Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, Р. А. Усманов, Q -оператор и уравнение Дринфельда, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 370–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf195>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:47:49

© 2003 г.

А. А. Белавин*, Р. А. Усманов*

Q-ОПЕРАТОР И УРАВНЕНИЕ ДРИНФЕЛЬДА

Показано, что след по квантовому пространству произведения R -матриц, сплетающих два представления квантового дубля борелевской подалгебры аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$ (обычное двумерное и N -мерное циклическое), удовлетворяет TQ -уравнению.

Ключевые слова: квантовые группы, Q -оператор Бакстера, циклические представления.

1. ВВЕДЕНИЕ

В своих работах [1] Бакстер ввел Q -оператор, который он использовал для решения восьмивершинной модели. Q -операторы образуют семейство, коммутирующее с семейством трансфер-матриц $T(u)$, причем имеет место TQ -уравнение, связывающее два семейства между собой и являющееся ключевым для решения модели.

Алгебраическая структура Q -оператора в частном случае шестивершинной модели и связь между ним и R -матрицей киральной модели Поттса были изучены в работе Бажанова и Строганова [2], которые в корнях N -й степени из единицы (N – простое число) нашли N -мерное циклическое представление $\mathcal{L}$ алгебры Янга–Бакстера, связанной с R -матрицей обычной шестивершинной модели. След по N -мерному квантовому пространству тензорного произведения L -операторов обладает свойствами Q . В частности, он удовлетворяет TQ -уравнению.

Рассмотрим R -матрицу шестивершинной модели

$$\begin{aligned} R_{00}^{00} &= R_{11}^{11} = \rho \sin(\theta + \eta), & R_{01}^{01} &= R_{10}^{10} = \rho \sin \theta, \\ R_{01}^{10} &= \rho e^{i\theta} \sin \eta, & R_{10}^{01} &= \rho e^{-i\theta} \sin \eta, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\theta = -i \ln x$ – спектральный параметр, ρ, η – постоянные. $R(x)$ удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$R_{i_3 i_1}^{j_3 j_1}(x) R_{j_3 i_2}^{k_3 j_2}(y) R_{j_1 j_2}^{k_1 k_2}(xy^{-1}) = R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(xy^{-1}) R_{i_3 j_2}^{j_3 k_2}(y) R_{j_3 j_1}^{k_3 k_1}(x),$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, Московская обл., Россия

В работе [2] была решена система уравнений Янга–Бакстера

$$L_{i_3 i_1}^{j_3 j_1}(x) L_{j_3 i_2}^{k_3 j_2}(y) R_{j_1 j_2}^{k_1 k_2}(xy^{-1}) = R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(xy^{-1}) L_{i_3 j_2}^{j_3 k_2}(y) L_{j_3 j_1}^{k_3 k_1}(x), \quad (2)$$

где $L_{i\alpha}^{j\beta}$, $i, j = 0, 1$, $\alpha, \beta = 0, 1, \dots, N-1$, суть матричные элементы $L(x)$. Решение искалось в виде

$$L(x) = vL_+ + v^{-1}L_-, \quad (3)$$

где L_+ (L_-) не зависят от x и имеют верхний(нижний) треугольный вид, а v – спектральный параметр. Решение существует, если $q^N = e^{\eta N} = 1$ (N – целое число), и может быть записано в виде

$$\begin{aligned} (L_+)_{00} &= d_+ X, \\ (L_-)_{00} &= d_- Y, \\ (L_+)_{11} &= f_+ Y, \\ (L_-)_{11} &= f_- X, \\ (L_+)_{01} &= (g_+ Y + g_- X) Z, \\ (L_-)_{10} &= (h_+ Y + h_- X) Z^{-1}, \end{aligned} \quad (4)$$

где $(N \times N)$ -матрицы X, Y, Z удовлетворяют соотношениям

$$[X, Y] = 0, \quad ZX = \omega_1 XZ, \quad ZY = \omega_1^{-1} YZ.$$

Восемь параметров $d_+, d_-, f_+, f_-, g_+, g_-, h_+, h_-$ связаны двумя соотношениями:

$$g_- h_- = f_- d_+, \quad g_+ h_+ = f_+ d_-. \quad (5)$$

В той же работе [2] исследовались свойства трансфер-матриц, построенных с помощью оператора $L(x)$ для квадратной решетки $M \times M'$. Было замечено, что оператор

$$T_{\text{col}} = \mathcal{T}_{i_1 \dots i_n}^{j_1 \dots j_n} = \sum_{\{\alpha\}} \prod_{k=1}^{M'} (L_{i_k \alpha_{k+1}}^{j_k \alpha_k}) \quad (6)$$

обладает свойствами Q -оператора Бакстера шестивершинной модели. В частности,

$$T_{6v}(\theta) \mathcal{T}(\theta) = \sin^n \theta \mathcal{T}(\theta + \eta) + \sin^n(\theta + \eta) \mathcal{T}(\theta - \eta). \quad (7)$$

Оператор $\mathcal{T}(\theta)$, кроме спектрального параметра $\theta = -i \ln x$, зависит еще от шести произвольных параметров.

В работе [3] исследовались циклические представления аффинных алгебр и их тензорные произведения. Было, в частности, показано, что трансфер-матрица киральной модели Поттса совпадает со следом произведения сплетающих операторов, действующих на тензорном произведении двух циклических представлений квантового дубля борелевской подалгебры аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Последнюю для удобства мы будем обозначать U_B .

В настоящей работе мы покажем, что Q -оператор шестивершинной модели можно представить в виде следа произведения R -матриц, получаемых путем решения уравнения Дринфельда для U_B [4], [5]:

$$R(\pi \otimes \pi')\Delta(a) = (\pi' \otimes \pi)\Delta(a)R, \quad (8)$$

где $\Delta(a)$ – копроизведение в алгебре U_B , а $\pi = \pi_{1/2}$, $\pi' = \pi_{\text{cycle}}$ – два представления указанной алгебры.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим квантовый дубль борелевской подалгебры аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. По определению U_B является C -алгеброй с генераторами e_0, e_1, f_0, f_1, t , двумя центральными элементами z, z_0 и соотношениями

$$\begin{aligned} te_1 &= q^2 e_1 t, & tf_1 &= q^{-2} f_1 t, \\ te_0 &= q^{-2} e_0 t, & tf_0 &= q^2 f_0 t, \\ [e_1, f_1] &= \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}, & [e_0, f_0] &= -\frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ (\text{ad } e_i)^3 e_j &= 0, & (\text{ad } f_i)^3 f_j &= 0 \quad (i \neq j). \end{aligned} \quad (9)$$

Как нетрудно заметить, соотношения для генераторов U_B совпадают с таковыми для алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Алгебра U_B является алгеброй Хопфа, причем копроизведение дается формулами

$$\begin{aligned} \Delta(f_1) &= f_1 \otimes t^{-1} + z^{-1} \otimes f_1, \\ \Delta(e_1) &= e_1 \otimes 1 + zt \otimes e_1, \\ \Delta(f_0) &= f_0 \otimes t + z_0^{-1} \otimes f_0, \\ \Delta(e_0) &= e_0 \otimes 1 + z_0 t^{-1} \otimes e_0, \\ \Delta(t) &= t \otimes t, \\ \Delta(z) &= z \otimes z, \\ \Delta(z_0) &= z_0 \otimes z_0. \end{aligned} \quad (10)$$

В этой работе нам понадобятся следующие представления U_B .

1. Двумерное $\pi_{1/2}$:

$$\begin{aligned} \begin{cases} f_1 u_0 = u_1, \\ f_1 u_1 = 0, \end{cases} & \begin{cases} e_1 u_0 = 0, \\ e_1 u_1 = u_0, \end{cases} \\ \begin{cases} e_0 u_0 = x u_1, \\ e_0 u_1 = 0, \end{cases} & \begin{cases} f_0 u_0 = 0, \\ f_0 u_1 = x^{-1} u_1, \end{cases} \\ \begin{cases} t u_0 = q u_0, \\ t u_1 = q^2 u_1, \end{cases} & \begin{cases} z u_0 = u_0, \\ z u_1 = u_1, \end{cases} & \begin{cases} z_0 u_0 = z_0 u_0, \\ z_0 u_1 = z_0 u_1. \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

2. N -мерное циклическое π_{cycle} [4]:

$$\begin{cases}
 \begin{cases}
 f_1 u_0 = u_1, \\
 f_1 u_1 = u_2, \\
 f_1 u_2 = u_3, \\
 \dots\dots\dots \\
 f_1 u_{N-1} = \beta u_0,
 \end{cases}
 &
 \begin{cases}
 e_1 u_0 = \alpha u_{N-1}, \\
 e_1 u_1 = A_1 u_0, \\
 e_1 u_2 = A_2 u_1, \\
 \dots\dots\dots \\
 e_1 u_{N-1} = A_{N-1} u_{N-2},
 \end{cases} \\
 \begin{cases}
 e_0 u_0 = y u_1, \\
 e_0 u_1 = y u_2, \\
 e_0 u_2 = y u_3, \\
 \dots\dots\dots \\
 e_0 u_{N-1} = y \beta u_0,
 \end{cases}
 &
 \begin{cases}
 f_0 u_0 = y^{-1} \alpha u_{N-1}, \\
 f_0 u_1 = y^{-1} A_1 u_0, \\
 f_0 u_2 = y^{-1} A_2 u_1, \\
 \dots\dots\dots \\
 f_0 u_{N-1} = y^{-1} A_{N-1} u_{N-2},
 \end{cases} \\
 \begin{cases}
 t u_0 = \tau u_0, \\
 t u_1 = q^{-2} \tau u_1, \\
 t u_2 = q^{-4} \tau u_2, \\
 \dots\dots\dots \\
 t u_{N-1} = q^{-2(N-1)} \tau u_{N-1},
 \end{cases}
 &
 \begin{cases}
 z u_0 = z u_0, \\
 z u_1 = z u_1, \\
 z u_2 = z u_2, \\
 \dots\dots\dots \\
 z u_{N-1} = z u_{N-1},
 \end{cases} \\
 \begin{cases}
 z_0 u_0 = z_0 u_0, \\
 z_0 u_1 = z_0 u_1, \\
 z_0 u_2 = z_0 u_2, \\
 \dots\dots\dots \\
 z_0 u_{N-1} = z_0 u_{N-1}.
 \end{cases}
 \end{cases} \quad (12)$$

Здесь введены обозначения

$$A_n = \alpha \beta + \frac{\tau(q^{-2n} - 1) - \tau^{-1}(q^{2n} - 1)}{q(q - q^{-1})^2}, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (13)$$

Для простоты изложения мы будем далее везде рассматривать случай $N = 3$.

3. Q-ОПЕРАТОР

Пусть заданы два представления π, π' алгебры U_B . Рассмотрим тензорные произведения вида $\pi \otimes \pi'$. Из общей теории представлений квантовых групп известно следующее утверждение: если два представления $\pi \otimes \pi'$ и $\pi' \otimes \pi$ изоморфны ($\pi \otimes \pi' \cong \pi' \otimes \pi$), то существует сплетающий оператор $\mathcal{L}(\pi, \pi')$, осуществляющий этот изоморфизм: $\mathcal{L}(\pi, \pi'): \pi \otimes \pi' \rightarrow \pi' \otimes \pi$. Матрица $\mathcal{L}(\pi, \pi')$ может быть найдена из уравнения Дринфеляда [4]

$$\mathcal{L}(\pi, \pi') \Delta(a) = \tilde{\Delta}(a) \mathcal{L}(\pi, \pi'), \quad a \in U_B, \quad (14)$$

где $\tilde{\Delta}(a)$ получается из $\Delta(a)$ путем перестановки местами двух сомножителей (в каждом слагаемом), разделенных знаком тензорного произведения, то есть

$$\begin{aligned}\tilde{\Delta}(f_1) &= t^{-1} \otimes f_1 + f_1 \otimes z^{-1}, \\ \tilde{\Delta}(e_1) &= 1 \otimes e_1 + e_1 \otimes zt, \\ \tilde{\Delta}(f_0) &= t \otimes f_0 + f_0 \otimes z_0^{-1}, \\ \tilde{\Delta}(e_0) &= 1 \otimes e_0 + e_0 \otimes z_0 t^{-1}, \\ \tilde{\Delta}(t) &= t \otimes t, \\ \tilde{\Delta}(z) &= z \otimes z, \quad \tilde{\Delta}(z_0) = z_0 \otimes z_0.\end{aligned}\tag{15}$$

Положим теперь

$$\pi = \pi_{1/2}, \quad \pi' = \pi_{\text{cycle}}.\tag{16}$$

Подставляя (16) в уравнение Дринфельда (14), в котором $a = t$,

$$[\mathcal{L}t \otimes t]_{\alpha m}^{\beta n} = [t \otimes t\mathcal{L}]_{\alpha m}^{\beta n},\tag{17}$$

и учитывая соотношения (11), (12), получим, что отличными от нуля будут только те матричные элементы $\mathcal{L}_{\alpha m}^{\beta n}$, $\alpha = 0, 1$, $m, n = 0, 1, 2$, у которых $\alpha + m = \beta + n \pmod{3}$, то есть заряд сохраняется.

Пусть p, p_0 – центральные элементы представления $\pi_{1/2}$, а z, z_0 – центральные элементы π_{cycle} . Решение системы уравнений Дринфельда существует, если

$$pp_0 = 1, \quad zz_0 = 1, \quad p^3 = 1,\tag{18}$$

и дается формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{00}^{00} &= x\tau - q^2y, & \mathcal{L}_{10}^{01} &= y\tau(1-q), & \mathcal{L}_{11}^{02} &= py\tau q^2(1-q), \\ \mathcal{L}_{12}^{00} &= p^2yq\beta\tau(1-q), & \mathcal{L}_{01}^{01} &= px\tau q^2 - yp, & \mathcal{L}_{02}^{02} &= p^2q\tau x - p^2yq, \\ \mathcal{L}_{00}^{12} &= x\frac{\alpha}{z}(1-q), & \mathcal{L}_{02}^{11} &= x\frac{A_2q^2p^2}{z}(1-q), & \mathcal{L}_{01}^{10} &= x\frac{A_1qp}{z}(1-q), \\ \mathcal{L}_{11}^{11} &= x\frac{qp}{z} - y\frac{qp\tau}{z}, & \mathcal{L}_{12}^{12} &= x\frac{q^2p^2}{z} - y\frac{p^2\tau}{z}, & \mathcal{L}_{10}^{10} &= x\frac{1}{z} - y\frac{q^2\tau}{z},\end{aligned}\tag{19}$$

где x, y – “*evaluation*”-параметры, соответствующие представлениям π и π' .

Подставляя (19) в уравнения Янга–Бакстера, получим $p = 1$.

Матрицу $\mathcal{L}$ можно умножать как целое на произвольную нормировочную постоянную. Воспользуемся этим и разделим ее на $\sqrt{x/y}$, после чего, вводя спектральный параметр $u = \sqrt{x/y}$, получим матричные элементы

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{00}^{00} &= u\tau - q^2u^{-1}, & \mathcal{L}_{10}^{01} &= u^{-1}\tau(1-q), & \mathcal{L}_{11}^{02} &= u^{-1}\tau q^2(1-q), \\ \mathcal{L}_{12}^{00} &= u^{-1}q\beta\tau(1-q), & \mathcal{L}_{01}^{01} &= u\tau q^2 - u^{-1}, & \mathcal{L}_{02}^{02} &= q\tau u - u^{-1}q, \\ \mathcal{L}_{00}^{12} &= u\frac{\alpha}{z}(1-q), & \mathcal{L}_{02}^{11} &= u\frac{A_2q^2}{z}(1-q), & \mathcal{L}_{01}^{10} &= u\frac{A_1q}{z}(1-q), \\ \mathcal{L}_{11}^{11} &= u\frac{q}{z} - u^{-1}\frac{q\tau}{z}, & \mathcal{L}_{12}^{12} &= u\frac{q^2}{z} - u^{-1}\frac{\tau}{z}, & \mathcal{L}_{10}^{10} &= u\frac{1}{z} - u^{-1}\frac{q^2\tau}{z}.\end{aligned}\tag{20}$$

Нетрудно заметить, что решение (20) действительно имеет вид (3) с точностью до умножения спектрального параметра на произвольный множитель λ : $v = \lambda u$. Кроме того, всю матрицу $\mathcal{L}$ можно умножать как целое на произвольную нормировочную постоянную ρ .

Мы можем выразить восемь параметров $d_{\pm}$, $f_{\pm}$, $h_{\pm}$, $g_{\pm}$ в формулах (4) через шесть параметров α , β , τ , z , ρ , λ , от которых зависит решение уравнений Дринфеляда, и два дополнительных параметра a , b , принимающих произвольные действительные значения и отвечающих калибровочным степеням свободы. Сравнивая соотношения (4) и (20), имеем

$$\begin{aligned} d_+ &= \rho\lambda\tau, & d_- &= -\rho\lambda^{-1}q^2, \\ f_+ &= \rho\lambda z^{-1}, & f_- &= -\rho\tau\lambda^{-1}q^2z^{-1}, \\ h_+ &= \frac{\rho\tau\lambda^{-1}(1-q)}{3}(a^{-1} + ab^{-1}q + b\beta q^2), \\ h_- &= \frac{\rho\tau\lambda^{-1}(1-q)}{3}(a^{-1} + ab^{-1} + b\beta), \\ g_+ &= \frac{\rho\lambda(1-q)}{3z}(\alpha b^{-1} + A_1a + ba^{-1}A_2), \\ g_- &= \frac{\rho\lambda(1-q)}{3z}(\alpha b^{-1} + A_1aq^2 + A_2ba^{-1}q). \end{aligned} \quad (21)$$

Напомним, что A_1 и A_2 даются выражениями (13). Матрицы X , Y , Z в (4) имеют вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q^2 & 0 \\ 0 & 0 & q \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q^2 \end{pmatrix}, \quad (22)$$

$$Z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Нетрудно проверить, что соотношения (5) при этом будут выполнены.

Матрица калибровочного преобразования C записывается следующим образом:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ a^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & ab^{-1} & 0 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Трансфер-матрица $\mathcal{Q}(u) = \text{tr}_0 \mathcal{L}_{10}(u) \mathcal{L}_{20}(u) \dots \mathcal{L}_{n0}(u)$, построенная с помощью $\mathcal{L}(u)$, где след берется по N -мерному пространству, обладает важным свойством, позволяющим говорить о ней как о Q -операторе Бакстера [2]: она удовлетворяет TQ -уравнению.

4. TQ -УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим уравнение

$$R_{i_1 i_2}^{j_1 j_2}(u) \mathcal{L}_{j_1 \alpha}^{k_1 \beta}(uv) \mathcal{L}_{j_2 \beta}^{k_2 \gamma}(v) = \mathcal{L}_{i_2 \alpha}^{j_2 \beta}(uv) \mathcal{L}_{i_1 \beta}^{j_1 \gamma}(v) R_{j_1 j_2}^{k_1 k_2}(u). \quad (25)$$

Рис. 1

Его можно изобразить графически так, как показано на рис. 1.

При фиксированных индексах i_1, k_1 уравнение (25) является оператором в тензорном произведении $\mathbf{C}^2 \times \mathbf{C}^N$. Применим этот оператор к вектору $\psi_{k_2\gamma}$, принадлежащему ядру оператора $\mathcal{L}_{23}(v)$, то есть к вектору, удовлетворяющему равенству $\mathcal{L}_{j_2\beta}^{k_2\gamma}(v)\psi_{k_2\gamma} = 0$. Нетривиальное ядро у $\mathcal{L}_{23}(v)$ имеется только при некоторых специальных значениях $v = v_*$:

$$v_*^2 = \frac{c_1 d_1}{a_1 b_1} \quad \text{или} \quad v_*^2 = \frac{c_2 d_2}{a_2 b_2}.$$

Из рисунка видно, что ядро оператора $\mathcal{L}_{23}(v_*)$ представляет собой подпространство, инвариантное относительно тензорного произведения $\mathcal{L}_{13}(uv_*)R_{12}(u)$. Дополнение ядра, рассматриваемое как фактор-пространство, в этом случае также является инвариантным подпространством. Поэтому матрица оператора $\mathcal{L}_{13}(uv_*)R_{12}(u)$ имеет блочно-диагональный вид

$$\mathcal{L}_{13}(uv_*)R_{12}(u) = \begin{bmatrix} P_1 & * \\ 0 & P_2 \end{bmatrix},$$

где все блоки суть N -мерные квадратные матрицы, а звездочкой обозначены несущественные для нас матричные элементы. Мы здесь ввели следующий способ упорядочения векторов базиса: первые N векторов образуют ядро, а остальные N – его дополнение.

Пусть при некоторых значениях параметров $\mathcal{L}(v_*)$ имеют место равенства

$$P_1 = \phi_1 \mathcal{L}(uv_* \lambda), \quad P_2 = \phi_2 \mathcal{L}(uv_* \lambda^{-1}). \quad (26)$$

Тогда после перемножения n копий оператора $\mathcal{L}_{13}(uv_*)R_{12}(u)$ по пространствам с индексами 2 и 3 (см. рис. 2) и взятия следа мы получим уравнение

$$\tilde{\mathcal{Q}}(uv_*)T(u) = \phi_1^n \tilde{\mathcal{Q}}(uv_* \lambda) + \phi_2^n \tilde{\mathcal{Q}}(uv_* \lambda^{-1}), \quad (27)$$

где $\tilde{Q}(uv_*) = \text{tr}_3 \mathcal{L}_{13}(uv_*) \mathcal{L}_{1'3}(uv_*) \dots \mathcal{L}_{1(n)3}$, а $T(u)$ – обычная трансфер-матрица модели льда. Сделав замену $Q(u) = \tilde{Q}(uv_*)$, получаем TQ -уравнение.

Рис. 2

Доказательство сделанных утверждений можно найти в работе [5].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке грантов: РФФИ 01-02-16686, 99-01-01169, 00-15-96579; CRDF RP1-2254, INTAS 00-00055.

Список литературы

- [1] *R. I. Baxter.* Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 193; P. 323; 1973. V. 76. P. 48.
- [2] *V. V. Bazhanov, Yu. G. Stroganov.* J. Stat. Phys. 1990. V. 51. P. 799–817.
- [3] *V. Tarasov.* Int. J. Mod. Phys. A. Sup. 1B. 1992. V. 7. P. 963–975.
- [4] *M. Jimbo.* Topics from representations of $U_q(\{g\})$ – An introductory guide to physicists. Preprint Kyoto University. Japan, 1991.
- [5] *A. A. Belavin, A. V. Odesskii, R. A. Usmanov.* New relations in the algebra of the Baxter Q-operators. hep-th/0110126.