Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Марачевский, Эффект Казимира и квантовая теория поля в диэлектриках,
ТМФ, 2002, том 131, номер 1, 26–43

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1945>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 16:17:51

ЭФФЕКТ КАЗИМИРА И КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

Излагается метод континуального интегрирования в координатном пространстве применительно к эффекту Казимира. Рассмотрено несколько примеров: энергия Казимира разреженного диэлектрического шара при наличии дисперсии; энергия Казимира поляризуемой частицы, находящейся в окрестности диэлектрического шара; энергия Казимира поляризуемой частицы, находящейся внутри идеально проводящей полости клиновидной формы. Уравнение ренормгруппы для Φ^4 -модели получено в координатном пространстве новым методом, подчеркивающим взаимосвязь между методом фонового поля и энергией Казимира.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена изложению различных вопросов, связанных с эффектом Казимира [1] (обширную библиографию по эффекту Казимира см. в [2]) при нулевой температуре, с использованием методов квантовой теории поля.

В разделе 2 с помощью функционального интегрирования обосновывается формализм, первоначально предложенный Лифшицем в рамках статистической физики [3]. На основе формализма Лифшица [4] доказана эквивалентность энергии Казимира и диполь-дипольного взаимодействия для разреженных диэлектриков произвольной формы, что позволило понять физическую природу расходимостей в различных макроскопических подходах к энергии Казимира односвязных диэлектриков и помогло получить корректное выражение для энергии Казимира разреженного диэлектрического шара с произвольной дисперсией в рамках микроскопического подхода [5].

Изучение энергии Казимира немагнитного диэлектрического шара началось с работы [6]. Зависимость энергии Казимира диэлектрического шара от вводимых регуляризаций возникала при каждой попытке макроскопического подхода к проблеме, в результате чего с использованием макроскопических методов удалось корректно вычислить только вклад больших расстояний в энергию Казимира разреженного диэлектрического шара [7]. Регуляризация плохо определенных выражений остается основной проб-

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: root@VM1485.spb.edu; maraval@mail.ru

лемой различных макроскопических подходов к односвязным диэлектрикам и в настоящее время. Энергию Казимира нескольких взаимодействующих макроскопических тел (две параллельные диэлектрические пластины – классический пример Лифшица) удастся определить так, что она зависит только от расстояния между телами и дисперсий диэлектрических проницаемостей диэлектриков (см. [8], гл. 8). Для односвязных же диэлектриков, как утверждалось в работах [4] и [9], энергия Казимира должна зависеть также от минимального расстояния между атомами диэлектрика; для разреженного односвязного диэлектрика энергия Казимира равна сумме всех парных диполь-дипольных взаимодействий между его атомами. Эта энергия хорошо определена при учете минимального межатомного расстояния λ .

В разделе 3 рассмотрены три примера: энергия Казимира разреженного диэлектрического шара с дисперсией [5], энергия Казимира поляризуемой частицы, находящейся в окрестности диэлектрического шара [4], и энергия Казимира поляризуемой частицы, находящейся внутри идеально проводящей полости клиновидной формы [10] (идеально проводящий клин обобщает плоскую геометрию, первоначально рассмотренную Казимиром и Полдером в 1948 году [11]).

Рассматриваемые примеры иллюстрируют два различных режима: разреженный односвязный диэлектрик с парным диполь-дипольным взаимодействием между атомами и систему из двух разделенных неразрезанных диэлектриков, где необходимо учитывать эффекты непарного взаимодействия системы многих тел. Во втором случае вычисление энергии Казимира системы возможно благодаря наложению граничных условий на квантовые флуктуации и решению уравнений для пропагатора, удовлетворяющего этим граничным условиям. Граничные условия являются основной отличительной особенностью эффекта Казимира. Накладывая граничные условия, можно сразу вычислить сумму всех однопетлевых многочастичных взаимодействий между атомами макроскопических тел.

В разделе 4 рассмотрен пример флуктуирующего скалярного поля в Φ^4 -модели, иллюстрирующий тесную взаимосвязь между примерами, рассмотренными в разделе 3, и моделями, хорошо известными из стандартной квантовой теории поля. Энергия Казимира разреженного скалярного поля, заполняющего статический шар размерности 3, будет вычислена в полной аналогии с энергией разреженного диэлектрического шара. Уравнение ренормализационной группы получается из условия, что энергия Казимира такой системы не должна зависеть от расстояния между “атомами” скалярного поля. Основное отличие разреженного диэлектрического шара от шара скалярного поля заключается в структуре теории на малых расстояниях: в первом случае в теории есть естественная физическая шкала малых расстояний – среднее расстояние между атомами диэлектрического шара, во втором случае такой шкалы нет. Решение уравнения ренормгруппы обычно зависит от массового параметра, который отсутствует в лагранжиане исходной теории, что является прямым следствием отсутствия естественной шкалы малых расстояний.

Мы используем рациональную гауссову систему единиц, где $\hbar = c = 1$, поляризуе-

мость $\alpha(i\omega)$ определена условием $\varepsilon(i\omega) - 1 = 4\pi\rho\alpha(i\omega)$, ρ – плотность атомов, потенциал Казимира–Полдера равен $-23\alpha_1(0)\alpha_2(0)/4\pi r^7$.

2. ЭНЕРГИЯ КАЗИМИРА: КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Действие для электромагнитного поля в диэлектрической среде равно

$$S = \int d^4x \frac{1}{2}(\varepsilon(x)E^2 - B^2). \quad (1)$$

Это же действие описывает флуктуации электромагнитного поля около нулевого классического фона. В формализме континуального интеграла необходимо произвести интегрирование по всем таким флуктуациям. Действие квадратично, следовательно, континуальный интеграл вычисляется точно.

Выполним евклидов разворот. Определим дифференциальный оператор

$$L_{jm}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}) = [\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{r})\omega^2\delta_{jm} + \text{rot}_{jl}\text{rot}_{lm}]. \quad (2)$$

Диэлектрическая проницаемость на мнимой оси вещественна (см. [12], гл. 9, формула (82.15)); обозначим ее $\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{r})$. Пропагатор электромагнитного поля $D_{mk}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ в калибровке $A_0 = 0$ удовлетворяет уравнениям

$$L_{jm}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r})D_{mk}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{jk}. \quad (3)$$

Однопетлевое эффективное действие, получающееся при интегрировании по квантовым флуктуациям электромагнитного поля, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln L_{pp}(\varepsilon, \omega, \mathbf{x}). \quad (4)$$

Изменение эффективного действия и энергии основного состояния δE при инфинитезимальном изменении $\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{x})$ равно

$$\delta W = T\delta E = \frac{T}{2} \int d^3\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \delta\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{x}) \omega^2 D_{pp}(\varepsilon, \omega, \mathbf{x}, \mathbf{x}). \quad (5)$$

Данное выражение расходится из-за совпадающих аргументов в пропагаторе, однако важно понять, что энергия, которую мы собираемся вычислить, пока не была строго определена.

Мы считаем, что необходимо детально обсудить физическую картину, скрытую за основными формулами. Вообразим сначала пустое пространство, не заполненное диэлектриком. Поместим частицу с атомной поляризуемостью $\alpha(i|\omega|)$ в точку $\mathbf{x} = \mathbf{r}'$, при

Рис. 1. Затемненная область – область диэлектрика; частица расположена в точке $\mathbf{r}'$.

этом $\delta\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{x}) = 4\pi\alpha(i|\omega|) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{r}')$. Изменение энергии основного состояния при малом значении $\alpha(i|\omega|)$ равно

$$\delta E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(i|\omega|) \omega^2 D_{pp}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'). \quad (6)$$

Это выражение расходится. Однако вокруг нет других частиц и, следовательно, это не энергия взаимодействия, которая может быть измерена.

Представим теперь, что ту же самую частицу мы помещаем в окрестность диэлектрического тела с произвольной проницаемостью $\varepsilon(i|\omega|, \mathbf{r}_2)$ (см. рис. 1). Изменение энергии основного состояния в этом случае равно

$$\delta E_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(i|\omega|) \omega^2 D_{pp}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}'), \quad (7)$$

но это уравнение не является выражением для энергии взаимодействия частицы и диэлектрического тела, которая конечна и равна

$$\delta E = \delta E_2 - \delta E_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(i|\omega|) \omega^2 (D_{pp}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') - D_{pp}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'}.$$

Допустим, что проницаемость ε в точке $\mathbf{r}_1$ изменилась. Измененная система удовлетворяет уравнениям

$$L_{jm}(\varepsilon + \delta\varepsilon(i|\omega|))\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}), \omega, \mathbf{r}) \tilde{D}_{mk}(\varepsilon + \delta\varepsilon(i|\omega|))\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}), \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\delta_{jk}.$$

Определим $\delta D_{jk}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ как член, пропорциональный $\delta\varepsilon(i|\omega|)$ в разложении

$$\tilde{D}_{jk} = D_{jk} + \delta D_{jk}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + O((\delta\varepsilon(i|\omega|))^2). \quad (8)$$

Если разложить (2) по степеням константы $\delta\varepsilon(i|\omega|)$, в первом порядке получим равенство

$$\delta\varepsilon(i|\omega|)\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r})\omega^2 D_{jk}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') + L_{jm}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r})\delta D_{mk}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0. \quad (9)$$

Умножим уравнение (9) на $D_{pj}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r})$ слева, проинтегрируем по $\mathbf{r}$ и просуммируем по j . Используя свойства $D_{pj}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}) = D_{jp}(\omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}'')$, $L_{jm}^\dagger = L_{mj}$ и (3), получим

$$\delta D_{pk}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') = -D_{pj}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}_1)\omega^2\delta\varepsilon(i|\omega|)D_{jk}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}'). \quad (10)$$

Теперь рассмотрим изменение ε внутри некоторого объема. В вакууме D_{mk} удовлетворяет уравнению (3) с $\varepsilon = 1$ во всем пространстве. Вставим диэлектрик произвольной формы с постоянной, не зависящей от пространственных координат диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(i|\omega|)$ внутрь некоторого объема (см. рис. 1), так что $\delta\varepsilon(i|\omega|) = \varepsilon(i|\omega|) - 1$ везде внутри этого объема. В этом случае δ -функция в уравнении (9) должна быть заменена функцией, равной нулю вне диэлектрика и единице внутри него. Обозначая $D_{pk}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') \equiv D_{pk}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}')$, получаем формулу

$$\begin{aligned} D_{pk}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') - D_{pk}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') = \\ = - \int d^3\mathbf{r}_2 D_{pj}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}_2)\omega^2(\varepsilon(i|\omega|) - 1)D_{jk}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}') + O((\varepsilon(i|\omega|) - 1)^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Рис. 1 иллюстрирует уравнение (11). Когда $\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'$, энергия Казимира взаимодействующих поляризуемой частицы в точке $\mathbf{r}'$ и диэлектрика дается выражением

$$\begin{aligned} E = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha_1(i|\omega|, \mathbf{r}')\omega^2 (D_{pp}(\varepsilon, \omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') - D_{pp}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}'', \mathbf{r}')) \Big|_{\mathbf{r}'' \rightarrow \mathbf{r}'} = \\ = \int d^3\mathbf{r}_2 \rho(\mathbf{r}_2)U(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) + O(\alpha^3), \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$U(\mathbf{r}', \mathbf{r}_2) = -4\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \omega^4 \alpha_1(i|\omega|, \mathbf{r}')\alpha_2(i|\omega|, \mathbf{r}_2) (D_{pj}^{(0)}(\omega, \mathbf{r}', \mathbf{r}_2))^2 d\omega. \quad (13)$$

Рис. 2. Вычисление энергии шара.

Потенциал (13) также может быть получен из диполь-дипольного взаимодействия двух нейтральных атомов (см. [13], гл. 9, формула (85.17)). Если обозначить $r = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'|$, то

$$U(r) = -\frac{1}{\pi r^2} \int_0^{+\infty} \omega^4 \alpha_1(i\omega) \alpha_2(i\omega) e^{-2\omega r} \left[1 + \frac{2}{\omega r} + \frac{5}{(\omega r)^2} + \frac{6}{(\omega r)^3} + \frac{3}{(\omega r)^4} \right] d\omega. \quad (14)$$

Формула (14) была получена в работе [14] с использованием квантовой статистической механики (см. также детальное обсуждение в [15]). Если обозначить атомную частоту поглощения ω_0 , то $\lambda_0 \sim 1/\omega_0 \sim 50$ нм – характерная длина волны поглощения в спектрах взаимодействующих атомов. На расстояниях $r \gg \lambda_0$ область частот $\omega \lesssim 1/r \ll \omega_0$ дает основной вклад в (14). В этой частотной области согласно общим свойствам диэлектрической проницаемости на мнимой оси можно использовать $\alpha_1(0)$ и $\alpha_2(0)$ вместо $\alpha_1(i\omega)$ и $\alpha_2(i\omega)$, так что (14) для $r \gg \lambda_0$ дает потенциал Казимира–Полдера

$$U(r)|_{r \gg \lambda_0} = -\frac{23}{4\pi} \frac{\alpha_1(0) \alpha_2(0)}{r^7}. \quad (15)$$

Для $\lambda_{\text{ат}} \ll r \ll \lambda_0$ ($\lambda_{\text{ат}}$ – атомный размер) частоты $\omega \sim \omega_0$ дают основной вклад в (14), который в этом случае будет определяться последним членом уравнения:

$$U(r)|_{r \ll \lambda_0} = -\frac{3}{\pi r^6} \int_0^{+\infty} d\omega \alpha_1(i\omega) \alpha_2(i\omega). \quad (16)$$

3. ПРИМЕРЫ

3.1. Энергия Казимира разреженного диэлектрического шара с дисперсией. Рассмотрим диэлектрический немагнитный шар радиуса a с проницаемостью ε , находящийся в вакууме. Шар разрежен, т.е. $\varepsilon - 1 \ll 1$, и энергия вычисляется в порядке

$(\varepsilon(i\omega) - 1)^2$, низшем порядке, дающем энергию взаимодействия между атомами шара, которая в этом порядке равна энергии парного диполь-дипольного взаимодействия всех атомов, составляющих шар [5]. Вычисление иллюстрируется рис. 2. Допустим, что атом с атомной поляризуемостью $\alpha(i\omega)$ расположен в точке B . Чтобы вычислить энергию шара, нужно учесть взаимодействие атома, находящегося в точке B , с атомами, удаленными от точки B на расстояния, большие чем межатомное расстояние λ , через потенциал (14), проинтегрировать по всем атомам B внутри шара и умножить на $1/2$. Предполагая однородность шара (из чего следует условие, что плотность атомов ρ не зависит от расположения точки внутри шара и $\alpha_1(i\omega) = \alpha_2(i\omega) = \alpha(i\omega)$), получаем, что энергия Казимира равна

$$E = \frac{\rho^2}{2} \left(\int_0^{a-\lambda} dp 4\pi p^2 \int_\lambda^{a-p} dr 4\pi r^2 U(r) + \right. \\ \left. + \int_0^{a-\lambda} dp 4\pi p^2 \int_{a-p}^{a+p} dr 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{2p} - \frac{p^2 - a^2}{2pr} \right) U(r) + \right. \\ \left. + \int_{a-\lambda}^a dp 4\pi p^2 \int_\lambda^{a+p} dr 2\pi r^2 \left(1 - \frac{r}{2p} - \frac{p^2 - a^2}{2pr} \right) U(r) \right). \quad (17)$$

Затемненные области I и II на рис. 2а, разделенные штриховой линией, изображают области интегрирования в первом и втором интегралах уравнения (17), соответственно. Затемненная область на рис. 2б – область интегрирования в третьем интеграле в (17). Часть сферы радиуса r , находящаяся внутри диэлектрического шара, обозначена пунктирной линией. Ее площадь равна $2\pi r^2 (1 - (p^2 + r^2 - a^2)/(2pr))$.

Проводя вычисления, можно представить энергию Казимира атомов диэлектрического шара в виде

$$E = -\rho^2 \frac{\pi}{48} \int_0^{+\infty} d\omega \alpha^2(i\omega) \left(\frac{a^3}{\lambda^3} e^{-2\omega\lambda} (128 + 256\omega\lambda + 128\omega^2\lambda^2 + 64\omega^3\lambda^3) - \right. \\ \left. - \frac{a^2}{\lambda^2} (e^{-2\omega\lambda} (144 + 288\omega\lambda + 120\omega^2\lambda^2 + 48\omega^3\lambda^3) - 96\omega^2\lambda^2 E_1(2\omega\lambda)) + \right. \\ \left. + (e^{-2\omega\lambda} (41 + 34\omega\lambda + 14\omega^2\lambda^2 + 4\omega^3\lambda^3) + 24E_1(2\omega\lambda)) + \right. \\ \left. + (e^{-4\omega a} (-21 + 12\omega a) - E_1(4\omega a)(24 + 96\omega^2 a^2)) \right), \quad (18)$$

где $E_1(x) = \int_1^{+\infty} (e^{-tx}/t) dt$. Эта энергия конечна и имеет физический смысл только в том случае, если учтено конечное минимальное расстояние между атомами $\lambda > 0$. В гипотетическом нефизическом пределе $\lambda \rightarrow 0$ главный член в (18) дается выражением

$$-\rho^2 \frac{2V}{\lambda^3} \int_0^{+\infty} d\omega \alpha^2(i\omega), \quad (19)$$

где V – объем шара, так что в пределе $\lambda \rightarrow 0$ энергия Казимира расходится для каждой модели атомной поляризуемости $\alpha(i\omega)$. Член (19) может быть также получен с использованием (16) для каждого односвязного диэлектрика.

Формула (18) окончательно решает проблему энергии Казимира разреженного диэлектрического шара. Интерес к данному вопросу сильно возрос после ряда статей Швингера [16], в которых он пытался объяснить солюлюминесценцию пузырей в воде [17] динамическим эффектом Казимира.

В предыдущем разделе мы объяснили, почему члены первого порядка не должны учитываться при вычислении энергии Казимира диэлектрического шара. Условие сохранения числа атомов, составляющих диэлектрический шар, дает другое возможное объяснение того, почему члены первого порядка не оказывают влияния на физику процесса. Это условие может быть записано в виде

$$(\varepsilon - 1)V = \text{const}, \quad (20)$$

откуда следует, что члены первого порядка не меняют своего значения во время расширения или сжатия шара, поэтому они могут быть вычтены из энергии.

Некоторое время ошибочно считалось, что энергия Казимира разреженного диэлектрического шара равна

$$E_{\text{ld}} = \frac{23}{1536\pi a}(\varepsilon - 1)^2. \quad (21)$$

В нашем подходе выражение (21) можно получить из части членов выражения (18), причем только тех, которые не зависят от λ . С точки зрения физики в выражении (18) необходимо учитывать все члены. Согласно общим свойствам, которым удовлетворяет диэлектрическая проницаемость на мнимой оси, можно записать главный вклад последних двух слагаемых уравнения (18) как

$$\begin{aligned} & -\rho^2 \alpha^2(0) \frac{\pi}{48} \int_0^{+\infty} d\omega (e^{-4\omega a}(-21 + 12\omega a) - E_1(4\omega a)(24 + 96\omega^2 a^2)) = \\ & = \rho^2 \alpha^2(0) \frac{23}{96} \frac{\pi}{a} = \frac{23}{1536\pi a}(\varepsilon - 1)^2 = E_{\text{ld}} \end{aligned} \quad (22)$$

(его дает частотная область $\omega \ll \omega_0$, ω_0 – характерная частота поглощения материалов, $\omega_0 a \gg 1$).

Только тогда, когда энергия определяется, как в уравнениях (17) и (18), она равна сумме парных диполь-дипольных взаимодействий между атомами шара. Потенциал Казимира–Полдера (15), являющийся пределом выражения (14) для больших расстояний $r \gg 1/\omega_0$ (ω_0 – характерная частота поглощения атомов), был использован вместо диполь-дипольного потенциала (14) в работе [18], где впервые было получено выражение (21) и удалось корректно учесть вклад в энергию больших расстояний. Однако поскольку вычисления в [18] проводились в пренебрежении дисперсией, вклад в энергию малых расстояний ($r \lesssim 1/\omega_0$) между атомами шара получен не был. Более того, использование в [18] размерной регуляризации скрыло расходимости, которые неизбежно

проявились бы в выражении для энергии при интегрировании по малым расстояниям между атомами шара размерности 3, так как минимальное расстояние между атомами шара не учитывалось.

При учете дисперсии энергия Казимира двух нейтральных атомов совпадает с энергией их диполь-дипольного взаимодействия. Когда атом расположен вне разреженного диэлектрика произвольной формы, энергия Казимира равна сумме диполь-дипольных взаимодействий между атомом и атомами диэлектрика (см. раздел 2 данной статьи). Для двух параллельных плоских разреженных диэлектрических пластин энергия Казимира равна сумме парных диполь-дипольных взаимодействий между атомами пластин. Для разреженного диэлектрического шара сумма парных диполь-дипольных взаимодействий между атомами шара дается формулой (18), а не формулой (21).

Следует подчеркнуть, что выражение (21) имело большое значение для развития теории эффекта Казимира в односвязных диэлектриках, так как было получено с помощью различных подходов, включавших как теоретико-полевые вычисления [7], так и интегрирование потенциала Казимира–Полдера в d -мерном пространстве [18], обсуждавшееся выше. Однако теоретико-полевые вычисления [7] дали возможность корректно учесть только вклад больших расстояний в энергию Казимира диэлектрического шара, т.е. E_{ld} . И этот вклад совпал с результатом, полученным при суммировании потенциала Казимира–Полдера (15). Таким образом была доказана эквивалентность вкладов больших расстояний в энергию Казимира разреженного диэлектрического шара, полученных в микроскопическом и макроскопических подходах. Важно отметить, что до настоящего времени с помощью теоретико-полевых методов не был получен вклад малых расстояний в энергию Казимира односвязных диэлектриков. Причина проста: эти методы были развиты для диэлектриков, разделенных макроскопическим расстоянием, и их приложение к односвязным диэлектрикам без каких-либо изменений неизбежно приводит к различного типа расходимостям в каждом теоретико-полевом вычислении энергии Казимира, что свидетельствует о необходимости изменения макроскопических подходов для удовлетворительного учета вклада малых расстояний в энергию Казимира односвязных диэлектриков.

До появления наших работ [4], [5] считалось, что сила Казимира, действующая на диэлектрический шар – сила отталкивания. Причина этой ошибки детально обсуждалась в [5]. Поэтому естественно привести доказательство того, что сила Казимира, действующая на диэлектрический шар – сила притяжения.

Для удобства введем обозначения: $N \equiv a/\lambda$, $p \equiv \omega\lambda$. Тогда уравнение (18) может быть переписано в виде

$$E = -\frac{\rho^2}{\lambda} \int_0^{+\infty} dp \alpha^2 \left(i \frac{p}{\lambda} \right) f(N, p). \quad (23)$$

Функция $f(N, p) > 0$ для $N > 1/2$, $p > 0$. Шар расширяется или сжимается однородно, т.е.

$$N = \text{const}. \quad (24)$$

Сохранение числа атомов внутри шара накладывает условие

$$\rho \frac{4\pi a^3}{3} = \text{const.} \quad (25)$$

Удобно использовать соотношения Крамерса–Кронига в виде

$$\alpha(i\omega) = \int_0^{+\infty} dx \frac{xg(x)}{x^2 + \omega^2}, \quad (26)$$

где всегда выполняется условие $g(x) > 0$ [12]. Используя (23)–(26), получаем, что сила Казимира, действующая на единичную поверхность шара, имеет вид

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial E}{\partial a} = \\ &= -\frac{\rho^2}{4\pi a^3} \int_0^{+\infty} d\omega \int_0^{+\infty} dx \frac{x(7x^2 + 3\omega^2)g(x)}{(x^2 + \omega^2)^2} \alpha(i\omega) f(N, \omega\lambda) < 0. \end{aligned} \quad (27)$$

$F < 0$, так как все подынтегральные функции положительны. Таким образом, сила Казимира является силой притяжения для каждой модели атомной поляризуемости, совместимой с общими причинно-следственными принципами.

3.2. Поляризуемая частица в окрестности диэлектрического шара. Допустим, что частица с атомной поляризуемостью $\alpha(i\omega)$ расположена на расстоянии r от центра диэлектрического шара радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε . Энергия Казимира этой системы может быть вычислена с помощью равенства (2), где уравнения для пропагатора (3) должны быть решены с классическими граничными условиями, наложенными при $r = a$.

В пространстве Минковского уравнения (3) для пропагатора записываются в виде

$$[\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) \omega^2 \delta_{jm} - \text{rot}_{jl} \text{rot}_{lm}] D_{mk}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta_{jk}. \quad (28)$$

Из классических граничных условий (вытекающих из структуры уравнений (28)) следует, что величины $\mathbf{E}_\perp, \varepsilon E_r, B_r, \mathbf{B}_\perp$ должны быть непрерывны при $r = a$; в нашем случае эти условия должны быть наложены на каждый аргумент функций

$$\begin{aligned} \langle E_i(\mathbf{r}) E_j(\mathbf{r}') \rangle_\omega &= -\omega^2 D_{ij}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega), \\ \langle B_i(\mathbf{r}) B_j(\mathbf{r}') \rangle_\omega &= -\text{rot}_{\mathbf{r} i m} \text{rot}_{\mathbf{r}' j k} D_{mk}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega). \end{aligned} \quad (29)$$

Решение этой системы может быть записано, как в работе [19] (δ -функции опущены, так как важен предел $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}'$):

$$\begin{aligned} D_{jk}(\varepsilon, \mathbf{r}, \mathbf{r}', \omega) &= -\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (F_l(r, r') X_{jlm}(\Omega) X_{klm}^*(\Omega') + \\ &+ \frac{1}{\varepsilon \omega^2} \text{rot}_{\mathbf{r} i m} \text{rot}_{\mathbf{r}' j k} G_l(r, r') X_{jlm}(\Omega) X_{klm}^*(\Omega')). \end{aligned} \quad (30)$$

Здесь мы использовали следующие обозначения ($X_{ilm}(\Omega)$ – векторные сферические гармоники; $j_l(r)$, $h_l^{(1)}(r)$ – сферические функции Бесселя, $\bar{e}_l(r) = rh_l^{(1)}(r)$, $\bar{s}_l(r) = rj_l(r)$ – функции Риккати–Бесселя [20]):

$$X_{ilm}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}(\mathbf{L}Y_{lm}(\Omega))_i, \quad (31)$$

$$F_l, G_l = \begin{cases} ikj_l(kr_<)[h_l^{(1)}(kr_>) - A_{F,G}j_l(kr_>)], & k = |\omega|\sqrt{\varepsilon}, \quad r, r' < a, \\ i|\omega|h_l^{(1)}(|\omega|r_>)[j_l(|\omega|r_<) - B_{F,G}h_l^{(1)}(|\omega|r_<)], & r, r' > a, \end{cases} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} A_F &= \frac{\bar{e}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l'(|\omega|a) - \sqrt{\varepsilon}\bar{e}_l(|\omega|a)\bar{e}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)}{\Delta_l}, \\ B_F &= \frac{\bar{s}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{s}_l'(|\omega|a) - \sqrt{\varepsilon}\bar{s}_l(|\omega|a)\bar{s}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)}{\Delta_l}, \\ A_G &= \frac{\sqrt{\varepsilon}\bar{e}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l'(|\omega|a) - \bar{e}_l(|\omega|a)\bar{e}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)}{\bar{\Delta}_l}, \\ B_G &= \frac{\sqrt{\varepsilon}\bar{s}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{s}_l'(|\omega|a) - \bar{s}_l(|\omega|a)\bar{s}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)}{\bar{\Delta}_l}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \bar{s}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l'(|\omega|a) - \sqrt{\varepsilon}\bar{s}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l(|\omega|a), \\ \bar{\Delta}_l &= \sqrt{\varepsilon}\bar{s}_l(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l'(|\omega|a) - \bar{s}_l'(|\omega|\sqrt{\varepsilon}a)\bar{e}_l(|\omega|a). \end{aligned} \quad (34)$$

Когда точечная частица с атомной поляризуемостью $\alpha(i\omega)$ помещается в точку $\mathbf{r}$, $|\mathbf{r}| > a$, изменение энергии определяется уравнением (2). Энергия Казимира такой конфигурации равна

$$\begin{aligned} E(r, a) &= i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(\omega) \omega^2 (D_{pp}(\varepsilon, \mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) - D_{pp}(\varepsilon = 1, \mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)) \Big|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} = \\ &= -i \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \alpha(\omega) \sum_{l=1}^{\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \left(\omega^2 \bar{F}_l(r, r') + l(l+1) \frac{\bar{G}_l(r, r')}{rr'} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{rr'} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r'} (r' \bar{G}_l(r, r')) \right) \Big|_{r' \rightarrow r}, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\bar{F}_l, \bar{G}_l = \begin{cases} -iA_{F,G}kj_l(kr_<)j_l(kr_>), & k = |\omega|\sqrt{\varepsilon}, \quad r, r' < a, \\ -iB_{F,G}|\omega|h_l^{(1)}(|\omega|r_>)h_l^{(1)}(|\omega|r_<), & r, r' > a. \end{cases} \quad (36)$$

Выполним разворот Вика:

$$\omega \rightarrow i\omega, \quad \bar{s}_l(x) \rightarrow s_l(x) = \sqrt{\frac{\pi x}{2}} I_{l+1/2}(x), \quad \bar{e}_l(x) \rightarrow e_l(x) = \sqrt{\frac{2x}{\pi}} K_{l+1/2}(x). \quad (37)$$

Пусть $x = \omega a$. Тогда энергия Казимира этой системы может быть выражена через функции Риккати–Бесселя [4]:

$$E(r, a) = \frac{2}{a} \int_0^{+\infty} dx \alpha(ix/a) \sum_{l=1}^{+\infty} \frac{2l+1}{4\pi} \left[\frac{x}{ar^2} e_l^2(xr/a) B_F - \right. \\ \left. - \frac{l(l+1)a}{r^4 x} e_l^2(xr/a) B_G - \frac{x}{r^2 a} (e_l'(xr/a))^2 B_G \right]. \quad (38)$$

Это выражение может быть упрощено в пределе $\varepsilon - 1 \ll 1$, когда выполнено условие $r - a \gg 1/\omega_0$. Для таких расстояний можно пренебречь дисперсией атомной поляризуемости частицы и диэлектрической проницаемости шара. При $\varepsilon \rightarrow 1$ функции B_F и B_G пропорциональны $(\varepsilon - 1)$ в низшем порядке. Для дальнейших вычислений полезна следующая теорема сложения [21], [22]:

$$u(p, k, x, \rho) \equiv \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) s_l(xp) e_l(xk) P_l(\cos \theta) = \frac{x e^{-x\rho} p k}{\rho}, \quad (39) \\ \rho = \sqrt{p^2 + k^2 - 2pk \cos \theta}.$$

Используя ее, получаем тождество (для определенности считаем $k > p > 0$):

$$\int dx \sum_{l=0}^{+\infty} (2l+1) f(x) s_l(xp) e_l(xk) s_l(xp) e_l(xk) = \\ = \frac{1}{2} \int_{k-p}^{k+p} \frac{d\rho \rho}{pk} \int dx f(x) u(p, k, x, \rho) u(p, k, x, \rho), \quad (40)$$

где были использованы равенства

$$\int_{-1}^1 d(\cos \theta) P_l(\cos \theta) P_m(\cos \theta) = \frac{2}{2l+1} \delta_{lm}, \\ \int_{-1}^{+1} d(\cos \theta) \dots = \int_{k-p}^{k+p} \frac{d\rho \rho}{pk} \dots \quad (41)$$

Далее в выражении для $E(r, a)$ нужно учитывать только члены первого порядка по $(\varepsilon - 1)$. Положим $k = r/a$, $p = 1$ и используем тождество (40) и его очевидные обобщения в (38) для вычисления $E(r, a)|_{\text{dilute}}$. Окончательно для разреженного диэлектрического шара и поляризуемой частицы в его окрестности находим выражение для энергии Казимира:

$$E(r, a)|_{\text{dilute}} = -\frac{23}{15} \alpha(0) \frac{\varepsilon(0) - 1}{4\pi} \frac{a^3 (5r^2 + a^2)}{r(r+a)^4 (r-a)^4}, \quad r > a. \quad (42)$$

Подставляя $\varepsilon - 1 = 4\pi\rho\alpha_{\text{ball}}$, в пределе $r \gg a$ получаем

$$E(r, a)|_{r \gg a, \text{dilute}} = \rho \left(\frac{4\pi a^3}{3} \right) \frac{-23\alpha(0)\alpha_{\text{ball}}(0)}{4\pi r^7} = \rho \left(\frac{4\pi a^3}{3} \right) E_{\text{CP}}. \quad (43)$$

Таким образом, потенциал Казимира–Полдера E_{CP} для двух взаимодействующих поляризуемых частиц может быть получен напрямую из (43).

3.3. Поляризуемая частица внутри идеально проводящего клина. Рассмотрим другой типичный предел – поляризуемую частицу с поляризуемостью $\alpha(i\omega)$, расположенную в точке с цилиндрическими координатами (r, θ, z) внутри идеально проводящей клиновидной полости, стенки которой имеют координаты $(r, 0, z)$ и (r, α, z) , $0 < \theta < \alpha$ [10]. Данная система может быть описана набором уравнений (28) с $\varepsilon = 1$ вне стенок полости и идеальными граничными условиями, наложенными на каждый пространственный аргумент функций $D_{ij}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')$ на стенках. В цилиндрических координатах первое из граничных условий

$$\mathbf{E}_{\parallel}|_{\partial M} = 0, \quad \mathbf{B}_{\perp}|_{\partial M} = 0 \quad (44)$$

записывается как

$$D_{rr}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial M} = 0, \quad D_{zz}(\varepsilon = 1, \omega, \mathbf{r}, \mathbf{r}')|_{\partial M} = 0. \quad (45)$$

На расстояниях $r\theta, r(\alpha - \theta) \gg \lambda_0 \sim 50$ нм можно пренебречь дисперсией атомной поляризуемости частицы и стенок клина и считать $\alpha = \alpha(0)$. Идеально проводящие стенки клина могут рассматриваться как предельный случай стенок с постоянной электрической проницаемостью $\varepsilon(0)$ при $\varepsilon(0) \rightarrow \infty$.

Обозначим аксиальный волновой вектор k ; введем поперечный волновой вектор q ,

$$q^2 = \omega^2 - k^2. \quad (46)$$

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает оператор

$$\mathcal{L} = \frac{2}{\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} \sum_{m=0}^{\infty}', \quad (47)$$

где штрих над знаком суммы означает, что член $m = 0$ берется с половинным весом. Если обозначить через p отношение

$$p = \frac{\pi}{\alpha}, \quad (48)$$

то, решая уравнения для пропагатора, находим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{zz}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) &= \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} q^2 J_{mp}(qr_{<}) H_{mp}^{(1)}(qr_{>}) \sin(mp\theta) \sin(mp\theta') \right], \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{\theta\theta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) &= \\ &= \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} \left(\omega^2 J'_{mp}(qr_{<}) H_{mp}^{(1)'}(qr_{>}) + \frac{k^2 m^2 p^2}{q^2 r r'} J_{mp}(qr_{<}) H_{mp}^{(1)}(qr_{>}) \right) \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos(mp\theta) \cos(mp\theta') \right], \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{rr}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = \\
= \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} \left(\frac{\omega^2 m^2 p^2}{q^2 r r'} J_{mp}(qr<) H_{mp}^{(1)}(qr>) + k^2 J'_{mp}(qr<) H_{mp}^{(1)'}(qr>) \right) \times \right. \\
\left. \times \sin(mp\theta) \sin(mp\theta') \right]. \quad (51)
\end{aligned}$$

Здесь $(r - r')$ и $(\theta - \theta')$ – произвольные величины.

Как обычно, нужно не забыть вычестть контактные члены, соответствующие неограниченному вакууму (т.е. при отсутствии клина). Для неограниченного вакуума (будем отмечать его индексом “0”) в решения уравнений входят только целые степени функций Бесселя:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{zz}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = \\
= \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} q^2 J_m(qr<) H_m^{(1)}(qr>) \cos m(\theta - \theta') \right], \quad (52)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{\theta\theta}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} \left(\omega^2 J'_m(qr<) H_m^{(1)'}(qr>) + \right. \right. \\
\left. \left. + \frac{k^2 m^2}{q^2 r r'} J_m(qr<) H_m^{(1)}(qr>) \right) \cos m(\theta - \theta') \right], \quad (53)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{rr}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = \frac{\alpha}{2\pi} \mathcal{L} \left[\frac{i\pi}{2} \left(\frac{\omega^2 m^2}{q^2 r r'} J_m(qr<) H_m^{(1)}(qr>) + \right. \right. \\
\left. \left. + k^2 J'_m(qr<) H_m^{(1)'}(qr>) \right) \cos m(\theta - \theta') \right]. \quad (54)
\end{aligned}$$

Дальнейшие вычисления проводятся следующим образом.

1. Делаем комплексный поворот частоты $\omega \rightarrow i\omega$, посредством чего получаем

$$q = \sqrt{\omega^2 - k^2} \rightarrow \sqrt{-(\omega^2 + k^2)} \equiv i\rho, \quad (55)$$

тогда ρ – радиус в плоскости ωk . Если обозначить через φ полярный угол в этой плоскости, то элемент площади $d\omega dk$ равен $\rho d\rho d\varphi$. Из-за симметрии подынтегрального выражения относительно начала координат можно провести интегрирование по ω и k от 0 до ∞ и умножить все на 4. Это соответствует φ , проинтегрированному от 0 до $\pi/2$.

2. Модифицированные функции Бесселя I_ν и K_ν введем посредством соотношений

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix), \quad K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} i^{(\nu+1)} H_\nu^1(ix). \quad (56)$$

3. Приравняем угловые направления: $\theta \rightarrow \theta'$. Таким образом, например, получим выражение

$$i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 D_{\theta\theta}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) = -\frac{1}{2\pi\alpha} \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} d\rho \rho \left[\frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r'} I_{mp}(\rho r_{<}) K_{mp}(\rho r_{>}) - \frac{m^2 p^2}{r r'} I_{mp}(\rho r_{<}) K_{mp}(\rho r_{>}) \right] \cos^2(mp\theta) \quad (57)$$

с $mp = m\pi/\alpha$. Разность $(r - r')$ пока считаем произвольной.

4. Следующий шаг – использовать интегральные формулы

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho I_{\nu}(\rho r_{<}) K_{\nu}(\rho r_{>}) = \frac{\xi^{\nu}}{r_{>}^2 (1 - \xi^2)}, \quad (58)$$

$$\int_0^{\infty} d\rho \rho^3 I_{\nu}(\rho r_{<}) K_{\nu}(\rho r_{>}) = \frac{4\xi^{\nu}}{r_{>}^4 (1 - \xi^2)^3} [\nu(1 - \xi^2) + (1 + \xi^2)], \quad (59)$$

где $\xi = r_{<}/r_{>}$. Также потребуются формулы для суммирования

$$\sum_{m=0}^{\infty} \xi^{mp} \cos(mp\theta) = \frac{1}{2} \frac{1 - \xi^{2p}}{1 - 2\xi^p \cos p\theta + \xi^{2p}}, \quad (60)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \xi^{mp} \sin(mp\theta) = \frac{\xi^p \sin p\theta}{1 - 2\xi^p \cos p\theta + \xi^{2p}} \quad (61)$$

и другие формулы суммирования, которые можно получить последующим дифференцированием этих формул по θ .

Энергия Казимира поляризуемой частицы, находящейся в идеально проводящей клиновидной полости, была впервые вычислена в [10]. Она может быть получена из предшествующих выражений в виде:

$$E(\mathbf{r}) = i\alpha(0) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^2 (D_{pp}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega) - D_{pp}^{(0)}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, \omega)) \Big|_{\mathbf{r}' \rightarrow \mathbf{r}} = \\ = -\frac{\alpha(0)}{4\pi r^4} \left[\frac{3}{2} \frac{p^4}{\sin^4 p\theta} - \frac{p^2(p-1)(p+1)}{\sin^2 p\theta} - \frac{1}{90} (p-1)(p+1)(p^2+11) \right]. \quad (62)$$

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. $\alpha = \pi(p=1)$ – соответствует одиночной бесконечной плоскости. Если обозначить расстояние между частицей и плоскостью $d = r \sin \theta$, из (62) при $E(\mathbf{r}) \rightarrow E(d)$ получим

$$E(d) = -\frac{3}{8} \frac{\alpha(0)}{\pi d^4}. \quad (63)$$

Это обычное выражение Казимира–Полдера для энергии взаимодействия частицы с плоскостью [11].

2. $\alpha \rightarrow 0$, $r \rightarrow \infty$ так, что $\alpha r = a$ — соответствует двум параллельным пластинам, находящимся на расстоянии a друг от друга. Тогда, если $y = r \sin \theta \rightarrow r\theta$ обозначает расстояние между частицей и нижней пластиной, получаем при $E(\mathbf{r}) \rightarrow E(y)$

$$E(y) = \alpha(0) 2\pi^3 \left[\frac{1}{720a^4} + \frac{1}{16a^4} \frac{2 \sin^2(\pi y/a) - 3}{\sin^4(\pi y/a)} \right]. \quad (64)$$

Из симметрии данного выражения относительно плоскости $y = a/2$ следует, что энергия $E(a - y)$ должна быть равна $E(y)$. Формула (64) находится в согласии с работой Бартона [23].

3. $\alpha = 2\pi$, $\theta = \pi$ — соответствует частице, расположенной на расстоянии r от края полубесконечной плоскости. В этом случае получаем

$$E(r) = -\frac{3}{32} \frac{\alpha(0)}{\pi r^4}, \quad (65)$$

это означает, что энергия взаимодействия в четыре раза меньше по сравнению с энергией частицы, находящейся на таком же расстоянии от неограниченной плоскости (см. формулу (63)).

4. Рассмотрим также случай, отличающий геометрию клина от двух параллельных пластин. Вычислим радиальную компоненту силы $F_r = -\partial E / \partial r$, притягивающую частицы к вершине клина, на линии симметрии клина ($\theta = \alpha/2$). Для радиальной компоненты силы, выраженной через угол α , получаем при произвольных значениях α выражение

$$F_r|_{\theta=\alpha/2} = -\frac{\alpha(0)}{90\pi r^5 \alpha^4} (44\pi^4 + 80\pi^2 \alpha^2 + 11\alpha^4). \quad (66)$$

При $\alpha = \pi$ имеем обычную силу Казимира–Полдера, которую можно получить дифференцированием уравнения (63) (угловая компонента этой силы F_θ , конечно, равна нулю при $\theta = \alpha/2$).

4. Φ^4 -МОДЕЛЬ: ВЗАИМОСВЯЗЬ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА И МЕТОДА ФОНОВОГО ПОЛЯ

Разреженное скалярное поле может быть рассмотрено аналогично разреженному диэлектрическому шару (см. раздел 3). Для вычисления радиационных поправок в квантовой теории поля обычно используется импульсное пространство. Однако координатное пространство в определенном смысле более естественно, так как в нем можно с самого начала ввести в теорию “малые” и “большие” расстояния. Кроме этого, граничные условия удобно накладывать именно в координатном пространстве.

Рассмотрим модельное действие

$$S[\phi] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \partial_\nu \Phi \partial^\nu \Phi + \frac{1}{2} m^2 \Phi^2 + \frac{1}{24} g \Phi^4 \right] \quad (67)$$

и будем проводить вычисления в координатном пространстве. Скалярное поле $\Phi(x)$ можно разложить на классический фон ϕ_0 , заполняющий шар радиуса a размерности 3, и квантовые флуктуации возле этого фона $\phi(x)$, так что $\Phi(x) = \phi_0 + \phi(x)$. Эффективное действие есть

$$S_{\text{eff}} = TV \left(\frac{1}{2} m^2 \phi_0^2 + \frac{1}{24} g \phi_0^4 \right) + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln A, \quad (68)$$

где

$$A = \omega^2 - \Delta + \mu^2(\phi_0), \quad \mu^2(\phi_0) = m^2 + \frac{1}{2} g \phi_0^2. \quad (69)$$

Представим, что скалярное поле ϕ_0 не непрерывное, а гранулированное; для удобства среднее расстояние между “атомами” поля снова обозначим λ . Вычислим энергию Казимира гранулированного разреженного скалярного поля. Единственное отличие от вычислений, проведенных в разделах 2 и 3 для разреженного диэлектрического шара, состоит в том, что вместо диполь-дипольного потенциала (14) теперь необходимо подставить другой потенциал $U_{\text{scalar}}(r)$ в уравнение (17) (с $\rho = 1$) и выполнить интегрирование. Из (69) следует, что

$$U_{\text{scalar}}(r) = - \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\mu^4(\phi_0)}{4\pi} (D_{\text{scalar}}^{(0)}(|\omega|, r))^2, \quad (70)$$

$$D_{\text{scalar}}^{(0)}(|\omega|, r) = \frac{e^{-|\omega|r}}{4\pi r}.$$

Теперь по формуле (17) вычисляем энергию Казимира гранулированного скалярного поля E_{scalar} :

$$E_{\text{scalar}} = \frac{V \mu^4(\phi_0)}{32 \pi^2} \ln \frac{\lambda}{2a} + \frac{V \mu^4(\phi_0)}{\pi^2} \left(\frac{1}{24} - \frac{3}{128} \frac{\lambda}{a} + \frac{1}{1536} \frac{\lambda^3}{a^3} \right). \quad (71)$$

Если наложить условие, чтобы в одной петле эффективное действие для скалярного поля не зависело от расстояния λ между его “атомами”, то в пределе $m = 0$ из (68) и (71) немедленно следует уравнение ренормализационной группы

$$\lambda \frac{dg_\lambda}{d\lambda} = - \frac{3g_\lambda^2}{16\pi^2}. \quad (72)$$

Логарифмические члены в энергии Казимира определяются коэффициентом a_2 в разложении теплового ядра, см. [24], где было показано, что для диэлектрического шара в порядке $(\varepsilon - 1)^2$ коэффициент $a_2 = 0$.

Список литературы

- [1] *H. B. G. Casimir*. Proc. K. Ned. Akad. Wetensc. 1948. V. 51. P. 793.
- [2] *Ю. С. Бараиш, В. Л. Гинзбург*. УФН. 1975. Т. 116. С. 5; *K. A. Milton, L. L. DeRaad, Jr., J. Schwinger*. Ann. Phys. (N. Y.). 1978. V. 115. P. 1; P. 388; *В. Л. Гинзбург*. Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1981; *G. Plunien, B. Muller, W. Greiner*. Phys. Rep. C. 1986. V. 134. P. 87; *M. Bordag, K. Kirsten, D. V. Vassilevich*. J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 2381; hep-th/9709084; *K. A. Milton*. The Casimir effect: physical manifestations of zero-point energy. hep-th/9901011; *V. V. Nesterenko, I. G. Pirozhenko*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60, id.125007; hep-th/9907192; *J. S. Hoyer, I. Brevik, J. B. Aarseth*. Phys. Rev. E. 2001. V. 63, id.051101; quant-ph/0008088; *M. Bordag, U. Mohideen, V. M. Mostepanenko*. Phys. Rep. C. 2001. V. 353. P. 1; quant-ph/0106045.
- [3] *Е. М. Лифшиц*. ЖЭТФ. 1955. Т. 29. С. 94.
- [4] *V. N. Marachevsky*. Physica Scripta. 2001. V. 64. P. 205.
- [5] *V. N. Marachevsky*. Mod. Phys. Lett. A. 2001. V. 16. P. 1007; hep-th/0101062.
- [6] *K. A. Milton*. Ann. Phys. (N. Y.). 1980. V. 127. P. 49.
- [7] *I. Brevik, V. Marachevsky*. Phys. Rev. D. 1999. V. 60, id.085006; hep-th/9901086; *I. Brevik, V. N. Marachevsky, K. A. Milton*. Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 3948; hep-th/9810062; *G. Barton*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 525.
- [8] *Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978.
- [9] *G. Barton*. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 4083.
- [10] *I. Brevik, M. Lygren, V. N. Marachevsky*. Ann. Phys. (N. Y.). 1998. V. 267. P. 134.
- [11] *H. B. G. Casimir, D. Polder*. Phys. Rev. 1948. V. 73. P. 360.
- [12] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
- [13] *В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский*. Квантовая электродинамика. М.: Наука, 1989.
- [14] *I. Brevik, J. S. Hoyer*. Physica A. 1988. V. 153. P. 420.
- [15] *Ю. С. Бараиш, В. Л. Гинзбург*. УФН. 1984. Т. 143. С. 345.
- [16] *J. Schwinger*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1993. V. 90. P. 958; P. 2105; P. 4505; P. 7285; 1994. V. 91. P. 6473.
- [17] *B. P. Barber, R. A. Hiller, L. Löfstedt, S. J. Putterman, K. Weniger*. Phys. Rep. C. 1997. V. 281. P. 65; *М. А. Маргулис*. УФН. 2000. Т. 170. С. 263.
- [18] *K. A. Milton, Y. J. Ng*. Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 5504.
- [19] *K. A. Milton, Y. J. Ng*. Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 4297; hep-th/9607186.
- [20] *Дж. Джексон*. Классическая электродинамика. М.: Мир, 1965.
- [21] *М. А. Абрамович, И. А. Стиган*. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Мир, 1979.
- [22] *I. Klich*. Phys. Rev. D. 2000. V. 61, id.025004; hep-th/9908101.
- [23] *G. Barton*. Proc. Roy. Soc. London. A. 1987. V. 410. P. 175.
- [24] *M. Bordag, K. Kirsten, D. Vassilevich*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59, id.085011; hep-th/9811015.