Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Б. Матвеев, Позитоны: медленно убывающие аналоги солитонов, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 44–61

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1946>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 13:04:25

© 2002 г.

В. Б. Матвеев*

ПОЗИТОНЫ: МЕДЛЕННО УБЫВАЮЩИЕ АНАЛОГИ СОЛИТОНОВ

Представлено введение в теорию позитонов, почти не освещенную в русской научной литературе. Позитоны являются дальнедействующими аналогами солитонов и представляют собой медленно убывающие и осциллирующие решения нелинейных интегрируемых уравнений типа КдФ. Позитонные и солитон-позитонные решения уравнения КдФ были впервые получены и проанализированы около 10 лет назад и затем сконструированы для ряда других моделей: мКдФ, цепочки Тоды, НШ, уравнения sh-Gordon и его решеточного аналога. При подходящем выборе данных рассеяния однопозитонный и многопозитонные потенциалы обладают замечательным свойством: соответствующий коэффициент отражения равен нулю, а коэффициент прохождения равен единице (последнее свойство, как известно, не имеет места для стандартных короткодействующих безотражательных потенциалов).

1. ВВЕДЕНИЕ

Естественно предположить, что спустя 33 года после появления пионерской работы Гарднера, Грина, Крускала и Миуры [1] о точных решениях уравнения КдФ известно все. Ниже будет показано, что некоторые новые по сравнению с традиционной теорией солитонов эффекты могут быть обнаружены даже для класса начальных данных, соответствующих баргмановским потенциалам. Мы называем функцию $u(x)$ баргмановским потенциалом, если соответствующее уравнение Шредингера обладает решением вида $\psi(x, k) := P(x, k)e^{ikx}$, где $P(x, k)$ – полином относительно k . Принимая во внимание, что $\psi(x, -k)$ удовлетворяет тому же уравнению, мы видим, что для любого баргмановского потенциала существует пара решений уравнения Шредингера такая, что произведение $\psi(x, k)\psi(x, -k)$ является полиномом относительно k^2 . Отсюда следует, что все потенциалы Баргмана представляют специальный вырожденный случай конечно-зонных потенциалов и могут быть получены в явном виде вместе с соответствующими собственными функциями подходящим предельным переходом из тэта-функциональных формул работ [2]–[4]. Это касается в равной мере соответствующих решений уравне-

*ПОМИ РАН, Санкт-Петербург, Россия; Laboratoire Gevrey Mathématique physique, Université de Bourgogne, DIJON Cedex, France; Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, Germany

ния КдФ. В данной статье используется, однако, другой, чисто алгебраический подход, представляющий некоторую модификацию метода преобразований Дарбу решения уравнений типа КдФ и КП, предложенного в работах [5], [6]. Строится некоторое специальное подмногообразие баргмановских потенциалов таких, что соответствующая S -матрица тривиальна. Простейшим примером потенциалов с этим свойством является однопозитонный потенциал. Его динамика, соответствующая уравнению КдФ, замечательно проста, но более богата, чем в односолитонном случае. Представляет большой интерес описанное ниже взаимодействие солитонов и позитонов. Отметим, что однопозитонные решения и некоторые их обобщения рассматривались также в работах [7]–[9] при совершенно другой спектральной интерпретации.

Эта статья включает только аналитические результаты, описывающие поведение решений, асимптотически распадающихся в сумму N солитонов и M позитонов. В зоне взаимодействия, где полюсы позитонов и минимумы солитонов близки друг к другу, точные формулы не могут быть упрощены, но предоставляют возможность численного анализа и построения графиков решений, также выявляющих интересные особенности солитон-позитонных взаимодействий. За подробностями мы отсылаем читателя к работе [10].

2. ВРОНСКИАННАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КДФ

Обозначим через $u(x, t)$ любое фиксированное решение уравнения КдФ

$$u_t = 6uu_x - u_{xxx}. \quad (2.1)$$

Вспомогательная линейная система (пара Лакса) имеет вид

$$-f_{xx} + u(x, t)f = \lambda f, \quad (2.2)$$

$$f_t = -4f_{xxx} + 6uf_x + 3u_x f. \quad (2.3)$$

Пусть функции $\phi_1, \dots, \phi_n$ представляют n различных решений этой системы, взятых при $\lambda = \lambda_1, \dots, \lambda_n$, соответственно. Из этих функций образуем два определителя Вронского

$$W_1 := W(\phi_1, \dots, \phi_1^{(m_1)}, \phi_2, \dots, \phi_2^{(m_2)}, \dots, \phi_n, \dots, \phi_n^{(m_n)}), \quad (2.4)$$

$$W_2 := W(\phi_1, \dots, \phi_1^{(m_1)}, \phi_2, \dots, \phi_2^{(m_2)}, \dots, \phi_n, \dots, \phi_n^{(m_n)}, f), \quad (2.5)$$

где $m_i \geq 0$ – некоторые заданные числа и $\phi_j^{(n)} := \partial_\lambda^n \phi_j(x, \lambda)|_{\lambda=\lambda_j}$.

Обобщенное преобразование Дарбу системы (2.2), (2.3) определяется формулами

$$\tilde{u} := u - 2\partial_x^2 \ln W_1, \quad (2.6)$$

$$\tilde{f} := W_2 W_1^{-1}. \quad (2.7)$$

Формулы (2.6), (2.7), впервые полученные в [11], обобщают результаты работы [12], соответствующие случаю $m_1, m_2, \dots, m_n = 0$, и более специального результата [13], где следует также положить $u = 0$. Те же соображения, что и в разделе 2.4 книги [6], приводят к следующей теореме:

$$k_1, P_1(k_1), P_1'(k_1), \dots, P_1^{(m_1)}(k_1),$$

$$\dots$$

$$k_n, P_n(k_n), P_n'(k_n), \dots, P_n^{(m_n)}(k_n).$$

3. ОДНОПОЗИТОННОЕ РЕШЕНИЕ И ЭФФЕКТ СВЕРХБЕЗОТРАЖАТЕЛЬНОСТИ

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi, \phi_\kappa), \quad \phi_\kappa := \partial_\kappa \phi, \quad (3.1)$$
$$\phi = \sin \kappa(x + x_1(\kappa) + 4\kappa^2 t), \quad \text{Im } \kappa = 0, \quad (3.2)$$
$$u = -2\partial_x^2 \ln(\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma) = \frac{32\kappa^2 \sin \Theta (\sin \Theta - \kappa\gamma \cos \Theta)}{(\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma)^2}, \quad (3.3)$$
$$\Theta = \kappa(x + x_1 + 4\kappa^2 t), \quad x_1 = x_1(\kappa) \quad (3.4)$$
$$\begin{aligned}\gamma = \Theta_\kappa &= x + x_2 + 12\kappa^2 t, \quad x_2 = x_1 + \kappa \partial_\kappa x_1(\kappa), \\ W(\phi, \phi_\kappa) &= \sin 2\Theta - 2\kappa\gamma.\end{aligned}\tag{3.5}$$
$$\psi(x, k) := W(\phi, \phi_k, e^{ikx+4ik^3t})W^{-1}(\phi, \phi_k),$$

т. е.

$$\psi = \left(-k^2 + \frac{4ik\kappa \sin^2 \Theta}{\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma} - \kappa^2 \frac{\sin 2\Theta + 2\kappa\gamma}{\sin 2\Theta - 2\kappa\gamma} \right) e^{ikx + 4ik^3 t}. \quad (3.6)$$

Последняя формула также представляет интерес в связи с построением позитонных решений уравнения мКдФ [16].

Формулы (3.3)–(3.6) позволяют проанализировать все основные свойства однопозитонного решения. Во-первых, из (3.3) ясно, что для фиксированных t и $x \rightarrow \pm\infty$ имеет место асимптотическая оценка

$$u = -4\kappa x^{-1} \sin 2\Theta [1 + O(x^{-1})]. \quad (3.7)$$

Если x фиксировано, а $t \rightarrow \pm\infty$, решение описывается следующей асимптотической формулой:

$$u = -(3\kappa t)^{-1} \sin 2\Theta [1 + O(t^{-1})]. \quad (3.8)$$

Позитонное решение как функция от x имеет полюс второго порядка. Этот полюс расположен в точке $x = x_0(t)$, осциллирующей около точки $x_{\text{as}}(t)$ с амплитудой $1/(2\kappa)$, где $x_{\text{as}}(t) := -12\kappa^2 t - x_2$. Точное положение данного полюса может быть определено из решения нелинейного функционального уравнения $W = 0$. Относительно величины $\delta = 2\kappa\gamma$ это уравнение может быть записано в виде

$$\delta = \sin(\delta + (x_1 - x_2)2\kappa - 16\kappa^3 t) \quad (3.9)$$

(см. работу [17] по поводу графического изображения решения уравнения (3.9)). Единственность решения (3.9) может быть легко доказана. Ясно, что

$$\delta \left(t + \frac{2\pi}{16\kappa^3} \right) = \delta(t)$$

и

$$\delta(t) = (\text{id} - \arcsin)^{-1}((x_1 - x_2)2\kappa - 16\kappa^3 t),$$

где id обозначает тождественное отображение, а показатель -1 соответствует обратному отображению.

Во-вторых, из (3.3) следует, что позитонное решение как функция от x имеет две последовательности нулей на вещественной оси. Одна из них $\Theta = \pm n\pi$. Соответствующие нули $x = (-4\kappa^2 t \pm m/\kappa - x_1)$ распространяются с постоянной скоростью $-4\kappa^2$. Другая, “нелинейная” серия нулей определяется из решений функционального уравнения

$$\delta_1 = \text{tg}(\delta_1 + \nu),$$

где

$$\delta_1 = \kappa x + 12\kappa^3 t + \kappa x_2, \quad \nu = -8\kappa^3 t + \kappa(x_1 - x_2).$$

Очевидно также, что на прямых линиях $\Theta = \text{const}$ позитонное решение является простой рациональной функцией от t .

Из формулы (3.6) видно, что функция ψ имеет следующее асимптотическое поведение при $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\psi = (-k^2 + \kappa^2)e^{ikx+4ik^3t}(1 + o(1)). \quad (3.10)$$

Фиксируем решение Йоста уравнения Шредингера асимптотикой

$$f(x, k, t) = e^{ikx}(1 + o(1)), \quad x \rightarrow +\infty,$$

а коэффициенты отражения и прохождения $b(k)$, $a(k)$ формулой

$$f = a(k, t)e^{ikx} + b(k, t)e^{-ikx}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.11)$$

В случае однопозитонного потенциала получим

$$f(x, k, t) = (-k^2 + \kappa^2)^{-1}\psi e^{-4ik^3t}, \quad b(k, t) = 0, \quad a(k, t) = 1. \quad (3.12)$$

Подчеркнем, что это определение данных рассеяния для сингулярного позитонного потенциала отвечает продолжению решения Йоста через полюс на левую полуось своей же формулой. Это определение не является единственно возможным, однако оно представляется наиболее естественным с точки зрения анализа асимптотического поведения солитон-позитонных и многопозитонных решений, который будет дан ниже (см. также [10]).

Потенциалы, у которых $b(k, t) = 0$, принято называть безотражательными. N -солитонные решения также безотражательны, но для них соответствующий коэффициент прохождения отличен от единицы и вычисляется по известной формуле

$$a(k) = \prod_{j=1}^N \frac{k - ik_j}{k + ik_j} \quad (3.13)$$

(простейший вывод этой формулы следует из (2.8), см. [6]). Для позитонного решения $a(k) \equiv 1$. Это нетривиальное различие между солитонами и позитонами позволяет называть позитонные потенциалы сверхбезотражательными или суперпрозрачными. Ниже будет показано, что асимптотическое поведение N -солитонных- M -позитонных решений, которые будут введены далее, дает дополнительную независимую мотивировку для такой терминологии.

В точке $k = \kappa$ решение (3.6) упрощается,

$$\psi = -2\kappa^2(2^{-1}\sin 2\Theta - \kappa\gamma)^{-1}\sin \Theta. \quad (3.14)$$

Иными словами, функция ψ локализована в окрестности своего полюса и квадратично-интегрируема на бесконечности. Ясно, что для фиксированных t $\psi = O(|x|^{-1})$, когда $x \rightarrow \infty$.

Учитывая, что функция ψ не является квадратично-интегрируемой на всей оси, будем называть точку $\lambda = \kappa^2$ резонансом Вигнера-фон Неймана. Связь резонансов Вигнера-фон Неймана с положительными собственными значениями в непрерывном спектре

можно увидеть, например, рассматривая рассеяние на полуоси $[0, \infty)$. Определяя функцию Йоста $M(k) := f(0, t, k)$, амплитуду рассеяния $A(k) = |M(k)|$ и предельную фазу рассеяния $\eta(k) = \arg M(k)$, получим для $t = 0$

$$M(k) = \frac{(-k^2 + \kappa^2)}{2^{-1} \sin 2\kappa x_1 - \kappa x_2} \times \\ \times (2ik\kappa \sin^2 \kappa x_1 + x_2 \kappa (k^2 - \kappa^2) - (k^2 + \kappa^2) 2 \sin 2x_1 \kappa), \quad (3.15)$$

$$\eta(k) = \arctg \frac{2k\kappa \sin^2 \kappa x_1}{-2^{-1}(k^2 + \kappa^2) \sin 2\kappa x_1 + \kappa x_2 (k^2 - \kappa^2)}. \quad (3.16)$$

Теперь для решения ψ уравнения Шредингера с позитонным потенциалом и граничными условиями $\psi(0, k) = 0$, $\psi_x(0, k) = 1$ в точке $k \neq \kappa$, $\text{Im } k = 0$, получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\psi = \frac{A(k)}{k} \sin(kx - \eta(k))(1 + o(x^{-1})), \quad x \rightarrow +\infty. \quad (3.17)$$

Если же $k = \kappa$, то можно легко удовлетворить граничному условию $\psi(0, \kappa) = 0$, полагая в (3.14) $x_1 + 4\kappa^2 t = 0$ (для $t = 0$ это значит, что $x_1 = 0$). Выбирая x_2 достаточно большим и положительным, мы можем быть уверены, что позитонный потенциал, так же как и соответствующее решение ψ , совпадает с (3.14) с точностью до постоянного множителя и не содержит сингулярностей. Следовательно, $\psi \in L_2(0, \infty)$. В этом случае мы имеем положительные собственные значения соответствующего оператора Шредингера в собственном смысле слова. В случае, когда в формулах (3.15), (3.16) $x_1 = 0$, мы видим, что $M(k) = 1$, $\eta(k) = 0$, т.е. рассеяние полностью отсутствует. Этот спектральный эффект невозможен для гладких короткодействующих потенциалов, отличных от нулевого.

Факт существования многопараметрических семейств гладких потенциалов с $\eta(k) = 0$ был, по-видимому, впервые отмечен в заметке [18].

Будем определять скорость позитона как скорость распространения его полюса, так как позитон сконцентрирован около своего полюса (т.е. в основном в области, где величина γ конечна). В соответствии с этим определением скорость позитона дается выражением

$$v(t) = v(t + T) = \partial_t x_0(t) = -12\kappa^2 + \frac{\delta'(t)}{2\kappa}, \quad (3.18)$$

где

$$\frac{1}{T} \int_0^T v \, dt = -12\kappa^2, \quad T = \frac{2\pi}{16\kappa^3}.$$

Средняя скорость распространения позитона в три раза больше, чем для односолитонного решения вида

$$-2\partial_x^2 \ln \text{ch } \kappa(x + x_1 - 4\kappa^2 t),$$

порожденного отрицательным собственным значением $-\kappa^2$. Позитон распространяется в противоположном солитону направлении, т.е. справа налево.

В заключение этого раздела приведем аналогичные формулы для решений уравнения КдФ, имеющих форму (3.1) с солитонной порождающей функцией,

$$\phi_2 = \operatorname{ch} \kappa(x + x_1 - 4\kappa^2 t) \equiv \operatorname{ch} \xi. \quad (3.19)$$

Мы легко получаем формулы, аналогичные позитонному случаю, соответствующие, однако, совершенно другому асимптотическому поведению решений,

$$u = -2\partial_x^2 \ln(\operatorname{sh} 2\xi + 2\kappa\beta), \quad \beta = x + x_2 - 12\kappa^2 t. \quad (3.20)$$

В дальнейшем будем называть решение (3.20) негтонным решением или просто негтоном. Соответствующая ψ -функция задается выражением

$$\psi = \left(-k^2 - \frac{4ik\kappa \operatorname{ch}^2 \xi}{\operatorname{sh} 2\xi + 2\kappa\beta} + \kappa^2 \frac{\operatorname{sh} 2\xi - 2\kappa\beta}{\operatorname{sh} 2\xi + 2\kappa\beta} \right) e^{ikx + 4ik^3 t}. \quad (3.21)$$

Ее асимптотика при $x \rightarrow \pm\infty$ имеет вид

$$\psi \sim (-ik + \kappa)^2 e^{ikx + 4ik^3 t}, \quad x \rightarrow +\infty, \quad (3.22)$$

$$\psi \sim (+ik + \kappa)^2 e^{ikx + 4ik^3 t}, \quad x \rightarrow -\infty. \quad (3.23)$$

Из асимптотики (3.23) ясно, что решение Йоста $f(x, k, t)$ и коэффициенты отражения и прохождения имеют следующую форму:

$$f = \psi(-ik + \kappa)^{-2} e^{-4ik^3 t}, \quad b(k) = 0, \quad a(k) = \left(\frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} \right)^2. \quad (3.24)$$

Следовательно, соответствующий потенциал является безотражательным, а коэффициент прохождения равен квадрату коэффициента прохождения односолитонного решения. Это естественно, так как негтон является продуктом вырождения двухсолитонного решения, соответствующего слиянию двух отрицательных собственных значений оператора Шредингера.

Заменяя в (3.19) ch на sh того же аргумента, получаем решение вида

$$u = -2\partial_x^2 \ln(2^{-1} \operatorname{sh} 2\xi - \kappa\beta). \quad (3.25)$$

Иными словами, как и в однопозитонном случае, замена $\beta \rightarrow -\beta$ снова порождает решение уравнения КдФ.

Отметим, что позитонные и негтонные решения,

$$u = -2\partial_x^2 \ln(2^{-1} \sin 2\Theta \pm \kappa\gamma) \quad \text{и} \quad u = -2\partial_x^2 \ln(2^{-1} \operatorname{sh} 2\xi \pm \kappa\beta),$$

обладают одним общим свойством: можно добавить произвольную постоянную к аргументу логарифма и снова получить при этом решение уравнения КдФ. Это замечательное свойство не имеет места для солитонных решений. Используя представление

Хироты для уравнения КдФ [19], можно доказать более сильное утверждение. Пусть u является решением уравнения КдФ вида $u = -\partial_x^2 \ln \tau(x, t)$. Предположим, что для любой константы C выражение $u = -2\partial_x^2 \ln(\tau + C)$ также удовлетворяет уравнению КдФ. Тогда τ имеет вид или позитонного, или негатонного решения (с точностью до возможной комплексификации всех параметров). Мы дадим лишь набросок доказательства, оставляя очевидные выкладки читателю. В терминах τ -функции уравнение КдФ имеет вид

$$\tau \tau_{xt} - \tau_t \tau_x + \tau_{xxxx} \tau - 4\tau_{xxx} \tau_x + 3\tau_{xx}^2 = 0. \quad (3.26)$$

Отмеченное выше свойство инвариантности по отношению к замене $\tau \rightarrow \tau + C$ позволяет свести это уравнение к системе

$$\tau_{xt} = -\tau_{xxx}, \quad 3\tau_{xx}^2 - 4\tau_{xxx} \tau_x = \tau_t \tau_x, \quad (3.27)$$

из явного решения которой и следует доказательство.

4. ДВУХПОЗИТОННОЕ РЕШЕНИЕ И ОБОБЩЕНИЯ

Двухпозитонное решение уравнения КдФ определяется формулой

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi_1, \phi_{1\kappa_1}, \phi_2, \phi_{2\kappa_2}),$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sin \Theta_1, \quad \Theta_1 = \kappa_1(x + x_1 + 4\kappa_1^2 t), \\ \phi_{1\kappa_1} &= \gamma_1 \cos \Theta_1, \quad \gamma_1 = x + \tilde{x}_1 + 12\kappa_1^2 t, \\ \phi_2 &= \sin \Theta_2, \quad \Theta_2 = \kappa_2(x + x_2 + 4\kappa_2^2 t), \\ \phi_{2\kappa_2} &= \gamma_2 \cos \Theta_2, \quad \gamma_2 = x + \tilde{x}_2 + 12\kappa_2^2 t, \\ \text{Im } x_1 &= \text{Im } \tilde{x}_1 = \text{Im } x_2 = \text{Im } \tilde{x}_2 = 0, \quad \kappa_{1,2} > 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Выражение (4.1) представляет собой шестипараметрическое семейство решений уравнения КдФ. Несложное вычисление приводит к следующей явной формуле для вронскиана W , входящего в (4.1):

$$\begin{aligned} W &= \kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 \gamma_1 \gamma_2 - \frac{\kappa_1 \gamma_1}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 \sin 2\Theta_2 - \frac{\kappa_2 \gamma_2}{2} (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)^2 \sin 2\Theta_1 - \\ &\quad - 4\kappa_2 \kappa_1^3 \cos^2 \Theta_1 \sin^2 \Theta_2 - 4\kappa_1 \kappa_2^3 \sin^2 \Theta_1 \cos^2 \Theta_2 + \\ &\quad + 4^{-1} (\kappa_1^4 + \kappa_2^4 + 6\kappa_1^2 \kappa_2^2) \sin 2\Theta_1 \sin 2\Theta_2. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Используя (4.2), легко показать, что в области, где γ_1 фиксировано и отлично от нуля, а $t \rightarrow \infty$ (что влечет за собой $\gamma_2 \rightarrow \infty$), мы имеем следующую асимптотическую оценку решения (4.1):

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi_1, \phi_{1\kappa_1})[1 + O(\gamma_2^{-1})]. \quad (4.3)$$

В области, где γ_2 фиксировано и $t \rightarrow \infty$ (т.е. $\gamma_1 \rightarrow \infty$), выполняется аналогичная асимптотика с точностью до замены $\phi_1 \rightarrow \phi_2$, $\gamma_1 \rightarrow \gamma_2$. Таким образом, установлено, что

асимптотически два позитона выходят из взаимного столкновения без каких-либо изменений. Даже дополнительные фазовые сдвиги, характеризующие столкновение двух солитонов, здесь отсутствуют. Этот факт находится в очевидном интуитивном согласии со свойством сверхпрозрачности позитонных потенциалов, отмечавшимся выше (хотя это свойство никак не использовалось в нашем доказательстве). Аналогичное рассмотрение позволяет получить координатную асимптотику двухпозитонного решения и соответствующей ψ -функции, полагая t фиксированным и $x \rightarrow \infty$.

Резюмируя, можно сказать, что при больших t или больших x асимптотика решения (4.1) имеет вид суммы двух свободных позитонов. Вычисляя соответствующее решение системы (2.2), (2.3), легко показать, что потенциал (4.1) также является сверхбезотражательным (т.е. $a(k) = 1$, $b(k) = 0$). Соответствующий оператор Шредингера имеет два резонанса Вигнера-фон Неймана $\lambda_{1,2} = \kappa_{1,2}^2$ и не имеет отрицательных связанных состояний.

Все вышеперечисленные утверждения допускают прямое обобщение на случай N -позитонных решений, определяемых формулой

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi_1, \phi_{1\kappa_1}, \dots, \phi_N, \phi_{N\kappa_N}), \quad (4.4)$$

где все функции ϕ_j имеют структуру, аналогичную (4.1) (с разными параметрами κ_j , x_j , $\tilde{x}_j$). Решение (4.4) зависит от $3N$ вещественных параметров и представляет собой сверхбезотражательный потенциал при всех временах. Асимптотически при больших временах N -позитонное решение распадается в сумму N свободных позитонов. Строгое доказательство этого факта приведено в работе [10].

Можно также показать, что двухпозитонная τ -функция с точностью до ограниченного слагаемого факторизуется в произведение τ -функций двух одиночных позитонов [20]. Это позволяет дать иной вывод основных свойств двухпозитонного решения, который мы опускаем.

В столкновительной области, где полюсы позитонов близки друг к другу, поведение многопозитонных решений также очень интересно. Идея, что столкновение двух позитонов соответствует конфлюенции нулей вронскиана, в общем случае неверна: она реализуется лишь при очень специальном выборе параметров. В общем случае полюс быстрого позитона, двигаясь справа налево, приближается на минимальное расстояние к полюсу медленного позитона, после чего медленный позитон превращается в быстрый и уходит налево. В то же самое время быстрый позитон трансформируется в медленный и продолжает двигаться с возрастающим отставанием за быстрым позитоном. Графики, иллюстрирующие это поведение, могут быть найдены в работе [10].

Заметим, что свойство сверхбезотражательности, ранее наблюдавшееся для рациональных [21], [22] решений, кажется еще более впечатляющим для обсуждаемых здесь дальнедействующих осциллирующих потенциалов.

5. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОЗИТОНОВ С СОЛИТОНАМИ

Описанные выше свойства позитонов позволяют предположить, что взаимодействие солитонов с позитонами должно характеризоваться новыми интересными свойствами

по сравнению с хорошо изученными солитон-солитонными взаимодействиями. Определим позитон-солитонное решение уравнения КдФ формулой

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi_1, \phi_{1\kappa}, \phi_2), \quad (5.1)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sin \Theta, \quad \Theta = \kappa(x + x_1 + 4\kappa^2 t), \\ \phi_{1\kappa} &= \gamma \cos \Theta, \quad \gamma = x + x_2 + 12\kappa^2 t, \\ \operatorname{Im} x_1 &= \operatorname{Im} x_2 = 0, \quad \kappa > 0, \\ \phi_2 &= \operatorname{ch} \xi, \quad \xi = \alpha(x + x_3 - 4\alpha^2 t), \\ \alpha &> 0, \quad \operatorname{Im} x_3 = 0. \end{aligned}$$

Это решение зависит от пяти вещественных параметров $\alpha, \kappa, x_1, x_2, x_3$. Вронскиан W в (5.1) явно вычисляется,

$$W = [(\alpha^2 - \kappa^2)2^{-1} \sin 2\Theta - \kappa(\alpha^2 + \kappa^2)\gamma] \operatorname{ch} \xi + 2\kappa\alpha \sin^2 \Theta \operatorname{sh} \xi. \quad (5.2)$$

Формула (5.2) позволяет легко доказать, что в области, где ξ фиксировано, а $t \rightarrow \pm\infty$, выполняется асимптотическая оценка

$$u = -2\partial_x^2 \ln \phi_2 [1 + O(|\gamma|^{-1})] = -2\partial_x^2 \ln \phi_2 [1 + O(|t|^{-1})]. \quad (5.3)$$

Оценка (5.3) показывает, что в указанной области старший член асимптотики позитон-солитонного решения представляет собой простой солитон, получаемый заменой вронскиана, фигурирующего в определении этого решения, третьим элементом его первой строки. Иными словами, позитон абсолютно прозрачен для солитона: последний не получает никаких фазовых сдвигов в столкновении с позитоном в отличие от результата для солитон-солитонного столкновения.

Обращаясь к рассмотрению области, где постоянная γ фиксирована (т.е. области, где в основном сконцентрирован позитон), а $t \rightarrow \pm\infty$, мы получаем следующую асимптотическую оценку:

$$\begin{aligned} u &= -2\partial_x^2 \ln [2^{-1} \sin 2(\Theta \pm \Delta_1) - \kappa(\gamma \pm \Delta_2)] [1 + O(e^{-|\xi|})], \\ \Delta_1 &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2\kappa\alpha}{\alpha^2 - \kappa^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \kappa^2}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Эта оценка, очевидно, представляет однопозитонное решение, полученное из (3.3) заменой параметров $x_1 \rightarrow x_1 \pm \Delta_1$, $x_2 \rightarrow x_2 \pm \Delta_2$. Следует отметить, что в отличие от поведения фазового сдвига, характеризующего двухсолитонное столкновение [6], обе величины Δ_1 и Δ_2 остаются конечными, когда $\alpha \rightarrow \kappa$; в этом предельном случае $\Delta_1 = \pm 1/4$, $\Delta_2 = 1/(2\alpha)$.

Для решений вспомогательной линейной задачи, соответствующей солитон-позитонному взаимодействию, ψ -функция имеет вид

$$\psi = W(\phi_1, \phi_{1\kappa}, \phi_2, e^{ikx+4ik^3t})W^{-1}(\phi_1, \phi_{1\kappa}, \phi_2). \quad (5.5)$$

Ее асимптотика, когда t фиксировано, а $x \rightarrow \pm\infty$, задается формулой

$$\psi = (\pm\alpha - ik)(k^2 - \kappa^2)e^{ikx+4ik^3t}[1 + o(1)]. \quad (5.6)$$

Отсюда мы получаем следующее выражение для решения Йоста:

$$f(x, k, t) = (\alpha - ik)^{-1}(k^2 - \kappa^2)e^{-4ik^3t}, \quad (5.7)$$

где

$$f \sim e^{ikx}, \quad x \rightarrow +\infty$$

и

$$f = a(k)e^{ikx}[1 + o(1)], \quad x \rightarrow -\infty, \quad a(k) = \frac{k - i\alpha}{k + i\alpha}.$$

Следовательно, потенциал, отвечающий позитон-солитонному решению, безотражателен, а соответствующий коэффициент прохождения тот же, что и у солитонного решения $u = -2\alpha^2 / \text{ch}^2 \xi$. Это означает, что “позитонная часть” решения (5.1) не оказывает влияния на структуру коэффициента прохождения, который полностью определяется “солитонной частью” решения (5.1). Легко видеть, что соответствующий оператор Шредингера имеет одно отрицательное собственное значение $\lambda_1 = -\alpha^2$ и один резонанс Вигнера–фон Неймана $\lambda_2 = \kappa^2$.

Когда t фиксировано, а $x \rightarrow \pm\infty$, асимптотика позитон-солитонного решения описывается формулой (5.4). Таким образом, за исключением области, где ξ фиксировано, позитонный вклад в асимптотику решения (5.1) является доминирующим.

Результаты этого раздела легко обобщаются на случай N -позитонного- M -солитонного решения, определяемого формулой

$$u := -2\partial_x^2 \ln W(\phi_1, \phi_{1\kappa_1}, \dots, \phi_N, \phi_{N\kappa_N}, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_M), \quad (5.8)$$

где

$$\begin{aligned} \phi_i &= \sin \Theta_i, \quad \Theta_i = \kappa_i(x + x_i + 4\kappa_i^2 t), \\ \phi_{i\kappa_i} &= \gamma_i \cos \Theta_i, \quad \gamma_i = x + \tilde{x}_1 + 12\kappa_i^2 t, \\ \psi_{2i-1} &= \text{ch} \xi_{2i-1}, \quad \xi_{2i-1} = \alpha_{2i-1}(x + y_{2i-1} - 4\alpha_{2i-1}^2 t), \quad \kappa_i, \alpha_i > 0, \\ \psi_{2i} &= \text{sh} \xi_{2i}, \quad \xi_{2i} = \alpha_{2i}(x + y_{2i} - 4\alpha_{2i}^2 t), \\ \text{Im } x_i &= \text{Im } y_i = \text{Im } \tilde{x}_i = 0. \end{aligned}$$

В частности, можно показать, что при фиксированном ξ_i и $t \rightarrow \infty$ асимптотика та же самая, что и у M -солитонного решения. В области, где γ_i фиксировано, асимптотическое поведение при больших временах то же, что у однополитонного решения u , отличающегося значениями “фаз” x_i и $\tilde{x}_i$ от $u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi_i, \phi_{i\kappa_i})$. Новые фазы δ_i and $\tilde{\delta}_i$ определяются формулой ($t \rightarrow \pm\infty$)

$$\delta_i = x_i \pm \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \arctg \frac{2\kappa_i \alpha_j}{\alpha_j^2 - \kappa_i^2}, \quad \tilde{\delta}_i = \tilde{x}_i \pm \sum_{j=1}^M \frac{\alpha_j}{\alpha_j^2 + \kappa_i^2}. \quad (5.9)$$

Для коэффициента прохождения вспомогательной линейной задачи легко получить выражение

$$a(k) = \prod_{j=1}^M \frac{\alpha_j - ik}{\alpha_j + ik},$$

совпадающее с коэффициентом прохождения M -солитонного решения. Соответствующий коэффициент отражения по-прежнему равен нулю.

Таким образом, мы полностью описали картину асимптотического поведения N -политонных- M -солитонных решений. Дополнительная информация о поведении этих же решений в столкновительной области может быть найдена в работе [10]. Там же приведено строгое обоснование перечисленных выше результатов, которое мы здесь опускаем, ограничившись эвристическим рассуждением, заимствованным из работы [11]. Отметим еще, что спектр оператора Шредингера, соответствующий N -политонному- M -солитонному решению, содержит N резонансов Вигнера–фон Неймана $\lambda_j = \kappa_j^2$ и M отрицательных связанных состояний $\lambda_k = -\alpha_k^2$.

6. ПОЗИТОНЫ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Опишем решения уравнения КдФ, порожденные одной функцией ϕ и ее производными по спектральному параметру,

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi, \phi_\kappa, \dots, \phi_\kappa^{(N)}), \quad \phi = \sin \Theta, \quad \Theta = \kappa(x + x_1(\kappa) + 4\kappa^2 t), \quad (6.1)$$

которые ниже мы будем называть позитонами N -го порядка. Мы сохраняем название позитон (высшего порядка), подразумевая, что порождающая функция ϕ удовлетворяет уравнению Шредингера при положительной энергии κ^2 .

Позитон нулевого порядка есть хорошо известное сингулярное периодическое решение уравнения КдФ,

$$u = -2\partial_x^2 \ln \phi = 2\kappa^2 \sin^{-2} \Theta. \quad (6.2)$$

Позитон первого порядка есть обычный позитон, обсуждавшийся выше. Позитоны второго порядка задаются формулой

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi, \phi_\kappa, \phi_{\kappa\kappa}). \quad (6.3)$$

Вронскиан в формуле (6.3) выражается через величины Θ и $\gamma = \partial_\kappa \Theta$,

$$W = 4\gamma^2 \kappa^2 \cos \Theta - 2\kappa\gamma \sin \Theta - 48\kappa^3 t \sin \Theta - \sin 2\Theta \sin \Theta. \quad (6.4)$$

Из (6.3) легко заключить, что асимптотически при $x \rightarrow \infty$ потенциал ведет себя как периодическая функция, имеющая бесконечное число полюсов второго порядка на вещественной оси, т.е.

$$u = 2\kappa^2 \cos^{-2} \Theta [1 + O(|x|^{-1})], \quad (6.5)$$

где t фиксировано, $x \rightarrow \pm\infty$. При больших временах и фиксированном значении γ асимптотика имеет вид

$$u = 2\kappa^2 \sin^{-2} \Theta [1 + O(t^{-1})]. \quad (6.6)$$

Таким образом, асимптотически позитон второго порядка ведет себя как сдвинутый позитон нулевого порядка.

Рассмотрим для простоты позитон третьего порядка лишь в простейшем случае $x_1(\kappa) = \text{const}$,

$$u = -2\partial_x^2 \ln W(\phi, \phi_\kappa, \phi_{\kappa\kappa}, \phi_{\kappa\kappa\kappa}). \quad (6.7)$$

Соответствующий вронскиан W редуцируется к следующему явному виду, содержащему 10 мономов:

$$\begin{aligned} W = & 16\kappa^4 \gamma^4 + 16\kappa^3 \gamma^3 \sin 2\Theta + \kappa^2 \gamma^2 (-36 + 48 \cos^2 \Theta) - \\ & - 12\kappa\gamma \sin 2\Theta + \kappa^4 \gamma t (-384 + 1152 \cos^2 \Theta) - \\ & - 384\kappa^3 t \sin 2\Theta - 6912\kappa^6 t^6 + 3 \sin^2 2\Theta. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из этого выражения следует, что асимптотика решения (6.7) на больших расстояниях при фиксированном t имеет вид

$$u = 8\kappa x^{-1} \sin 2\Theta (1 + O(|x|^{-1})). \quad (6.9)$$

Отсюда мы заключаем [23]–[25], что резонанс Вигнера–фон Неймана появляется только в точке $\lambda = \kappa^2$, так же как и для однопозитонного решения.

При фиксированном x и $t \rightarrow \infty$ асимптотика имеет вид

$$u = -\frac{\sin 2\Theta}{3\kappa^2 t} + O(t^{-2}). \quad (6.10)$$

В области, где слагаемое $16\gamma^4 \kappa^4$ дает главный вклад в W , решение (6.7), разумеется, несингулярно. В частности, решение гладко при фиксированном t и достаточно больших x и наоборот. В области фиксированных значений γ выполняется асимптотическая оценка

$$u = O(t^{-1}), \quad t \rightarrow \pm\infty. \quad (6.11)$$

Эта оценка показывает, что позитоны высших порядков существенно отличаются от однопозитонных решений в том, что касается асимптотического движения полюсов. Будучи вырожденным случаем двухпозитонного решения, позитон третьего порядка представляет собой двухполюсный связанный кластер, в котором расстояние между полюсами осциллирует периодическим образом [26].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что свойство сверхбезотражательности, впервые обсуждавшееся в связи с вполне интегрируемыми системами в работах [18], [21], [22], присуще некоторому вырожденному подмногообразию пространства конечнозонных потенциалов. Само по себе решение однополитонного вида, вероятно, впервые было построено в работе [7]. Некоторые обобщения, соответствующие присутствию полюсов второго порядка у решений Йоста, были получены при помощи определенной модификации интегральных уравнений Гельфанда–Левитана–Марченко–Фаддеева [8]. В работе [7] был также построен аналог метода обратной задачи рассеяния для уравнения КдФ в классе начальных данных, координатная асимптотика которых близка к точным решениям, рассмотренных там же и в данной работе. Однако асимптотика при больших временах не была изучена. Обсуждение связи с резонансами Вигнера–фон Неймана и рассмотрение соответствующей спектральной теории и теории рассеяния на дальнедействующих осциллирующих потенциалах, развитой в [23], также отсутствовало в [8].

Исторически многополитонные решения уравнения КдФ были впервые рассмотрены в работе [11], где также были изучены взаимодействия солитонов с политонами. Строгий вывод соответствующих асимптотических формул в общем случае можно найти, как уже отмечалось, в статье [10].

Подчеркнем, что данные рассеяния, благодаря наличию полюса (полюсов) второго порядка у политонного потенциала на вещественной оси, определены неоднозначно: соответствующая дифференциальная операция может иметь разные самосопряженные расширения. Вполне возможно определить данные рассеяния так, что политонный потенциал окажется, напротив, полностью отталкивающим. Наше определение предусматривает продолжение решения Йоста с больших положительных значений x на всю комплексную плоскость своей же формулой. Это определение интуитивно хорошо согласуется с нелинейной картиной взаимодействия политонов друг с другом и с солитонами.

Вообще говоря, наличие полюсов у политонных решений не является неизбежным. Например, как показал Бейтлер [27], [28], для модели sh-Гордон полюсы исчезают для некоторой периодической последовательности моментов времени. Кажется правдоподобной возможность построения непрерывной интегрируемой модели с полностью не-сингулярными политонными (т.е. отвечающими тривиальной матрице рассеяния, осциллирующими и приводящими к появлению в непрерывном спектре связанных состояний) решениями.

Для цепочки Тоды [29] полученные особенности (по временной переменной) появляются лишь в изолированные моменты времени в каждом узле. Для решеточной модели sh-Гордон в работе [30] были построены глобально ограниченные политонные решения.

Свойства политонных и многополитонных решений для уравнения мКдФ [16] полностью аналогичны полученным с помощью соответствующей теории для уравнения КдФ и являются простым следствием последней: для их построения достаточно рассмотреть логарифмическую производную функции $\psi(x, k, t)$ при $k = 0$. Для нелинейного уравнения Шредингера с отталкиванием аналогичная случаю КдФ и мКдФ теория многополитонных решений была развита в работе [31].

Интересный вопрос о существовании несингулярных позитонных решений в непрерывных интегрируемых моделях пока остается открытым. Некоторые аргументы в пользу их существования (возможная тривиальность оператора рассеяния в некоторых линейных задачах с нетривиальным взаимодействием) могут быть найдены в [20].

Более широкий, чем в работе [8], класс точных решений с баргмановскими начальными данными был построен на основе аксиоматики [9], допускающей кратные (по спектральному параметру) полюсы соответствующей (вырожденной) функции Бейкера–Ахизера. Однако работа [9] содержит ряд неточностей. Например, автор утверждает, что все построенные им потенциалы безотражательны, хотя последний из рассмотренных в [9] примеров асимптотически (при больших x) ведет себя как периодическая функция. Условия вещественности в теореме 2 работы [9] также должны быть скорректированы, как показывает сравнение со свойствами полюсов решений Йоста (см. выше, раздел 5).

Отметим, что детерминантные формулы данной работы характеризуют нелинейную суперпозицию разных типов решений.

Многопозитонные решения были повторно открыты в статьях [32], [33], где для них было получено другое детерминантное представление. Иной вывод и некоторое обобщение результатов автора данной статьи, включающее рассмотрение позитонных решений для всей иерархии уравнений КдФ, можно найти также в работах [17], [34]. Как отмечалось во введении, описанные выше результаты с соответствующими модификациями переносятся на многие интегрируемые системы, также имеющие решения позитонного типа [16], [27].

Общую информацию относительно рассеяния на медленно убывающих осциллирующих потенциалах, приводящих к существованию резонансов Вигнера–фон Неймана в непрерывном спектре оператора Шредингера, можно найти в статьях [23]–[25], [35].

Сделаем одно общее замечание. Следует проделать дополнительную работу по выяснению роли условия тривиальности оператора рассеяния в физических задачах различной природы. Тривиальность оператора рассеяния и тривиальность потенциала не следуют одно из другого. Многопараметрическое семейство операторов Шредингера с гладким потенциалом на полуоси, подтверждающее эту мысль, было построено впервые в работе [18]. По нашему убеждению, тривиальность оператора рассеяния является правильным обобщением свойства сверхбезотражательности на многомерный случай, а само это свойство еще недостаточно использовано как в линейных, так и в нелинейных интегрируемых задачах.

Еще одно важное приложение многопозитонных потенциалов – это перенос результатов работ [36]–[38] об отсутствии волн Френеля в координатной асимптотике N -частичной волновой функции с быстроубывающим четным безотражательным парным взаимодействием для системы N одномерных квантовых частиц с одинаковыми массами на случай четных многопозитонных парных взаимодействий. Не исключено, что среди таких квантовых систем имеются вполне интегрируемые, не сводящиеся к системам Калоджеро–Мозера–Сазерленда: имеющиеся результаты о полноте списка соответствующих парных взаимодействий доказаны при сильных ограничениях на структуру интегралов движения и прямо этого не запрещают, а свойство тривиальности парной матрицы рас-

сеяния указывает на крайне специфический характер рассматриваемой системы.

Еще одна возможность приложения многопозитонных решений уравнения КдФ связана с интенсивно обсуждающейся сейчас теорией гигантских волн в океане, известных под названием “freak waves” [39]–[41]. Сопоставление графиков двухпозитонных решений с экспериментальными результатами, приведенными в [39], выявляет поразительную аналогию. Разумеется, амплитуда реальных волн конечна, и в этом смысле многопозитонные решения могут рассматриваться лишь как некоторая аппроксимация. Возможно, правильной несингулярной регуляризацией являются конечнозонные квазипериодические решения уравнения КдФ, отвечающие спектру с крайне узкими запрещенными зонами и очень узкими спектральными интервалами между ними. Дальнейшее обсуждение этого вопроса требует проведения численного моделирования.

В заключение отметим, что медленно убывающие потенциалы с асимптотикой позитонного типа, изначально рассматривавшиеся как математический курьез в квантовой механике, так же как и связанное с ними явление Вигнера–фон Неймана, в настоящее время могут быть реализованы экспериментально с использованием методов зонной инженерии [42], а сами резонансы Вигнера–фон Неймана могут экспериментально наблюдаться. Было бы крайне интересно понять в этом контексте, может ли феномен тривиальности рассеяния или сверхбезотражательности (невозможный для короткодействующих потенциалов) также быть реализован экспериментально.

Благодарности. Автор выражает признательность организаторам фоковской школы за приглашение в ней участвовать, а также ЮНЕСКО за финансовую поддержку.

Автор благодарит за гостеприимство Математический институт Макса Планка в Бонне, где эта работа была закончена.

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [2] *А. Р. Итс, В. В. Матвеев.* ТМФ. 1975. Т. 23. № 1. С. 51.
- [3] *В. В. Матвеев.* УМН. 1975. Т. 30. С. 201.
- [4] *А. Р. Итс, В. В. Матвеев.* Об одном классе решений уравнения КдФ. В сб.: Проблемы математической физики. Вып. 8. Ред. М. С. Бирман. Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
- [5] *V. B. Matveev.* Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 216, 222, 425, 503.
- [6] *V. B. Matveev, M. A. Salle.* Darboux Transformations and Solitons. Berlin–Heidelberg: Springer, 1991.
- [7] *В. А. Аркадьев, А. К. Погребков, М. К. Поливанов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1984. Т. 133. С. 17.
- [8] *Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин.* ТМФ. 1984. Т. 61. № 2. С. 199.
- [9] *Р. А. Шапунов.* ДАН СССР. 1987. Т. 292. № 6. С. 1356.
- [10] *V. B. Matveev.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 6. P. 2965.
- [11] *V. B. Matveev.* Phys. Lett. A. 1992. V. 166. P. 205.
- [12] *H. Wahlquist.* Bäcklund transformation of potentials for the Korteweg–de Vries equation and the interaction of solutions with cnoidal waves. In: Bäcklund Transformations. NSF Res. Workshop Contact Transf., Nashville, 1974. Lect. Notes Math. V. 515. Ed. R. Miura. Berlin: Springer, 1976. P. 162.
- [13] *M. Wadati, H. Sanuki, K. Konno.* Progr. Theor. Phys. 1975. V. 53. P. 419.

- [14] *И. М. Кривчевер.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 117.
- [15] *M. Adler, J. Moser.* Commun. Math. Phys. 1978. V. 61. P. 1.
- [16] *A. Stahlhofen.* Ann. der Physik. 1992.
- [17] *C. Raisinariu, U. Sukhutame, A. Khare.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 1803.
- [18] *В. Б. Мамвеев.* Осциллирующие и безотражательные потенциалы, собственные числа на непрерывном спектре и их связь с уравнением КдФ. В сб.: Труды Всесоюзной конференции по дифференциальным уравнениям в частных производных, посвященной 75-летию академика И. Г. Петровского. Ред. П. С. Александров, О. А. Олейник. М.: МГУ, 1978. С. 378.
- [19] *R. Hirota.* Phys. Rev. Lett. 1971. V. 27. P. 1192.
- [20] *V. B. Matveev.* Trivial S -matrices, Wigner-von Neumann Resonances and Positon Solutions of the Integrable Systems. In: Algebraic and Geometrical Methods in Mathematical Physics. Proc. of International Workshop. Eds. A. Boutet de Monvel, V. A. Marchenko. Dordrecht: Kluwer, 1996. P. 343.
- [21] *Л. А. Бордаг, В. Б. Мамвеев.* ТМФ. 1978. Т. 34. С. 426.
- [22] *S. V. Manakov et al.* Phys. Lett. A. 1977. V. 63. P. 205.
- [23] *В. Б. Мамвеев.* ТМФ. 1973. Т. 15. С. 353.
- [24] *M. S. P. Eastham.* The Asymptotic Solution of Linear Differential Systems. Oxford: Clarendon Press, 1989.
- [25] *М. М. Скриганов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1973. Т. 38. С. 149.
- [26] *A. A. Stahlhofen.* Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 934.
- [27] *R. Beutler.* J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 7. P. 3098.
- [28] *R. Beutler, V. B. Matveev, A. Stahlhofen.* Phys. Scripta. 1994. V. 50. P. 9.
- [29] *V. B. Matveev, A. Stahlhofen.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 1957.
- [30] *R. Beutler, V. B. Matveev.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 1994. Т. 215. С. 38.
- [31] *S. Baran, M. Kovalev.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 6121.
- [32] *M. Kovalev.* Appl. Math. Lett. 1996. V. 9. № 2. P. 89.
- [33] *M. Kovalev.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5117.
- [34] *C. Schiebold.* Solutions of the sine-Gordon equation coming in clusters. Preprint Friedrich-Schiller-Universitat Jena Math/Inf/99/24, 1999.
- [35] *M. Klaus.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 182.
- [36] *В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов.* Описание парных взаимодействий, для которых рассеяние в квантовой системе трех одномерных частиц свободно от диффракционных эффектов. В сб.: Проблемы математической физики. Вып. 9. Ред. М. С. Бирман. Л.: Изд-во ЛГУ, 1979. С. 16.
- [37] *В. С. Буслаев, Н. А. Калитеевский.* ТМФ. 1987. Т. 70. С. 266.
- [38] *В. С. Буслаев, С. П. Меркурьев, С. П. Саликов.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1979. Т. 84. С. 16.
- [39] *E. Pelinovsky.* Module Ocean. Les Vagues Geantes. Preprint Université de la mediteranee Aix-Marseille II. Ecole Superieur de Mechanique de Marseille ESM2, 2001.
- [40] *C. Kharif, E. Pelinovsky, T. Talipova.* Physica D. 2000. V. 147. P. 83.
- [41] *К. Хари́ф, Е. Пелиновский, Т. Талипова, А. Слюняев.* Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. № 4. С. 190.
- [42] *F. Capasso, C. Sirtory, J. Faist, D. Sivco, S.-N. G. Chu, A. Cho.* Nature. 1992. V. 358. P. 565.