Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Сантанжело, Вычисление энергии Казимира с помощью спектральных функций, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 98–117

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1953>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 12:34:17

ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА С ПОМОЩЬЮ СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Рассмотрено применение эллиптических дифференциальных операторов и связанных с ними спектральных функций в некоторых задачах квантовой теории поля. Подчеркнута роль дзета-функций и следов ядер теплопроводности при регуляризации энергии Казимира. На простых примерах обсуждается процедура перенормировки.

1. ЭНЕРГИЯ НУЛЕВЫХ КОЛЕБАНИЙ В ПОЛЕВОМ КВАНТОВАНИИ

В данном разделе вводится понятие энергии Казимира. Рассмотрен простой пример, в котором энергия Казимира вычисляется с помощью двух различных методов регуляризации. Показано, что оба метода взаимосогласованы после перенормировки [1]–[4].

1.1. Свободное массивное нейтральное скалярное поле в неограниченном пространстве-времени Минковского. Рассмотрение проблемы вакуумной энергии (энергии основного состояния) в квантовой теории поля удобно начать с обсуждения простого примера свободного массивного нейтрального скалярного поля в неограниченном пространстве-времени Минковского. Классическая плотность лагранжиана в данном случае имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2,$$

где m – масса, соответствующая полю ϕ . Из формализма Эйлера–Лагранжа следует классическое уравнение Клейна–Гордона

$$(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0.$$

Канонически-сопряженный данному полю импульс определяется как

$$\pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi,$$

*Departamento de Física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina. E-mail: mariel@obelix.fisica.unlp.edu.ar

так что классический гамильтониан имеет вид

$$H = \int d^3x \frac{1}{2} [\pi^2 + (\nabla\phi)^2 + m^2\phi^2].$$

Переход к квантовой теории поля достигается заменой функций ϕ и π операторно-значными функциями, скобок Пуассона коммутаторами и наложением при равных временах условия

$$[\hat{\phi}(t, \vec{x}), \hat{\pi}(t, \vec{x}')] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{x}'), \quad (1)$$

правые части остальных коммутаторов равны нулю.

Перейдем к импульсному представлению, где $k^\mu = (k^0, \vec{k}) = (\omega_{\vec{k}}, \vec{k})$, $\omega_{\vec{k}} = \omega_{-\vec{k}} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} > 0$, и оба поля могут быть разложены следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(t, \vec{x}) &= \int d\tilde{k} [\hat{a}(\vec{k})e^{-ikx} + \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ikx}], \\ \hat{\pi}(t, \vec{x}) &= -i \int d\tilde{k} [\hat{a}(\vec{k})e^{-ikx} - \hat{a}^\dagger(\vec{k})e^{ikx}] = \partial_0 \hat{\phi}(t, \vec{x}). \end{aligned}$$

Здесь

$$d\tilde{k} = \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}}}$$

— лоренц-инвариантная мера. Следует обратить внимание на то, что величины $\omega_{\vec{k}}$ являются квадратными корнями из собственных значений оператора $\Delta + m^2$.

Условие квантования (1) записывается в виде

$$[\hat{a}(\vec{k}), \hat{a}^\dagger(\vec{k}')] = (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}').$$

Правые части всех остальных коммутаторов равны нулю. Оператор Гамильтона принимает вид

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega_{\vec{k}} [\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + \hat{a}(\vec{k})\hat{a}^\dagger(\vec{k})] = \\ &= \frac{1}{2} \int d\tilde{k} \omega_{\vec{k}} [2\hat{a}^\dagger(\vec{k})\hat{a}(\vec{k}) + (2\pi)^3 2\omega_{\vec{k}} \delta^3(0)]. \end{aligned}$$

Определим вакуумное состояние условиями

$$\hat{a}(\vec{k})|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \quad \langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{2} \int d^3k \omega_{\vec{k}} \delta^3(0).$$

Множитель $\delta^3(0)$ в приведенных формулах не имеет математического смысла и появляется из-за бесконечного размера системы. Чтобы придать смысл последнему выражению, рассматриваемую систему помещают в куб объема V , накладывают периодические граничные условия на поле и затем устремляют объем к бесконечному пределу. Тогда

$$\langle 0|\hat{H}|0\rangle = \frac{V}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \sqrt{\vec{k}^2 + m^2},$$

где V – (бесконечный) объем пространства. Из последнего выражения видно, почему энергия нулевых колебаний на единицу объема расходится в случае свободного скалярного поля: расходимость появляется из-за суммы энергий нулевых колебаний бесконечного числа осцилляторов. Вводя нормальное упорядочение, можно положить вакуумное значение энергии для свободной теории в неограниченном пространстве Минковского равным нулю. Но тогда возникает естественный вопрос: каково значение вакуумной энергии в присутствии фонового поля и/или когда квантованное поле занимает ограниченную область пространства и, таким образом, зависит от граничных условий?

Энергия Казимира [2] – это вакуумная энергия, вычисленная при наличии дополнительных условий, упомянутых в приведенном вопросе.

1.2. Безмассовое скалярное поле, удовлетворяющее граничным условиям Дирихле в одном пространственном измерении. Допустим, что поле заключено между двумя параллельными пластинами, разделенными расстоянием a в направлении x . Поле удовлетворяет граничным условиям на пластинах

$$\phi(t, 0, y, z) = \phi(t, a, y, z) = 0.$$

В этом случае отрицательно- и положительно-частотные компоненты поля пропорциональны $\sin k_n x$, где $k_n = n\pi/a$, $n = 1, 2, \dots$, и $\omega_n = (k_n^2 + k_y^2 + k_z^2)^{1/2}$. Таким образом, вакуумная энергия на единицу площади пластин дается выражением

$$\frac{E_V}{A} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 + k_y^2 + k_z^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Как и ожидалось, эта вакуумная энергия на единицу поперечной площади расходится: расходится как ряд, так и интеграл. Чтобы интерпретировать данное выражение для энергии, следует, как обычно, регуляризовать его, изолировать расходимости и затем ренормировать (если возможно) классическую энергию исходя из физических предположений.

Первый метод, который мы применим, известен как регуляризация на основе дзета-функции [5], [6]. Он основывается на аналитических свойствах дзета-функции оператора, который в данном случае есть минус лапласиан. Формальное определение спектральной функции, известной как дзета-функция, будет дано в следующем разделе.

Определим величину¹⁾

$$\frac{E_V}{A} = \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right)^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1}. \quad (2)$$

Здесь s – комплексная переменная с достаточно большой вещественной частью $\text{Re}(s)$, чтобы обеспечить сходимость. В этой области рассматриваемое выражение будет определять аналитическую по s функцию. Вакуумная энергия определяется через аналитическое продолжение функции к точке $s = -1$. Параметр μ размерности массы введен,

¹⁾ Для простоты мы сохраняем то же обозначение и для перенормированной величины.

чтобы сделать выражение под знаком суммы в (2) безразмерным. Он должен исчезать из любого физически осмысленного результата.

Теперь, используя представление [7]

$$z^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dt t^{s-1} e^{-zt}, \quad \operatorname{Re} s > 0, \quad \operatorname{Re} z > 0, \quad (3)$$

уравнение (2) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{E_V}{A} = & \frac{\mu}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty dt t^{\frac{s}{2}-1} \times \\ & \times \exp \left\{ \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right) t \right\} \Big|_{s=-1}. \end{aligned}$$

Для достаточно больших $\operatorname{Re} s$ сумму и интеграл можно поменять местами. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{E_V}{A} = & \frac{\mu}{2} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty dt t^{\frac{s}{2}-1} e^{-(\frac{n\pi}{a\mu})^2 t} \int_{-\infty}^\infty \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \times \\ & \times \exp \left\{ - \left[\left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right] t \right\} \Big|_{s=-1}. \end{aligned}$$

Оба гауссовых интеграла в последнем выражении вычисляются. Используя опять представление (3), можно получить

$$\frac{E_V}{A} = \frac{\mu^3}{8\pi} \frac{\Gamma(\frac{s}{2} - 1)}{\Gamma(\frac{s}{2})} \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^{-s+2} \Big|_{s=-1} = \frac{\mu^3}{4\pi(s-2)} \left(\frac{a\mu}{\pi} \right)^{s-2} \zeta_R(s-2) \Big|_{s=-1},$$

где использовано определение дзета-функции Римана

$$\zeta_R(s) = \sum_{n=1}^\infty n^{-s}, \quad \operatorname{Re} s > 1.$$

Последний ряд определяет аналитическую функцию при $\operatorname{Re} s > 1$, а ее аналитическое продолжение на всю s -плоскость имеет всего один простой полюс при $s = 1$. В частности, дзета-функция при $s = -3$ равняется $1/120$.

Таким образом, получаем окончательный результат для вакуумной энергии

$$\frac{E_V}{A} = -\frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (4)$$

Регуляризация с помощью дзета-функции в данном простом случае дает конечный результат, дальнейшей перенормировки не требуется.

Теперь сравним результат (4) с результатом, полученным другим методом регуляризации – методом экспоненциального обрезания. Как мы увидим позже, этот метод основан на использовании другой спектральной функции, известной как след ядра теплопроводности. Определим

$$\frac{E_V}{A} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \exp \left\{ - \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} t \right\} \Big|_{t=0}.$$

Экспонента вводится для того, чтобы обеспечить сходимость, давая таким образом возможность переставить сумму и интеграл. Параметр μ размерности массы снова произволен. Последнее соотношение может быть также записано в виде

$$\frac{E_V}{A} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y dk_z}{(2\pi)^2} \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ - \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_y}{\mu} \right)^2 + \left(\frac{k_z}{\mu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} t \right\} \Big|_{t=0} = \\ = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^{\infty} dk k \sum_{n=1}^{\infty} \exp \left\{ - \left(\left(\frac{n\pi}{a\mu} \right)^2 + \left(\frac{k}{\mu} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} t \right\} \Big|_{t=0}.$$

Меняя местами сумму и интеграл и делая замену переменных, получим

$$\frac{E_V}{A} = -\frac{\mu^3}{2} \frac{d}{dt} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\left(\frac{n\pi}{a\mu}\right)^2}^{\infty} dk e^{-k^{\frac{1}{2}} t} \Big|_{t=0}.$$

Теперь сумма может быть вычислена с помощью формулы Эйлера–Маклорена

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = -\frac{1}{2} f(0) + \int_0^{\infty} f(x) dx - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} B_{2k} f^{(2k-1)}(0). \quad (5)$$

Можно показать, что окончательный результат для вакуумной энергии в данной схеме регуляризации дается выражением

$$\frac{E_V}{A} = \frac{3a\mu^4}{2\pi^2 t^4} \Big|_{t=0} - \frac{\mu^3}{4\pi t^3} \Big|_{t=0} - \frac{\pi^2}{1440a^3}. \quad (6)$$

Обратим внимание, что в формуле (6) остаются две расходимости в виде полюсов. Первый расходящийся член в (6) есть вакуумная энергия всего пространства (она получается из интеграла в уравнении (5)). Вторая расходимость связана с модой $n = 0$ (из первого члена в правой части того же уравнения) и, таким образом, возникает из-за граничных условий. Обе расходимости могут быть исключены с помощью условия $E_V/A \rightarrow 0$, когда $a \rightarrow \infty$. Это условие можно рассматривать как перенормировку классической энергии, которая в силу геометрии данной задачи имеет вид

$$E_{\text{class}} = paA + \sigma A,$$

где p – давление, σ – поверхностное натяжение. Остающаяся конечная часть в (6) находится в согласии с результатом дзета-регуляризации (4). Мы рассмотрели простой пример (безмассовое поле и плоские границы). Далее мы изучим взаимосвязь между этими двумя методами регуляризации и обсудим перенормировку энергии Казимира в более общих случаях.

2. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ И ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

В предыдущем разделе была вычислена энергия нулевых колебаний с помощью двух различных методов регуляризации: на основе дзета-функции и экспоненциального обреза. Они основаны на использовании определенных функций от спектра данного дифференциального оператора, называемых спектральными функциями. В данном разделе рассматриваются условия, при которых эти функции могут быть определены, и некоторые их свойства [8]–[12].

2.1. Дифференциальные операторы на компактных многообразиях без границы. Пусть M – компактное многообразие без границы размерности n , E – комплексное векторное расслоение на M .

Дифференциальный оператор с частными производными порядка m , действующий на слои E , может быть записан в локальных координатах в виде

$$A = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha, \quad D_x^\alpha = \prod_{j=1}^n \left(-i \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{\alpha_j}, \quad |\alpha| = \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

Коэффициенты $a_\alpha(x)$ являются в общем случае $(q \times q)$ -матрицами.

В качестве примера рассмотрим оператор

$$-\frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx} + 1.$$

В этом случае $n = 1$, $m = 2$, т.е. $j = 1$, $|\alpha| = \alpha_1 \leq 2$. Оператор может быть записан в компактной форме в виде

$$\sum_{\alpha_1 \leq 2} a_{\alpha_1}(x) (-i)^{\alpha_1} \left(\frac{d}{dx_1} \right)^{\alpha_1}.$$

Коэффициенту $a_0(x) = 1$ соответствует $\alpha_1 = 0$; коэффициент, соответствующий $\alpha_1 = 1$, есть $a_1(x) = ix$, а коэффициенту $a_2(x) = 1$ соответствует $\alpha_1 = 2$.

Символ оператора A определяется как

$$\sigma(A) = \sigma(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Это полином порядка m по дуальной переменной ξ , получаемый формальной заменой D_x^α мономом ξ^α . Действие оператора на функцию из области его определения может быть записано с помощью символа этого оператора в виде

$$Af(x) = \int d\xi e^{ix\xi} \sigma(x, \xi) \tilde{f}(\xi),$$

где $\tilde{f}(\xi)$ – фурье-образ функции $f(x)$.

Для оператора из предыдущего примера $\sigma(x, \xi) = \xi^2 + ix\xi + 1$. Легко показать, что

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x\frac{d}{dx} + 1\right)f(x) = \int d\xi e^{ix\xi}(\xi^2 + ix\xi + 1)\tilde{f}(\xi).$$

Главный символ — это часть символа с наиболее высоким порядком. Он является однородным полиномом степени m по ξ ,

$$\sigma_m(A) = \sigma_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\xi^\alpha.$$

В нашем примере $\sigma_2(x, \xi) = \xi^2$.

Говорят, что дифференциальный оператор *эллиптичен*, если его главный символ обратим при $|\xi| = 1$ (отсутствует нулевое собственное значение при $|\xi| = 1$ или, что эквивалентно, $\det \sigma_m(x, \xi) \neq 0$ при $|\xi| = 1$).

В нашем примере эллиптичность оператора очевидна.

Для оператора A его резольвентой является оператор $(A - \lambda I)^{-1}$. Луч $\mathcal{K} = \{\arg \lambda = \theta\}$ в комплексной плоскости λ называется *лучом минимального роста резольвенты*, если на таком луче нет собственных значений главного символа, т.е. уравнение

$$\sigma_m(x, \xi)u = \lambda u$$

имеет только тривиальное решение для $\lambda \in \mathcal{K}$. Можно показать, что вдоль такого луча L^2 -норма резольвенты есть $O(|\lambda|^{-1})$. В нашем примере уравнение $\xi^2 u = \lambda u$ имеет только тривиальное решение для любого $\lambda \neq \xi^2$. Так как число ξ вещественно, любой луч в $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$ является лучом минимального роста.

2.2. Комплексные степени дифференциального оператора. Для эллиптического дифференциального оператора A с лучом минимального роста $\mathcal{K}$ и $\operatorname{Re} s > 0$ можно определить оператор

$$A^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где кривая Γ начинается на ∞ , подходит вдоль луча $\mathcal{K}$ к малому кругу в начале координат и далее идет обратно на ∞ вдоль луча. Заметим, что такая кривая обходит собственные значения главного символа по часовой стрелке.

Для описания оператора A^{-s} можно построить аппроксимацию $B(\lambda)$ резольвенты $(A - \lambda I)^{-1}$, известную как параметрикс. Параметрикс воспроизводит поведение резольвенты при $\lambda \rightarrow \infty$ вдоль луча минимального роста [8].

Если рассматривать λ как часть главного символа оператора A , параметрикс можно найти в виде

$$\sigma(B) \sim \sum_{j=0}^{\infty} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$$

при налагаемом условии

$$\sigma(B(A - \lambda I)) = I.$$

Коэффициенты b_{-m-j} известны как коэффициенты Сили. Можно проверить (с помощью формулы для символа композиции операторов), что они удовлетворяют следующему набору алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} b_{-m}(a_m - \lambda) &= 1, \\ b_{-m-l}(a_m - \lambda) + \sum (\partial_\xi^\alpha b_{-m-j})(D_x^\alpha a_{m-k}) &= 0, \quad l > 0. \end{aligned}$$

Здесь сумма должна быть взята по всем $k + j + |\alpha| = l$ и $j < l$, a_{m-k} – символы различных порядков дифференциального оператора A . Аппроксимация символа оператора A^{-s} дается выражением

$$\sigma(A^{-s}) \sim \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} b_{-m-j}(x, \xi, \lambda) d\lambda.$$

Исходя из этого выражения, можно показать, что для $\operatorname{Re} ms > n$ ядро $K_{-s}(x, y)$ оператора A^{-s} непрерывно. Для $x \neq y$ оно продолжается на всю плоскость s . Для $x = y$ его можно аналитически продолжить до мероморфной функции, единственные сингулярности которой – простые полюсы в точках $s = (n - j)/m$, $j = 0, 1, \dots$. Каждый полюс возникает из-за определенного члена в предыдущем выражении, и вычеты, таким образом, определяются интегралами коэффициентов Сили вдоль контура Γ .

2.3. Дзета-функция. Связь с собственными значениями. Первой функцией, которую мы рассмотрим для заданного эллиптического оператора A , будет дзета-функция, определенная как след:

$$\zeta(A, s) = \operatorname{tr} A^{-s}.$$

Аналитические свойства дзета-функции получаются из свойств ядра $K_{-s}(x, x)$. Вычеты в полюсах функции $\zeta(A, s)$ являются интегралами по многообразию M от вычетов, соответствующих $K_{-s}(x, x)$, и, следовательно, определяются коэффициентами Сили. Когда оператор обладает полным ортогональным набором собственных функций, его дзета-функция может быть выражена через соответствующие собственные значения.

Предположим, что на расслоении гладко определено эрмитово скалярное произведение и элемент объема dv гладко определен на M . Если оператор A нормален по отношению к этим структурам ($A^\dagger A = AA^\dagger$), то он обладает полным ортонормированным набором собственных функций $A\phi_k = \lambda_k \phi_k$, и можно записать

$$K_{-s}(x, y) dv_y = \sum_k \lambda_k^{-s} \phi_k(x) \phi_k^\dagger(y) dv_y.$$

Полагая $x = y$ и интегрируя по M , имеем

$$\zeta(A, s) = \text{tr } A^{-s} = \sum_k \lambda_k^{-s}. \quad (7)$$

Рассмотрим в качестве примера на единичном круге оператор

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + P,$$

где P – проектор на нулевые моды. Собственные значения оператора A суть $\lambda_n = n^2$ для $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ и $\lambda_0 = 1$ для нулевой моды. Таким образом,

$$\zeta(A, s) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2)^{-s} + 1 = 2\zeta_R(2s) + 1.$$

Известно, что эта дзета-функция Римана аналитична при $\text{Re } 2s > 1$, т.е. $\text{Re } s > 1/2 = n/m$. Ее аналитическое продолжение имеет простой полюс при $2s = 1$.

2.4. Тепловое ядро и его след. Если все собственные значения главного символа принадлежат области S_0 : $-\pi/2 + \varepsilon < \arg \lambda < \pi/2 - \varepsilon$, то спектр оператора A принадлежит сектору S_α : $-\pi/2 + \varepsilon < \arg(\lambda + \alpha) < \pi/2 - \varepsilon$ для некоторого $\alpha > 0$ и можно определить оператор

$$e^{-At} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} e^{-\lambda t} (A - \lambda I)^{-1} d\lambda, \quad t > 0,$$

где Γ – граница S_α . Можно показать, что e^{-At} является фундаментальным решением уравнения теплопроводности $Au + \partial u / \partial t = 0$ с начальным условием $u(x, 0) = \delta(x)$. Поэтому оператор e^{-At} называется ядром теплопроводности оператора A .

Аппроксимация резольвенты $B(\lambda)$ может быть использована в предыдущем интеграле в пределе $t \rightarrow +0$. Таким образом получается асимптотическое разложение для e^{-At} по увеличивающимся (в общем случае нецелочисленным) степеням t . Коэффициенты в этом разложении также определяются коэффициентами Сили.

Как и ранее, если A обладает полным набором собственных функций, ядро оператора e^{-At} можно записать в виде

$$K(t, x, y) = \sum_k e^{-\lambda_k t} \phi_k(x) \phi_k^\dagger(y).$$

След

$$h(A, t) = \text{tr } e^{-At} = \sum_k e^{-\lambda_k t} \quad (8)$$

является второй спектральной функцией, которую мы будем в дальнейшем использовать.

Существует тесная взаимосвязь между дзета-функцией оператора и следом ядра теплопроводности. В самом деле, из соотношений (7) и (8) имеем

$$\zeta(A, s) = \sum_k \lambda_k^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz \sum_k e^{-\lambda_k z} z^{s-1} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dz h(A, z) z^{s-1}, \quad (9)$$

т.е. эти спектральные функции связаны друг с другом так называемым преобразованием Меллина.

2.5. Эллиптические граничные системы. Выше мы рассматривали многообразия без границы. Как распространить введенные определения на многообразия с границей? Рассмотрим компактное многообразие M размерности n с гладкой границей ∂M . Будем обозначать $x = (x_1, \dots, x_{n-1})$ координаты на ∂M в каждой локальной координатной системе. Пусть $t \in \mathbb{R}$ — внутренняя нормаль к границе. Таким образом, $(x, t) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим через $\mathbb{R}_+^n$ полупространство $t \geq 0$. Будем рассматривать в $\mathbb{R}_+^n$ дифференциальный оператор порядка m ,

$$A = \sum_{j=0}^m A_j(x, t) D_t^{m-j}, \quad D_t = -i \frac{\partial}{\partial t},$$

где A_j — дифференциальный оператор порядка не выше j на $\mathbb{R}^{n-1}$. Тогда, обозначая через (ξ, τ) символьные переменные, соответствующие (x, t) , имеем

$$\sigma(A) = \sum_j \sigma(A_j)(x, t, \xi) \tau^{m-j}.$$

Главный символ

$$\sigma_m = \sum_j \sigma_j(A_j)(x, t, \xi) \tau^{m-j}.$$

Кроме того, определим главный символ в частных производных

$$\sigma'_m = \sum_j \sigma_j(A_j)(x, 0, \xi) D_t^{m-j}.$$

Предположим, что вблизи границы заданы операторы (определяющие граничные условия)

$$B_j = \sum_{k=1}^m B_{jk} D_t^{m-k}, \quad 1 \leq j \leq \frac{mq}{2},$$

где B_{jk} — система дифференциальных операторов $((1 \times q)$ -матриц), действующих на $\mathbb{R}^{n-1}$. Рассмотрим случай, когда эти граничные операторы просто мультипликативны. Тогда

$$\sigma(B_j) = \sum_{k=1}^m \sigma(B_{jk}) \tau^{m-k}, \quad \sigma'(B_j) = \sum_{k=1}^m \sigma(B_{jk}) D_t^{m-k}.$$

Набор операторов $A, B_1, \dots, B_{mq/2}$ составляет *эллиптическую граничную систему*, если A эллиптивен и для произвольного $g = (g_1, \dots, g_{mq/2})$, $x \in \mathbb{R}^{n-1}$ и $\xi \neq 0$, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, существует единственное решение следующей задачи:

$$\begin{aligned} \sigma'_m(A)(x, \xi, D_t)u &= 0, \quad t > 0, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= 0, \\ \sigma'(B_j)(x, \xi, D_t)u &= g_j \quad \text{при } t = 0, \quad j = 1, \dots, \frac{mq}{2}. \end{aligned}$$

Эти условия на $u(t)$ также известны как условия Лопатинского–Шапиро [12]. Когда они выполняются, можно определить оператор A_B как оператор A , действующий на функции u такие, что $B_j u = 0$.

Набор $A, B_1, \dots, B_{mq/2}$ составляет *сильную эллиптическую граничную систему* на конусе $\mathcal{K} \subset \mathbb{C}$, включая начало координат, если

- а) для $(\xi, \tau) \neq (0, 0)$ $\sigma_m(A)$ не имеет собственных значений на $\mathcal{K}$,
- б) для любого x и любых $(\xi, \lambda) \neq (0, 0)$, где $\lambda \in \mathcal{K}$, граничная задача

$$\begin{aligned}\sigma'_m(A)(x, \xi, D_t)u &= \lambda u, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) &= 0, \\ \sigma'(B_j)(x, \xi, D_t)u &= g_j \quad \text{при } t = 0, \quad j = 1, \dots, \frac{mq}{2},\end{aligned}$$

имеет единственное решение. Заметим, что эти условия сводятся к условиям Лопатинского–Шапиро для $\lambda = 0$. Конус $\mathcal{K}$ известен как конус Агмона [11].

При выполнении условия сильной эллиптичности существует аппроксимация резольвенты $(A_B - \lambda)^{-1}$ [9], с помощью которой можно получить, что

$$(A_B)^{-s} = \frac{i}{2\pi} \int_{\Gamma} \lambda^{-s} (A_B - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

где Γ – кривая на конусе, на которой существует оператор $(A_B - \lambda I)^{-1}$. Коэффициенты в разложении параметрикса должны теперь удовлетворять не только условию обратимости оператора $A_B - \lambda I$, но и граничным условиям. Тогда кроме объемных коэффициентов Сили b_{-m-j} появляются новые граничные коэффициенты d_{m-j} , и их определение приводит к набору дифференциальных (а не алгебраических) уравнений.

Условия, определяющие структуру полюсов $K_{-s}(x, y)$, похожи на аналогичные условия в случае отсутствия границы. Однако в данном случае вычеты полюсов определяются суммой объемных интегралов коэффициентов b и граничных интегралов коэффициентов d . Дзета-функция может быть, как и ранее, определена как след $(-s)$ -й степени. В частности, если оператор A_B имеет полный набор собственных функций, то имеют место разложения (7) и

$$h(A_B, t) = \sum_k e^{-\lambda_k t}. \quad (10)$$

Обе спектральные функции (7) и (10) опять связаны преобразованием Меллина.

В качестве примера рассмотрим лапласиан на границе цилиндра с граничными условиями Дирихле. Пусть $A = -\partial_x^2 - \partial_y^2$ действует на функции $\varphi(x, y)$ такие, что $\varphi(0, y) = \varphi(1, y) = 0$ и эти функции периодичны в направлении y . При этом граница соответствует точкам $x = 0, x = 1$. Граничный оператор просто мультипликативен, $B = 1$. Обозначим через (τ, ξ) переменные Фурье, связанные с (x, y) . Тогда

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \sigma_2(A) = \xi^2 + \tau^2, \\ \sigma(B) &= \sigma_0(B) = \sigma'_0(B) = 1.\end{aligned} \quad (11)$$

Можно показать, что дифференциальный оператор A эллиптичен. Действительно, $\sigma_2(A) = \xi^2 + \tau^2 \neq 0$ для $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$, так как $\tau, \xi \in \mathbb{R}$.

Можно также показать, что граничная задача эллиптична в слабом (по Лопатинскому–Шапиро) смысле. Рассмотрим границу $x = 0$. Тогда x является переменной, нормальной к границе. Дифференциальное уравнение

$$\sigma'_2(A) u = (-\partial_x^2 + \xi^2) u = 0$$

имеет при $\xi \neq 0$ решение вида

$$u = C e^{|\xi|x} + D e^{-|\xi|x}.$$

Из условия убывания этого решения при $x \rightarrow \infty$ следует, что $C = 0$. Тогда задача $u(0, \xi) = g$ имеет при любых g единственное решение $D = g$, которое показывает, что условия слабой эллиптичности выполняются при $x = 0$. По аналогии можно показать, что они выполняются и при $x = 1$.

Дифференциальный оператор A имеет конус Агмона. В самом деле, уравнение

$$\sigma_2 u = (\tau^2 + \xi^2) u = \lambda u$$

с $(\tau, \xi) \neq (0, 0)$ имеет нетривиальные решения только при $\lambda = \tau^2 + \xi^2 \in \mathbb{R}_+$, т.е. дифференциальный оператор имеет конус Агмона $\mathcal{K} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$.

Можно также показать, что для рассматриваемого примера граничная задача сильно эллиптична (имеет конус Агмона). Действительно, снова рассмотрим границу $x = 0$. Дифференциальное уравнение

$$\sigma'_2(A) u = (-\partial_x^2 + \xi^2) u = \lambda u$$

имеет при $(\xi, \lambda) \neq (0, 0)$ решение вида

$$u = C e^{\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} x} + D e^{-\sqrt{\xi^2 - \lambda^2} x}.$$

Из условия убывания решения при $x \rightarrow \infty$ следует, что $C = 0$, т.е. задача $u(0, \xi, \lambda) = g$ имеет при любых g единственное решение $D = g$. Отсюда с учетом того, что дифференциальный оператор A имеет конус Агмона, следует, что граничная задача сильно эллиптична на $\mathcal{K} = \mathbb{C} - \mathbb{R}_+$.

3. СРАВНЕНИЕ ДЗЕТА-РЕГУЛЯРИЗАЦИИ И ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ЭНЕРГИИ КАЗИМИРА

В данном разделе показано, что в общем случае как дзета-регуляризация, так и экспоненциальная регуляризация дают расходящиеся ответы для энергии Казимира. Устанавливается взаимосвязь между этими регуляризациями и обсуждается существование единственного, физически осмысленного после перенормировки, результата [13], [14].

3.1. Общий результат. В первом разделе мы изучили простой пример вычисления энергии Казимира: безмассовое скалярное поле между “проводящими” пластинами. В этом примере мы получили конечный результат для вакуумной энергии в дзета-регуляризации и полюсную расходимость при экспоненциальном обрезании. Более того, зависимость расходящихся членов от расстояния между пластинами соответствовала классическому действию и отличалась от зависимости конечной части от расстояния между пластинами. Таким образом, расходимости можно устранить перенормировкой.

Возникает несколько вопросов. Возможна ли перенормировка в более общем случае? Дает ли дзета-функция всегда конечный ответ? Всегда ли расходимости в экспоненциальной регуляризации присутствуют в виде полюсов? Какова в более общем случае взаимосвязь между результатами обеих регуляризаций?

Чтобы ответить на эти вопросы, будем использовать общие результаты раздела 2 о структуре дзета-функции и следа ядра теплопроводности, приложенные к операторам второго порядка.

Напомним, что, например, в скалярном случае вакуумная энергия дается формулой

$$E_V = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n,$$

где ω_n – энергии нулевых колебаний. Рассмотрим скалярное поле в $(d+1)$ -мерном пространстве-времени, где d – размерность компактного пространственного многообразия с (или без) гладкой границей.

Пусть $\omega_n = \lambda_n^{1/2}$, где λ_n удовлетворяют соответствующей граничной задаче

$$D_B \varphi_n = \eta_n \varphi_n, \quad (12)$$

где

$$\eta_n = \begin{cases} \lambda_n & \text{при } D_B = D, \\ 0 & \text{при } D_B = B. \end{cases}$$

Здесь D – дифференциальный оператор второго порядка на M , B – оператор, определяющий граничные условия.

Дзета-регуляризованная [5], [6] вакуумная энергия определяется равенствами

$$E_\zeta \equiv \frac{\mu}{2} \sum_n \left(\frac{\lambda_n}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1} = \frac{\mu}{2} \zeta \left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2} \right) \Big|_{s=-1} = \frac{\mu}{2} \operatorname{tr} \left(\frac{D_B}{\mu^2} \right)^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1}. \quad (13)$$

Регуляризованное с помощью экспоненциального обрезания выражение дается формулой

$$E_{\exp} \equiv \frac{\mu}{2} \sum_n \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\mu} \exp \left\{ -t \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\mu} \right\} \Big|_{t=0} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left(h \left(t, \frac{D_B^{\frac{1}{2}}}{\mu} \right) \right) \Big|_{t=0}, \quad (14)$$

где

$$h\left(t, \frac{D_B^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right) = \sum_n \exp\left\{-t \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right\} = \operatorname{tr}\left(\exp\left\{-\frac{t}{\mu} D_B^{\frac{1}{2}}\right\}\right). \quad (15)$$

Напомним, что μ в обоих случаях – произвольный параметр размерности массы.

Для того чтобы изучить взаимосвязь между обеими регуляризациями, используем следующий хорошо известный результат.

ЛЕММА 1 [10]. Пусть D – дифференциальный оператор второго порядка, действующий на гладком компактном d -мерном многообразии M , и пусть B – дифференциальный оператор, определяющий граничные условия на ∂M . Если граничная задача (12) сильно эллиптическая на $\mathbb{C} - \mathbb{R}_+$, тогда

а) функция

$$\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right)$$

аналитична при $\operatorname{Re} s > d$ и ее можно аналитически продолжить до мероморфной функции со следующей структурой сингулярностей:

$$\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \sum_{j=0}^N \frac{2a_j}{s+j-d} + r_N\left(\frac{s}{2}\right),$$

где функция $r_N(s/2)$ аналитична для $\operatorname{Re} s > d - N - 1$, а коэффициенты a_j определяются проинтегрированными коэффициентами Сили;

б) для любых вещественных c_1, c_2 и любого $\delta < \theta_0$ имеем

$$\left| \mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right| \leq C(c_1, c_2, \delta) e^{-\delta |\operatorname{Im} \frac{s}{2}|}, \quad \left| \operatorname{Im} \frac{s}{2} \right| \geq 1, \quad c_1 \leq \operatorname{Re} \frac{s}{2} \leq c_2.$$

Лемма 1 ясно показывает, что вакуумная энергия, вычисленная с помощью дзета-регуляризации (13), содержит сингулярность в виде полюса всегда, когда $a_{d+1} \neq 0$. Чтобы изучить поведение регуляризованного с помощью экспоненциального обрезания выражения (14), докажем следующую лемму.

ЛЕММА 2. При предположениях леммы 1 для функции

$$\frac{dh\left(t, \frac{D_B^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right)}{dt} = \frac{d \operatorname{tr}\left(\exp\left\{-\frac{t}{\mu} D_B^{\frac{1}{2}}\right\}\right)}{dt} = \sum_n -\frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\mu} \exp\left\{-t \frac{\lambda_n^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right\}$$

имеет место асимптотическое при $t \rightarrow 0$ разложение

$$\begin{aligned}
\frac{dh\left(t, \frac{D_B^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right)}{dt} = & \sum_{k=0}^d (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1} + \\
& + \sum_{k=1}^K (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma\left(-k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1} + \\
& + \sum_{k=0}^K (2k+1) \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \right. \\
& + a_{d+2k+1} \left(\Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right) + \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j-d-2k-1} + \\
& \left. + 2a_{d+2k+1} \left((2k+1) \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - \frac{1}{2k+1} \right) \right] + \rho_K(t), \quad (16)
\end{aligned}$$

где

$$\rho_K = O\left(\left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2K+1+\varepsilon}\right), \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

Отметим, что это асимптотическое разложение содержит при $t \rightarrow 0$ не только полюсы (в первой сумме в (16)), но также и логарифмические расходимости (при $k = 0$ в последней сумме). Действительно, это разложение содержит полюсы порядка $d+1, d, \dots, -1$ с коэффициентами, определяемыми a_{d-k} , $k = 0, \dots, d$. Что касается коэффициента при логарифме, то он определяется a_{d+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 2. Приведем здесь только набросок доказательства (детали см. в работе [13]). Для начала заметим, что

$$\Gamma(s) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \int_0^\infty t^{s-1} h\left(t, \frac{D_B^{\frac{1}{2}}}{\mu}\right) dt$$

является преобразованием Меллина функции $h(t, D_B^{\frac{1}{2}}/\mu)$. Оно может быть также записано в виде

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) &= \frac{\Gamma(s)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right] = \\
&= \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right]. \quad (17)
\end{aligned}$$

Из леммы 1 и известной структуры сингулярностей функции $\Gamma((s+1)/2)$ следует, что выражение (17) аналитично при $\operatorname{Re} s > d$ и

$$h\left(t, \frac{D_B}{\mu^2}\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-s} \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right], \quad (18)$$

где путь интегрирования таков, что $s > d$. Из (18) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{dh(t, \frac{D_B}{\mu^2})}{dt} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} ds \frac{(-s)}{\mu} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-s-1} \times \\ &\times \frac{2^{s-1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right], \end{aligned} \quad (19)$$

где интеграл берется вдоль того же контура, что и ранее.

Теперь, используя лемму 1 и тот факт, что

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = O\left(\exp\left\{\left(-\frac{\pi}{2} + \epsilon\right) \left|\operatorname{Im} \frac{s}{2}\right|\right\}\right)$$

для любого $\epsilon > 0$, можно получить асимптотическое разложение для $dh(t, D_B/\mu^2)/dt$, двигая контур интегрирования в (18) через полюсы

$$\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \left[\mu^{-s} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \right].$$

Эти полюсы находятся в точках $s = d - j$. Для $s = d - j = k \geq 0$, $j \leq d$, эти полюсы простые и дают следующий вклад в интеграл Коши:

$$\frac{-k}{2\mu} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1}, \quad k = 0, 1, \dots, d.$$

Для $s = d - j = -2k$, $k = 1, 2, \dots$, полюсы также простые и их вклад равен

$$-k \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma(-k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1}.$$

Для $s = d - j = -(2k + 1)$, $k = 0, 1, \dots$, полюсы простые и двойные. Они дают вклад

$$\begin{aligned} &\frac{2k+1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j - d - 2k - 1} \right] \times \\ &\times \frac{2k+1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} a_{d+2k+1} \left[2 \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - 2 + \Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right], \end{aligned}$$

где сумму по l нужно учитывать при $k > 0$. Таким образом, двигая контур интегрирования в (18) до тех пор, пока не будет включена сингулярность $s = -(2K + 1)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{dh(t, \frac{D_B}{\mu^2})}{dt} = & \sum_{k=0}^d (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} a_{d-k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{-k-1} + \\ & + \sum_{k=1}^K (-k) \frac{1}{2\mu} \frac{\Gamma(-k + \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})} 2a_{d+2k} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k-1} + \\ & + \sum_{k=0}^K (2k+1) \frac{1}{2\mu} \frac{(-1)^k}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)} \left(\frac{t}{2\mu}\right)^{2k} \left[r_{d+2k+1} \left(-k - \frac{1}{2}\right) + \right. \\ & + a_{d+2k+1} \left(\Psi(1) + \sum_{l=0}^{k-1} \frac{1}{k-l} \right) + \sum_{j=0}^{d+2k} \frac{2a_j}{j-d-2k-1} + \\ & \left. + 2a_{d+2k+1} \left((2k+1) \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right) - \frac{1}{2k+1} \right) \right] + \rho_K(t). \end{aligned} \quad (20)$$

Остаток $\rho_K(t)$ дается таким же интегралом, как в (19), но с $c < -2(K+1)$. Из утверждения “б” леммы 1 и уже обсуждавшейся оценки для $|\Gamma((s+1)/2)|$ следует, что этот остаток есть $O(|t/(2\mu)|^{2K+1+\varepsilon})$, что и завершает доказательство леммы 2.

Полученное асимптотическое разложение при $t = 0$ дает для экспоненциально регуляризованной вакуумной энергии (14) выражение

$$\begin{aligned} E_{\text{exp}} = & -\frac{\mu}{2} \frac{dh(t, \frac{D_B}{\mu^2})}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^d (-k) \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{2^{-k}\Gamma(\frac{1}{2})} a_{d-k} \left(\frac{t}{\mu}\right)^{-k-1} \Big|_{t=0} - \\ & - \frac{1}{4\Gamma(\frac{1}{2})} \left[r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + a_{d+1}(\Psi(1) - 2) + 2 \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} \right] + \frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \ln\left(\frac{t}{2\mu}\right). \end{aligned} \quad (21)$$

Возвращаясь к лемме 1, для дзета-регуляризованной вакуумной энергии получаем

$$\begin{aligned} E_\zeta = & \frac{\mu}{2} \zeta\left(\frac{s}{2}, \frac{D_B}{\mu^2}\right) \Big|_{s=-1} = \frac{1}{2\Gamma(-\frac{1}{2})} \sum_{j=0}^d \frac{2a_j}{j-d-1} + \\ & + \frac{1}{2\Gamma(-\frac{1}{2})} r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{\mu^{s+1}}{\Gamma(\frac{s}{2})} \frac{a_{d+1}}{s+1} \Big|_{s=-1} = \\ = & -\frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \sum_{j=0}^d \frac{a_j}{j-d-1} - \frac{1}{4\Gamma(\frac{1}{2})} r_{d+1} \left(-\frac{1}{2}\right) + \\ & + \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} a_{d+1} \left(\frac{\Psi(1)}{2} + 1 - \ln(2\mu) \right) - \frac{1}{2\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{a_{d+1}}{s+1} \Big|_{s=-1}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из формул (21) и (22) можно сделать следующие выводы.

Оба метода регуляризации дают в общем случае расходящиеся результаты. Следует различать два случая.

СЛУЧАЙ 1. Если $a_{d+1} = 0$, дзета-регуляризация дает конечный результат, совпадающий с минимальной конечной частью экспоненциальной регуляризации. В последнем методе присутствуют полюсы порядков $2, 3, \dots, d+1$. Вычет в полюсе порядка $k+1$ равен произведению $\Gamma(k+1)$ на вычет $(\mu/2)\zeta(s/2, D_B/\mu^2)$ при $s = k$, $k = 1, \dots, d$.

СЛУЧАЙ 2. В общем случае ($a_{d+1} \neq 0$) экспоненциальная регуляризация имеет кроме полюсов логарифмическую расходимость, коэффициент при которой равен минус вычету $(\mu/2)\zeta(s/2, D_B/\mu^2)$ при $s = -1$. Следовательно, разность между минимальными конечными частями в экспоненциальной и дзета-регуляризациях есть

$$-\frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \Psi(1) = \frac{1}{2} \frac{a_{d+1}}{\sqrt{\pi}} \gamma, \quad (23)$$

где γ – константа Эйлера–Маскерони. Обе схемы регуляризации имеют логарифмическую зависимость от μ (см. [15] для случая дзета-регуляризации). Если разность между результатами двух регуляризаций состоит из ренормируемых членов, то возможна физическая интерпретация, и вся зависимость от μ исчезает.

Все вышеприведенные результаты верны также для случая многообразий без границы.

3.2. Массивное скалярное поле в $1+1$ измерениях. Теперь можно вернуться к нашему примеру безмассового скалярного поля при $d+1 = 4$ и проверить, что оно соответствует случаю 1 из п. 3.1.

В качестве простого примера случая 2 рассмотрим массивное скалярное поле в $d+1 = 2$ измерениях, удовлетворяющее граничным условиям периодичности в пространственном направлении, $\varphi(t, L) = \varphi(t, 0)$. Легко видеть, что

$$\omega_n = \left[m^2 + \left(\frac{2n\pi}{L} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тогда с помощью дзета-регуляризации находим

$$\begin{aligned} E_\zeta &= \frac{\mu}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{2n\pi}{L\mu} \right)^2 + \left(\frac{m}{\mu} \right)^2 \right]^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1} = \\ &= \frac{\mu^{s+1}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[n^2 + \left(\frac{mL}{2\pi} \right)^2 \right]^{-\frac{s}{2}} \Big|_{s=-1}. \end{aligned}$$

Используя представление (3), это выражение можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{\mu^{s+1}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty dt t^{\frac{s}{2}-1} \exp \left\{ - \left(n^2 + \left(\frac{mL}{2\pi} \right)^2 \right) t \right\} \Big|_{s=-1} = \\ &= \frac{\mu^{s+1}}{2} \left(\frac{2\pi}{L} \right)^{-s} \frac{1}{\Gamma(\frac{s}{2})} \int_0^\infty dt t^{\frac{s}{2}-1} \exp \left\{ - \left(\frac{mL}{2\pi} \right)^2 t \right\} \Theta \left(0, \frac{t}{\pi} \right) \Big|_{s=-1}, \end{aligned}$$

где

$$\Theta(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi x n - \pi y n^2}$$

есть тета-функция Якоби, для которой выполняется следующее свойство инверсии:

$$\Theta(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}} e^{\frac{\pi x^2}{y}} \Theta\left(\frac{x}{iy}, \frac{1}{y}\right).$$

Используя это свойство, можно показать, что

$$E_{\zeta} = \frac{\mu^{s+1}}{2} \left(\frac{2\pi}{L}\right)^{-s} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)} \left[\left(\frac{2\pi}{mL}\right)^{s-1} \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{\infty} dt t^{\frac{s-1}{2}-1} \exp\left\{-\left(\frac{mL}{2\pi}\right)^2 t\right\} \exp\left\{-\frac{n^2 \pi^2}{t}\right\} \right] \Big|_{s=-1}.$$

Отсюда можно увидеть, что полюс при $s = -1$ обусловлен полюсом гамма-функции. Вычисляя интеграл и разлагая вблизи $s = -1$, получаем

$$E_{\zeta}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) + \frac{m^2 L}{4\pi} \left[\frac{1}{s+1} \Big|_{s=-1} - \ln\left(\frac{m}{2\mu}\right) - \frac{1}{2} \right]. \quad (24)$$

Ряд в (24) сходится благодаря свойствам модифицированных функций Бесселя K_1 при $n \rightarrow \infty$.

Регуляризация с помощью экспоненциального обрезания дает

$$E_{\text{exp}}^{(1)} = -\frac{\mu}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\left\{-t \left(\left(\frac{2n\pi}{L\mu}\right)^2 + \left(\frac{m}{\mu}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \right) \Big|_{t=0}.$$

Этот ряд может быть переписан с использованием формулы суммирования Пуассона

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} c_p,$$

где

$$c_p = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{2\pi i p x} f(x).$$

Вычислив производную и положив $t = 0$, получаем

$$E_{\text{exp}}^{(1)} = -\frac{m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} K_1(nmL) + \frac{m^2 L}{4\pi} \left[-\ln t - \ln\left(\frac{m}{2\mu}\right) + 2 \left(\frac{mt}{\mu}\right)^{-2} - \gamma - \frac{1}{2} \right] \Big|_{t=0}. \quad (25)$$

Этот результат также расходится. Как и предсказывалось, возникают расходимости в виде полюсов и логарифмов. Сравнение коэффициентов данного выражения с коэффициентами в выражении (24) показывает полное соответствие с нашим общим результатом.

Оба результата допускают перенормировку с требованием $E \rightarrow 0$ при $R \rightarrow \infty$ или, что эквивалентно, $E \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ (как предложено в работе [16]). При этом получается физически осмысленный результат и отсутствует зависимость от μ .

Открытым остается вопрос, что происходит в более сложных геометриях, в частности при наличии искривленных границ.

Благодарности. Данная работа частично поддержана ANPCyT (PICT'97 00039), CONICET (PIP 0459) и UNLP (Proy. 11-X230), Argentina.

Я благодарна К. Ж. Беневентано, М. де Франсиа и Х. Фаломиру за многочисленные полезные комментарии и предложения, касающиеся изложения материала данной статьи. Я также благодарна Д. В. Василевичу и организаторам Международной школы физики им. В. А. Фока за предоставленную возможность участия в Школе. Особая благодарность Юрию и Виктору Новожиловым и Валерию Марачевскому за их теплый прием.

Список литературы

- [1] *K. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер.* Квантовая теория поля. М.: Мир, 1984.
- [2] *H. B. G. Casimir.* Proc. K. Ned. Akad. Wetensc. 1948. V. 51. P. 793.
- [3] *G. Plunien, B. Muller, W. Greiner.* Phys. Rep. 1986. V. 134. P. 87.
- [4] *V. M. Mostepanenko, N. N. Trunov.* The Casimir Effect and its Applications. Oxford: Clarendon Press, 1997.
- [5] *J. S. Dowker, R. Critchley.* Phys. Rev. D. 1976. V. 13. P. 3224.
- [6] *S. W. Hawking.* Commun. Math. Phys. 1977. V. 55. P. 133.
- [7] *М. А. Абрамович, И. А. Стужан.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Мир, 1979.
- [8] *R. T. Seeley.* AMS Proc. Symp. Pure Math. 1967. V. 10. P. 288.
- [9] *R. T. Seeley.* Am. J. Math. 1969. V. 91. P. 889.
- [10] *R. T. Seeley.* Am. J. Math. 1969. V. 91. P. 963.
- [11] *S. Agmon.* Commun. Pure Appl. Math. 1967. V. 10. P. 288.
- [12] *P. B. Gilkey.* Invariance Theory, the Heat Equation, and the Atiyah–Singer Index Theorem. Vilmington: Publish or Perish, 1984.
- [13] *C. G. Beneventano, E. M. Santangelo.* Int. J. Mod. Phys. A. 1996. V. 11. P. 2871.
- [14] *G. Grubb, R. T. Seeley.* J. Geom. Anal. 1996. V. 6. P. 31.
- [15] *S. Blau, M. Visser, A. Wipf.* Nucl. Phys. B. 1988. V. 310. P. 163.
- [16] *M. Bordag, K. Kirsten.* Phys. Rev. D. 1999. V. 60. P. 105019.