}(\lambda) &= \frac{1}{\lambda_1 \lambda_2} + \frac{1}{\lambda_1 \lambda_3} + \dots + \frac{1}{\lambda_{N-1} \lambda_N}, \\ \bar{\rho}_N(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} - \dots - \frac{1}{\lambda_N}. \end{aligned} \quad (20)$$

В работах [1, 2] такая цепочка была названа обратной цепочкой Ниженуиса и была доказана ее разделимость.

В силу произвольности функций $\bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i)$ такая же обратная цепочка Ниженуиса существует для $\bar{f}_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i) = f_i(\bar{\lambda}_i, \bar{\mu}_i)$. Пусть теперь $\bar{\lambda}_i := \lambda_i$, $\bar{\mu}_i := \mu_i$. Справедливо следующее утверждение. Заданной цепочке Ниженуиса (2), где

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & \frac{\partial h_1}{\partial \mu} \\ -\Lambda & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial \lambda} \\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial \mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial \lambda}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$h_0 = c,$$

$$h_r = h_r(\lambda, \mu) + c\rho_r(\lambda), \quad r = 1, \dots, N,$$

можно, следуя описанной ниже процедуре, сопоставить обратную цепочку Ниженуиса (7), где

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda^{-1} & \frac{\partial h'_N}{\partial \mu} \\ -\Lambda^{-1} & 0 & -\frac{\partial h'_N}{\partial \lambda} \\ -\left(\frac{\partial h'_N}{\partial \mu}\right)^T & \left(\frac{\partial h'_N}{\partial \lambda}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$h'_r = h_r(\lambda, \mu) + c\bar{\rho}_r(\lambda), \quad r = 1, \dots, N,$$

$$h'_{N+1} = c.$$

Прежде всего заменим все функции $h_r(\lambda, \mu, c)$ на $h'_r(\lambda, \mu, c)$, полученные из h_r , а функции $\rho_r(\lambda)$ на $\bar{\rho}_r(\lambda) = \rho_{r-1}(\lambda)/\rho_N(\lambda)$. Затем заменим матрицу π_1 на π_{-1} , подставляя

$$\theta_{-1} = \phi^{-2}\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda^{-1} \\ -\Lambda^{-1} & 0 \end{pmatrix}$$

вместо

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda \\ -\Lambda & 0 \end{pmatrix}$$

и меняя h_1 на h'_N в последней строке и последнем столбце. В правильности обратной бигамильтоновой цепочки (7) можно также убедиться прямым вычислением.

Выполним теперь обратное преобразование $\varphi^{-1}: (q, p) \rightarrow (\lambda, \mu)$, возвращаясь к естественным координатам (q, p) . В результате получим соответствующие бигамильтонову и обратную бигамильтонову цепочки (2) и (7) в координатах (q, p, c) , причем обратная бигамильтонова цепочка строится по такому же рецепту, т.е.

$$h_r = h_r(q, p) + c\beta_r(q) \Rightarrow h'_r = h_r(q, p) + c\frac{\beta_{r-1}(q)}{\beta_N(q)},$$

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} \theta_1 & \theta_0 \bar{\nabla} h_1 \\ -(\theta_0 \bar{\nabla} h_1)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (23)$$

$$\Downarrow$$

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} \theta_0 \circ \theta_1^{-1} \circ \theta_0 & \theta_0 \bar{\nabla} h'_N \\ -(\theta_0 \bar{\nabla} h'_N)^T & 0 \end{pmatrix},$$

где величина, обратная к θ_1 в выражении (5), имеет вид

$$\theta_1^{-1} = \begin{pmatrix} (B^{-1})^T \circ D \circ B^{-1} & -(B^{-1})^T \\ B^{-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (24)$$

и

$$\theta_0 \circ \theta_1^{-1} \circ \theta_0 = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} \\ -(B^{-1})^T & -(B^{-1})^T \circ D \circ B^{-1} \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Заметим, что обе цепочки (2) и (7), заданные в естественных координатах, могут быть преобразованы к бигамильтонову виду Ниженуиса (13), причем каноническое преобразование φ может быть получено из соотношения $\rho_r(\lambda) = \beta_r(q)$, $r = 1, \dots, N$, в первом случае и из соотношения $\rho_r(\lambda) = \beta_{N-r}(q)/\beta_N(q)$, $r = 1, \dots, N$, во втором. Конечно, обе цепочки могут быть преобразованы и к виду обратной цепочки Ниженуиса, однако с точки зрения разделимости можно ограничиться рассмотрением только “прямых” цепочек Ниженуиса.

Сделаем следующее замечание. Рассмотрим множество расширенных функций

$$h_r(\lambda, \mu; a, b) = h_r(\lambda, \mu) + a\beta_r(\lambda) + b\beta'_r(\lambda). \quad (26)$$

Из этих функций могут быть одновременно построены бигамильтоновые и обратные бигамильтоновые иерархии. В первом случае величина $a := c$ трактуется как переменная Казимира, а b — как параметр, во втором случае a рассматривается в качестве параметра, а $b := c$ — в качестве переменной Казимира.

3. ПРИМЕРЫ

Чтобы проиллюстрировать сказанное выше, приведем некоторые примеры бигамильтоновых и обратных бигамильтоновых цепочек в естественных координатах (q, p, c) .

ПРИМЕР 1. *Расширение системы Хенона–Хейлеса, соответствующее одному оператору Казимира.*

Рассмотрим интегрируемый случай системы Хенона–Хейлеса, описываемой гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2.$$

Ее первое расширение с одним оператором Казимира имеет вид [4]

$$(q_1)_{tt} = -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2 + c, \quad (q_2)_{tt} = -q_1q_2 \quad (27)$$

и принадлежит бигамильтоновой цепочке

$$\begin{aligned} \pi_0 \nabla h_0 &= 0, \\ \pi_0 \nabla h_1 &= K_1 = \pi_1 \nabla h_0, \\ \pi_0 \nabla h_2 &= K_2 = \pi_1 \nabla h_1, \\ 0 &= \pi_1 \nabla h_2, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\begin{aligned}
 h_0 &= c, \\
 h_1 &= h_1(q, p) + c\beta_1(q) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + q_1^3 + \frac{1}{2}q_1q_2^2 - cq_1, \\
 h_2 &= h_2(q, p) + c\beta_2(q) = \frac{1}{2}q_2p_1p_2 - \frac{1}{2}q_1p_2^2 + \frac{1}{16}q_2^4 + \\
 &\quad + \frac{1}{4}q_1^2q_2^2 - \frac{1}{4}cq_2^2, \\
 \pi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & q_1 & \frac{1}{2}q_2 & p_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_2 & 0 & p_2 \\ -q_1 & -\frac{1}{2}q_2 & 0 & \frac{1}{2}p_2 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \\ -\frac{1}{2}q_2 & 0 & -\frac{1}{2}p_2 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Построение соответствующей обратной бигамильтоновой цепочки в соответствии с процедурой, описанной в предыдущем разделе, приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned}
 \pi_0 \nabla h'_3 &= 0, \\
 \pi_0 \nabla h'_2 &= K'_2 = \pi_{-1} \nabla h'_3, \\
 \pi_0 \nabla h'_1 &= K'_1 = \pi_{-1} \nabla h'_2, \\
 0 &= \pi_{-1} \nabla h'_1,
 \end{aligned} \tag{29}$$

где

$$\begin{aligned}
 h'_1 &= h_1(q, p) - \frac{4}{q_2^2}c, \\
 h'_2 &= h_2(q, p) + \frac{4q_1}{q_2^2}c, \\
 h'_3 &= c, \\
 \pi_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{2}{q_2} & \frac{1}{2}q_2p_2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{q_2} & -\frac{4q_1}{q_2^2} & \frac{1}{2}q_2p_1 - q_1p_2 \\ 0 & -\frac{2}{q_2} & 0 & \frac{2p_2}{q_2^2} & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_1} \\ -\frac{2}{q_2} & \frac{4q_1}{q_2^2} & -\frac{2p_2}{q_2^2} & 0 & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_2} \\ -\frac{1}{2}q_2p_2 & -\frac{1}{2}q_2p_1 + q_1p_2 & \frac{\partial h'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h'_2}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Уравнения Ньютона, связанные с естественным гамильтонианом h'_1 , имеют вид

$$(q_1)_{tt} = -3q_1^2 - \frac{1}{2}q_2^2, \quad (q_2)_{tt} = -q_1q_2 - \left(\frac{2}{q_2}\right)^3 c. \tag{30}$$

Это есть не что иное, как второе хорошо известное расширение [5] рассмотренной системы Хенона–Хейлеса с одним оператором Казимира. Обе системы (27) и (30) могут быть

переведены в цепочку Ниженуиса (13) соответствующими преобразованиями

$$\begin{aligned} q_1 &= \lambda_1 + \lambda_2, & p_1 &= \frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1}, \\ q_2 &= 2\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}, & p_2 &= \sqrt{-\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}, & p_1 &= \lambda_1 \lambda_2 \left(\frac{\lambda_1 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2 \mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right), \\ q_2 &= \frac{2}{\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2}}, & p_2 &= -\sqrt{-\lambda_1 \lambda_2} \left(\frac{\lambda_1^2 \mu_1}{\lambda_1 - \lambda_2} + \frac{\lambda_2^2 \mu_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \right). \end{aligned}$$

ПРИМЕР 2. *Расширение задачи Кеплера на плоскости с одним оператором Казимира.*

Рассмотрим классическую задачу о частице, движущейся на плоскости под воздействием потенциала Кеплера и добавочного однородного силового поля. Гамильтониан в этом случае имеет вид

$$h_1(q, p, c) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - cq_2, \quad a = \text{const}. \quad (31)$$

Существует второй независимый интеграл движения

$$h_2(q, p, c) = -\frac{1}{2}q_2 p_1^2 + \frac{1}{2}q_1 p_1 p_2 + \frac{1}{2} \frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{1}{4}cq_1^2, \quad (32)$$

который вместе с интегралом $h_0 = c$ позволяет построить бигамильтонову цепочку (28) со второй структурой Пуассона в виде

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}q_1 & p_1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}q_1 & q_2 & p_2 \\ 0 & -\frac{1}{2}q_1 & 0 & -\frac{1}{2}p_1 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \\ -\frac{1}{2}q_1 & -q_2 & \frac{1}{2}p_1 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обратная бигамильтонова цепочка (29) задана для функций

$$\begin{aligned} h'_1(q, p, c) &= \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 - \frac{a}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} - \frac{4}{q_1^2}c, \\ h'_2(q, p, c) &= -\frac{1}{2}q_2 p_1^2 + \frac{1}{2}q_1 p_1 p_2 + \frac{1}{2} \frac{aq_2}{\sqrt{q_1^2 + q_2^2}} + \frac{4q_2}{q_1^2}c, \\ h'_3 &= c \end{aligned}$$

и второго тензора Пуассона в форме

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4\frac{q_2}{q_1^3} & \frac{2}{q_1} & \frac{1}{2}q_2 p_1 - q_1 p_2 \\ 0 & 0 & \frac{2}{q_1} & 0 & \frac{1}{2}q_2 p_2 \\ \frac{4q_2}{q_1^3} & -\frac{2}{q_1} & 0 & -2\frac{p_1}{q_1^2} & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_1} \\ -\frac{2}{q_1} & 0 & 2\frac{p_1}{q_1^2} & 0 & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_2} \\ -\frac{1}{2}q_2 p_1 + q_1 p_2 & -\frac{1}{2}q_2 p_2 & \frac{\partial h'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h'_2}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 3. *Расширение системы Гарнье на плоскости с одним оператором Казимира.*

Эта система имеет гамильтониан

$$H \equiv h_1(q, p) = \frac{1}{2}p_1^2 + \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)^2 - \frac{1}{2}(\alpha_1 q_1^2 + \alpha_2 q_2^2),$$

где $\alpha_1 \neq \alpha_2$ – действительные положительные константы. Как хорошо известно, эта классическая система является разделимой в эллиптических координатах Якоби. Вторая независимая константа движения имеет вид

$$h_2(q, p) = -\frac{1}{2}\alpha_2 p_1^2 - \frac{1}{2}\alpha_1 p_2^2 + \frac{1}{4}(q_1 p_2 - q_2 p_1)^2 - \frac{1}{4}(q_1^2 + q_2^2)(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2 - 2\alpha_1 \alpha_2).$$

Известная [6] бигамильтонова цепочка (28) задается соотношениями

$$\begin{aligned} h_0 &= c, \\ h_1(q, p, c) &= h_1(q, p) + c \left[\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - (\alpha_1 + \alpha_2) \right], \\ h_2(q, p, c) &= h_2(q, p) + c \left[\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2) \right], \\ \pi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2 & -\frac{1}{2}q_1 q_2 & p_1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}q_1 q_2 & \alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2 & p_2 \\ \frac{1}{2}q_1^2 - \alpha_1 & \frac{1}{2}q_1 q_2 & 0 & \frac{1}{2}q_2 p_1 - \frac{1}{2}q_1 p_2 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_1} \\ \frac{1}{2}q_1 q_2 & \frac{1}{2}q_2^2 - \alpha_2 & \frac{1}{2}q_1 p_2 - \frac{1}{2}q_2 p_1 & 0 & -\frac{\partial h_1}{\partial q_2} \\ -p_1 & -p_2 & \frac{\partial h_1}{\partial q_1} & \frac{\partial h_1}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обратная цепочка имеет вид

$$\begin{aligned} h'_1(q, p, c) &= h_1(q, p) + c \frac{1}{\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2)}, \\ h'_2(q, p, c) &= h_2(q, p) + c \frac{\frac{1}{2}(q_1^2 + q_2^2) - (\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2)}, \\ h'_3 &= c, \\ \pi_{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2}{|B|} & \frac{\frac{1}{2}q_1 q_2}{|B|} & \frac{\partial h'_2}{\partial p_1} \\ 0 & 0 & \frac{\frac{1}{2}q_1 q_2}{|B|} & \frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2}{|B|} & \frac{\partial h'_2}{\partial p_1} \\ -\frac{\alpha_2 - \frac{1}{2}q_2^2}{|B|} & -\frac{\frac{1}{2}q_1 q_2}{|B|} & 0 & \frac{\frac{1}{2}q_1 p_2 - \frac{1}{2}q_2 p_1}{|B|} & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_1} \\ -\frac{\frac{1}{2}q_1 q_2}{|B|} & -\frac{\alpha_1 - \frac{1}{2}q_1^2}{|B|} & \frac{\frac{1}{2}q_2 p_1 - \frac{1}{2}q_1 p_2}{|B|} & 0 & -\frac{\partial h'_2}{\partial q_2} \\ -\frac{\partial h'_2}{\partial p_1} & -\frac{\partial h'_2}{\partial p_2} & \frac{\partial h'_2}{\partial q_1} & \frac{\partial h'_2}{\partial q_2} & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$|B| = \alpha_1 \alpha_2 - \frac{1}{2}(\alpha_2 q_1^2 + \alpha_1 q_2^2).$$

ПРИМЕР 4. *Расширение эллиптических разделимых потенциалов с одним оператором Казимира.*

В предыдущем примере рассмотрен частный случай целого семейства бигамильтоновых систем, разделимых введением обобщенных эллиптических координат [7]. В работах [1, 3] было доказано, что любая естественная система гамильтонианов

$$H = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(q) + \frac{1}{2} c(q, q), \quad (33)$$

допускающая в расширенном фазовом пространстве $M \ni (q, p, c)$ бигамильтонову формулировку

$$\begin{pmatrix} q \\ p \\ c \end{pmatrix}_t = \pi_0 \nabla h_1 = \pi_1 \nabla h_0, \quad (34)$$

где π_0 – каноническая структура Пуассона (13),

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 0 & A - \frac{1}{2} q \otimes q & \frac{\partial h_1}{\partial p} \\ -A + \frac{1}{2} q \otimes q & \frac{1}{2} p \otimes q - \frac{1}{2} q \otimes p & -\frac{\partial h_1}{\partial q} \\ -\left(\frac{\partial h_1}{\partial p}\right)^T & \left(\frac{\partial h_1}{\partial q}\right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (35)$$

$A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, α_i – положительные константы, $h_0 = c$, $h_1 = H + c\rho_1(\alpha)$, является разделимой в обобщенных эллиптических координатах. Эта бигамильтонова формулировка приводит к цепочке (2) коммутирующих бигамильтоновых векторных полей, причем

$$\begin{aligned} h_r(q, p, c; \alpha) &= h_r(q, p; \alpha) + c\beta_r(q; \alpha), \\ \beta_r(q; \alpha) &= \rho_r(\alpha) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{r-1} \rho_k(\alpha)(q, A^{r-k-1}q), \quad r = 1, \dots, N-1, \\ \beta_N(\alpha) &= \rho_N(\alpha) \left[1 - \frac{1}{2}(q, A^{-1}q) \right], \\ h_r(q, p; \alpha) &= \sum_{k=0}^r \rho_k(\alpha) \bar{h}_{r-k}, \quad \bar{h}_s = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i^{s-1} R_i, \\ R_i &= \sum_{i \neq j} \frac{q_i p_j - q_j p_i}{\alpha_i - \alpha_j} + p_i^2 + V_i(q), \quad \sum_{i=1}^N V_i(q) = V(q), \end{aligned} \quad (36)$$

$\{H, R_i\}_{\pi_0} = 0$, $i = 1, \dots, N$, и $\rho_r(\alpha)$ суть полиномы Виета от α . В формулах (33), (36) $(., .)$ означает скалярное произведение.

Тогда в соответствии с нашей процедурой разделимая в эллиптических координатах обратная бигамильтонова цепочка (7)–(9) для расширения потенциалов имеет вид

$$h'_r(q, p, c; \alpha) = h_r(q, p; \alpha) + c \frac{\beta_{r-1}(q; \alpha)}{\beta_N(q; \alpha)}, \quad (37)$$

$$\pi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 & B^{-1} & \frac{\partial h_N}{\partial p} \\ -B^{-1} & -B^{-1} \left(\frac{1}{2} p \otimes q - \frac{1}{2} q \otimes p \right) B^{-1} & -\frac{\partial h_N}{\partial q} \\ -\left(\frac{\partial h_N}{\partial p} \right)^T & \left(\frac{\partial h_N}{\partial p} \right)^T & 0 \end{pmatrix}, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} B &= A - \frac{1}{2} q \otimes q, \\ B^{-1} &= \frac{1}{|B|} \left[\partial_\alpha |B| + \frac{1}{2} (\partial_\alpha q \otimes \partial_\alpha q) |A| \right], \\ \partial_\alpha &= \text{diag} \left(\frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial \alpha_N} \right), \\ |B| &= |A| - \frac{1}{2} (q, \partial_\alpha |A| q). \end{aligned}$$

Заметим, что теперь естественный гамильтониан в обратной иерархии имеет вид

$$H' = h'_1(q, p, c) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N p_i^2 + V(q) + \frac{c}{\rho_N(\alpha) [1 - (q, A^{-1} q)]}. \quad (39)$$

Пример 3 относился к частному случаю рассмотренной в примере 4 системы при $N = 2$ и

$$V(q) = \frac{1}{4} (q, q)^2 - \frac{1}{2} (q, Aq).$$

Список литературы

- [1] *M. Błaszak*. Multi-Hamiltonian Theory of Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [2] *M. Błaszak*. Phys. Lett. A. 1998. V. 243. P. 25.
- [3] *M. Błaszak*. J. Math. Phys. 1998. V. 39. P. 3213.
- [4] *M. Błaszak, S. Rauch-Wojciechowski*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 1693.
- [5] *M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1992. V. 163. P. 167.
- [6] *M. Antonowicz, S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1990. V. 147. P. 455.
- [7] *S. Rauch-Wojciechowski*. Phys. Lett. A. 1991. V. 160. P. 149.