Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. А. Пальцев, О процессах переноса в многоатомном газе, *ТМФ*, 2002, том 131, номер 1, 148–161

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1954>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:30:20

© 2002 г.

Л. А. Пальцев*

О ПРОЦЕССАХ ПЕРЕНОСА В МНОГОАТОМНОМ ГАЗЕ

В газодинамическом приближении получены линейные потоки энергии и импульса для неравновесных стационарных состояний многоатомного газа во внешнем магнитном поле. Определены коэффициенты переноса для газа линейных диамагнитных молекул.

Векторную плотность потока энергии и тензорную плотность потока импульса для неравновесных состояний многоатомного газа, близких к локально-равновесному или равновесному состояниям, можно найти в виде рядов по малому параметру пространственной неоднородности газа μ , решая соответственно нелинейное или линеаризованное кинетические уравнения известными методами теории процессов переноса [1]–[3]. Как и в случае одноатомного газа, рассмотреть вопрос о сходимости этих рядов для состояний, близких к локально-равновесному, в настоящее время не представляется возможным. Несмотря на принципиальную возможность найти указанные потоки во всех приближениях по μ , выражения для них в связи с нелинейностью интеграла столкновений оказываются очень сложными и в явном виде получены только в первом (навье-стоксовском) и втором (барнеттовском) приближениях [2], [4]. В неравновесных состояниях многоатомного газа, близких к равновесному состоянию, эти потоки в связи с линейностью интеграла столкновений можно тем не менее найти во всех приближениях по μ . Кроме того, в стационарных состояниях, как и в случае умеренно плотного одноатомного газа [5], можно найти также суммы получаемых рядов для некоторых моделей молекул и взаимной ориентации внешних полей и поля течения газа. Решение линеаризованного кинетического уравнения Вальдмана–Снайдера для многоатомного газа во внешних полях методом Чепмена–Энскога рассматривалось в работах [2], [6]. Однако в [2] поток тепла и тензор напряжений – диссипативные части плотностей потоков энергии и импульса – получены только в навье-стоксовском и барнеттовском приближениях, а представленные в [6] интегральные уравнения для вигнеровских операторов, функционалами которых являются коэффициенты переноса, в барнеттовском и высших приближениях не удовлетворяют условиям разрешимости.

В данной работе с помощью стационарного линеаризованного кинетического уравнения для оператора Вигнера, описывающего неравновесные состояния многоатомного

*Центральный аэрогидродинамический институт им. Н.Е. Жуковского, г. Жуковский, Московская обл., Россия

газа (близкие к равновесному) во внешнем постоянном магнитном поле, получены поток тепла и тензор напряжений во всех приближениях по μ и соотношения взаимности Онзагера для коэффициентов переноса при произвольной взаимной ориентации магнитного поля и поля течения газа. Для газа линейных диамагнитных молекул получены суммы рядов для этих диссипативных потоков и полный набор коэффициентов переноса в случае двумерных течений газа во внешнем магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения газа, и в случае трехмерных течений газа в отсутствие магнитного поля. Показано, что в этих случаях потоки тепла являются линейными однородными функциями только градиента температуры и лапласиана газодинамической скорости. Тензоры напряжений являются линейными однородными функциями только тензора скоростей сдвига, лапласиана этого тензора и неприводимого тензора второго ранга, компоненты которого есть вторые производные температуры по пространственным координатам. Уравнениями для локальных макроскопических переменных являются уравнения Стокса. Вычислен в приближении первых моментов супербарнеттовский коэффициент линейных сдвиговых напряжений.

1. Неравновесные состояния пространственно-неоднородного многоатомного газа во внешнем постоянном магнитном поле $\mathbf{B}$ при $\omega\tau \simeq 1$ (ω – ларморова частота, τ – время свободного пробега молекул), близкие к равновесному состоянию с заданными значениями плотности числа молекул n и температуры T , измеряемой в энергетических единицах, описываются в квантовой кинетической теории зависящим от времени t оператором Вигнера [7]

$$f(x_1) = f(\varepsilon_1) + U_{-t}\rho_1\varphi(x_1)\rho_1U_t, \quad (1.1)$$

который является функцией в фазовом пространстве поступательного движения молекулы $x_1 = (\mathbf{r}, \mathbf{p}_1)$ и оператором в пространстве собственных функций $|1\rangle$ гамильтониана H_1 , соответствующего внутримолекулярным процессам с частотами, равными или большими $1/\tau_0$ (τ_0 – характерное время столкновения молекул). В (1.1) оператор Максвелла–Больцмана

$$f(\varepsilon_1) = \frac{n}{Z} \exp(-\varepsilon_1),$$

где

$$Z = (2\pi MT)^{\frac{3}{2}} \text{Tr}_{(1)} \exp\left(-\frac{H_1}{T}\right), \quad \varepsilon_1 = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2M} p_1^2 + H_1 \right),$$

M – масса молекулы, $\text{Tr}_{(1)}$ – след по квантовым числам состояния $|1\rangle$, оператор эволюции $U_t = \exp(iH_1t/\hbar)$ и $\rho_1 = [f(\varepsilon_1)]^{1/2}$. Вигнеровский оператор $\varphi(x_1)$ в линейном для интеграла столкновений приближении удовлетворяет кинетическому уравнению (см. формулу (1.3) в работе [7])

$$\frac{\partial}{\partial t}\varphi(x_1) + \mu\mathbf{v} \cdot \nabla\varphi(x_1) = I_{\mathbf{B}}\varphi, \quad (1.2)$$

в котором $\mathbf{v} = \mathbf{p}_1/M$, $\nabla = \partial/\partial\mathbf{r}$, супероператор

$$I_{\mathbf{B}} = I + \frac{i}{\hbar} [\Delta H(1), \dots] \quad (\text{см. (П.3) в [7]}),$$

где I – линейный диссипативный супероператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ вигнеровских операторов и динамических переменных со скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \frac{1}{n} \text{Tr}_{(1)} \int d\mathbf{p}_1 \varphi^\dagger(x_1) \rho_1 \psi(x_1) \rho_1,$$

$\dagger$ – знак эрмитового сопряжения, $[\dots, \dots]$ – коммутатор. Часть гамильтониана $\Delta H(1)$ диагональна в представлении функций $|1\rangle$ по квантовым числам, задающим внутреннюю энергию молекулы. Эта часть включает взаимодействие молекулы с внешним магнитным полем и соответствует внутримолекулярным процессам с частотами, равными или меньшими $1/\tau$. Безразмерный параметр μ (число Кнудсена) включен в уравнение (1.2) только для указания порядка вклада соответствующего члена в изменение вигнеровского оператора за время τ или на длине свободного пробега молекул в стационарном случае.

Локальные макроскопические переменные $n^* = \Delta n(\mathbf{r})/n$, $T^* = \Delta T(\mathbf{r})/T$ ($\Delta n(\mathbf{r})$ и $\Delta T(\mathbf{r})$ – соответственно отклонение плотности числа молекул и температуры от их значений в равновесном состоянии) и газодинамическая скорость $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{r})$ в состояниях, описываемых оператором (1.1), имеют вид

$$n^* = (1, \varphi), \quad T^* = C_V^{-1}(\hat{\varepsilon}, \varphi), \quad \mathbf{u} = (\mathbf{v}, \varphi), \quad (1.3)$$

где безразмерная теплоемкость $C_V = \frac{d}{dT}(T\mathcal{E})$, $\mathcal{E} = T \frac{d}{dT} \ln Z$, $\hat{\varepsilon}_1 = \varepsilon_1 - \mathcal{E}$.

Учитывая, что нуль-пространство $\mathcal{H}_0$ супероператора I и сопряженного ему супероператора состоит из инвариантов столкновения $(1, \mathbf{p}_1, T\varepsilon_1)$ [8], из (1.2) и (1.3) получаем уравнения сохранения

$$\begin{aligned} \frac{\partial n^*}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{u}, \\ nC_V \frac{\partial T^*}{\partial t} &= -p\nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{Q}, \\ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -p\nabla p^* - \nabla \cdot \mathbf{P}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $p = nT$, $\rho = Mn$, $p^* = n^* + T^*$, поток тепла $\mathbf{Q}$ и тензор напряжений $\mathbf{P}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= p(\mathbf{v}\varepsilon, \psi), \\ \mathbf{P} &= \rho(\mathbf{v}\mathbf{v}, \psi), \end{aligned} \quad (1.5)$$

в которых ортогональный инвариантам столкновения вигнеровский оператор

$$\psi(x_1) = \varphi(x_1) - n^* - \hat{\varepsilon}_1 T^* - \frac{M}{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}. \quad (1.6)$$

Заметим, что векторная плотность потока энергии $\mathbf{q}$ и тензорная плотность потока импульса π имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= p\mathcal{E}\mathbf{u} + \mathbf{Q}, \\ \pi &= pp^*\delta + \mathbf{P}, \end{aligned}$$

где δ – дельта-тензор Кронекера [3].

Для оператора (1.6), локальными функционалами которого являются диссипативные потоки (1.5), из (1.2) с учетом (1.4) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \psi(x_1) + \mu \{ \nabla \cdot \mathbf{V}[\psi] + U[T^*, \mathbf{u}] \} = I_B \psi, \quad (1.7)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{V}[\psi] &= \mathbf{v}\psi(x_1) - \frac{1}{p} \mathbf{v} \cdot \mathbf{P} - \frac{\hat{\varepsilon}_1}{pC_V} \mathbf{Q}, \\ U[T^*, \mathbf{u}] &= \mathbf{a}(1) \cdot \nabla T^* + \mathbf{b}(1) : \mathbf{S} + c(1) \nabla \cdot \mathbf{u}, \\ \mathbf{a}(1) &= \mathbf{v}(\hat{\varepsilon}_1 - 1), \\ \mathbf{b}(1) &= \frac{M}{T} \left(\mathbf{v}\mathbf{v} - \frac{1}{3} v^2 \delta \right), \\ c(1) &= \frac{M}{3T} v^2 - 1 - \frac{\hat{\varepsilon}_1}{C_V}, \\ \mathbf{S} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \mathbf{u} \delta. \end{aligned}$$

Поток тепла и тензор напряжений в газодинамическом приближении, когда $\mu \ll 1$, можно найти, решая уравнение (1.7) методом Боголюбова [1], [8] в нестационарном случае и методом Гильберта [3], [5], [9] в стационарном. Найдем эти диссипативные потоки в стационарном случае, следуя работе [5].

Учитывая, что оператор $\psi(x_1)$ ортогонален инвариантам столкновения, будем искать решение стационарного уравнения (1.7) вне слоя Кнудсена (слой газа вблизи обтекаемой поверхности, толщина которого порядка длины свободного пробега молекул [3]) в виде ряда

$$\psi(x_1) = \mu \psi^{(1)}(x_1) + \mu^2 \psi^{(2)}(x_1) + \dots, \quad (1.8)$$

подставляя который в (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mu \mathbf{Q}(1) + \mu^2 \mathbf{Q}(2) + \dots, \\ \mathbf{P} &= \mu \mathbf{P}(1) + \mu^2 \mathbf{P}(2) + \dots. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Кроме того, локальные макроскопические переменные (1.4) представим в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(0) + \mu \mathbf{u}(1) + \mu^2 \mathbf{u}(2) + \dots. \quad (1.10)$$

Аналогично записываются разложения для n^* , T^* и соответственно для p^* , $\mathbf{S}$ и $U[T^*, \mathbf{u}]$.

Из стационарных уравнений (1.7) и (1.4) с учетом (1.8)–(1.10) получаем рекуррентную систему уравнений для поправок к вигнеровскому оператору

$$U[s-1] + \nabla \cdot \mathbf{V}[\psi^{(s-1)}] = I_B \psi^{(s)}, \quad (1.11)$$

где $s = 1, 2, \dots$, и систему уравнений переноса для поправок к локальным макроскопическим переменным

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{u}(s) &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{Q}(s) &= 0, \\ p \nabla p(s) &= -\nabla \cdot \mathbf{P}(s),\end{aligned}\tag{1.12}$$

где $s = 0, 1, 2, \dots$ и диссипативные потоки в нулевом приближении равны нулю.

Решая рекуррентную систему уравнений (1.11) последовательно при $s = 1, s = 2, \dots$, находим поправки к вигнеровскому оператору в виде

$$\psi^{(s)}(x_1) = \sum_{k=1}^s \psi^{(k)}(x_1; s-k),\tag{1.13}$$

где

$$\psi^{(k)}(x_1; s-k) = (-1)^k [(A(1) | \nabla)^{[k]} T(s-k) + (B(1) | S(s-k))^{[k+1]}].$$

Здесь

$$(X(1) | Y)^{[p]} = \sum_{l_1 \dots l_p} X(1)^{l(1,p)} Y^{l(p,1)},$$

где суммирование производится по $l_i = 1, 2, 3$ ($i = 1, \dots, p$), $l(n, m)$ есть набор индексов $l_n l_{n+1} \dots l_{m-1} l_m$ при $n \leq m$ и $l_n l_{n-1} \dots l_{m+1} l_m$ при $n \geq m$,

$$\begin{aligned}A^{l(1,k)}(1) &= R_{\mathbf{B}}^{-1} a^{l(1,k)}, \\ B^{l(1,k+1)}(1) &= R_{\mathbf{B}}^{-1} b^{l(1,k+1)},\end{aligned}\tag{1.14}$$

$R_{\mathbf{B}}^{-1}$ – супероператор, обратный оператору $R_{\mathbf{B}} = R + \frac{i}{\hbar} [\Delta H(1), \dots]$ в $\mathcal{H} \setminus \mathcal{H}_0$, R – супероператор Вальдмана–Снайдера [2], [6], тензорные операторы $a^{l(1,k)}(1)$ и $b^{l(1,k+1)}(1)$ при $k = 1$ определяются в (1.7). При $k = 2, 3, \dots$ получаем

$$\begin{aligned}x^{l(1,n)}(1) &= V[(X(1)v)^{l(1,n)}], \\ V[D] &= D - \frac{M}{T} \mathbf{v} \cdot (\mathbf{v}, D) - \frac{\hat{\varepsilon}_1}{C_V}(\hat{\varepsilon}, D), \\ (X(1)v)^{l(1,n)} &= X^{l(1,n-1)}(1) v^{l_n}, \\ x &= a, b, \quad X = A, B, \quad n = k, k+1.\end{aligned}$$

Эти операторы в отличие от левых частей уравнений (2.29) в статье [6] ортогональны инвариантам столкновения. В (1.13) входят также величины

$$\nabla^{l(n,m)} = \prod_{i=n}^m \nabla_{l_i}, \quad S^{l(n,1)} = \nabla^{l(n,3)} S^{l(2,1)}$$

при $n = 3, 4, \dots$. Величина $S^{l(2,1)}$ определяется в (1.7).

Подставляя (1.13) с учетом (1.14) в определения поправок к потоку тепла и тензору напряжений в (1.9), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(s) &= \sum_{k=1}^s \mathbf{Q}(k | s - k), \\ \mathbf{P}(s) &= \sum_{k=1}^s \mathbf{P}(k | s - k), \end{aligned} \quad (1.15)$$

где $s = 1, 2, \dots$,

$$\begin{aligned} Q^j(k | s - k) &= -\lambda^{jl(1,k)} T \nabla^{l(k,1)} T(s - k) + 2\Gamma^{jl(1,k+1)} S^{l(k+1,1)}(s - k), \\ P^{ij}(k | s - k) &= -2\eta^{ijl(1,k+1)} S^{l(k+1,1)}(s - k) + 2\Lambda^{ijl(1,k)} \nabla^{l(k,1)} T(s - k), \end{aligned} \quad (1.16)$$

$i, j = 1, 2, 3$, по повторяющимся индексам l_n ($n = 1, \dots, p$, $p = k, k + 1$) производится суммирование.

Тензорные коэффициенты переноса в (1.16), зависящие от вектора напряженности магнитного поля, имеют вид

$$\begin{aligned} \left[\frac{T\lambda}{2\Gamma} \right]^{jl(1,k)} &= nT \left(a^j, \left[\frac{A(\mathbf{B})}{B(\mathbf{B})} \right]^{l(1,k)} \right), \\ \left[\frac{\eta}{\Lambda} \right]^{ijl(1,k)} &= \frac{\rho}{2} \left(v^i v^j, \left[\frac{B(\mathbf{B})}{A(\mathbf{B})} \right]^{l(1,k)} \right). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Отметим, что в связи с сохранением четности при межмолекулярном взаимодействии коэффициенты переноса (1.17) отличны от нуля при нечетных k в поправках к потоку тепла и при четных k в поправках к тензору напряжений.

Соотношения взаимности Онзагера для тензорных коэффициентов переноса (1.17) получаем, учитывая равенства

$$\begin{aligned} (a^j, A(\mathbf{B})^{l(1,k)}) &= (a^{l_1}, A(-\mathbf{B})^{[jl(k,2)]}), \\ (b^{ij}, B(\mathbf{B})^{l(1,k)}) &= (b^{l_1 l_2}, B(-\mathbf{B})^{[ijl(k,3)]}), \\ (b^{ij}, A(\mathbf{B})^{l(1,k)}) &= (a^{l_1}, B(-\mathbf{B})^{[ijl(k,2)]}), \end{aligned}$$

в которых $[jl(k, n)]$, $[ijl(k, n)]$ есть соответственно наборы индексов $jl(k, n)$, $ijl(k, n)$ при $k \geq n$ и ij при $k < n$. Отметим, что из этих равенств следуют известные соотношения взаимности Онзагера [2], [4] для навье-стоксовских при $k = 1$ и барнеттовских при $k = 2$ коэффициентов переноса.

Подставляя (1.15) в (1.12), получаем уравнения переноса, которые описывают медленные течения многоатомного газа – течения Стокса (число Рейнольдса $\text{Re} \ll 1$) во внешнем постоянном магнитном поле. Такие течения рассматривают, например, при исследовании эффекта Скотта, эффекта термомагнитной разности давления и т.п.

Легко видеть, что после подстановки поправок к диссипативным потокам (1.15) и к вигнеровскому оператору (1.13) в (1.9) и в (1.8) и суммирования в полученных выражениях рядов для газодинамической скорости и температуры получаем для потока тепла, тензора напряжений и вигнеровского оператора разложения в виде (1.9) и (1.8), в которых $\mathbf{Q}(s)$, $\mathbf{P}(s)$, $\psi^{(s)}(x_1)$ есть соответственно $\mathbf{Q}(k | s - k)$, $\mathbf{P}(k | s - k)$, $\psi^{(s)}(x_1; s - k)$ при $k = s$ и $T(0)$, $\mathbf{u}(0)$ заменены на T^* , $\mathbf{u}$.

2. Ниже для конкретных моделей молекул и взаимной ориентации магнитного поля и поля течения газа будут найдены поправки к диссипативным потокам (1.16), с учетом которых в (1.15) и уравнениях переноса (1.12) можно, как и в [5], рассмотреть вопрос о сходимости и суммировании рядов для потока тепла и тензора напряжений (1.9).

Рассмотрим газ линейных диамагнитных молекул, у которых возбуждены только вращательные степени свободы, в случае двумерных течений газа в магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения, и в случае трехмерных течений газа в отсутствие магнитного поля. В этих случаях неравновесные состояния газа описываются вигнеровским оператором $\varphi(x_1)$, зависящим от векторного оператора вращательного момента молекулы $\hbar \mathbf{J}_1$, H_1 – гамильтониан жесткого ротатора и $R_B = R - i\omega(B)[J_{1z}, \dots]$, где ларморова частота $\omega(B)$ не зависит от внутреннего состояния молекулы и J_{1z} – проекция вектора $\mathbf{J}_1$ на направление магнитного поля (ось z).

При вычислении поправок к диссипативным потокам и к вигнеровскому оператору в этих случаях удобно воспользоваться сферическими тензорами [10]. В этом представлении компоненты потока тепла Q_{1q} , неприводимых тензоров напряжения второго P_{2q} и нулевого P рангов находим по формуле

$$X_{k,q} = (-1)^{k-q} p(x(1)_{k,-q}, \psi),$$

заменяя оператор $x(1)_{kq}$ соответственно операторами $a(1)_{1q}$, $b(1)_{2q}$ и $c(1)$, определенными в (1.7). Разложения для этих диссипативных потоков получаем из (1.9), (1.16) и (1.15), учитывая связь между компонентами декартовых и сферических тензоров [10].

В случае двумерных течений газа, когда компоненты газодинамической скорости и градиентов локальных макроскопических переменных в направлении магнитного поля (ось z) равны нулю, из (1.16) находим

$$\begin{aligned} Q_m^{(k)} &= -\lambda(k)_m \Delta(k-1) \nabla_m T + \Gamma(k)_m \Delta(k) u_m, \\ P_{2m}^{(k)} &= -2\eta(k)_{2m} \Delta(k-1) \nabla_m u_m + 2\Lambda(k)_{2m} \Delta(k-2) \nabla_{2m} T, \\ \begin{bmatrix} P_{20}^{(k)} \\ P^{(k)} \end{bmatrix} &= -2\Delta(k) T \begin{bmatrix} \Lambda(k)_0 \\ \Lambda(k) \end{bmatrix} + 2\Delta(k-2) \omega \begin{bmatrix} \eta(k)_0 \\ \eta(k) \end{bmatrix}, \\ Q_{10}^{(k)} &= 0, \quad P_{2;\pm 1}^{(k)} = 0. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь введены следующие обозначения: $k = 1, 2, \dots$, $Q_m^{(k)} = Q(k | s - k)_m$ и аналогично определяются компоненты тензора напряжений, X_{km} – компонента сферического тензора X_{kq} ранга k при $q = km$ и $m = \pm 1$ (индекс $k = 1$ опускаем), $T = T(s - k)$ и аналогично определяются величины u_m и $\omega = (1/2) \sum_m m \nabla_m u_{-m}$ – локальная угловая скорость газа в направлении магнитного поля, $\Delta(n) = (\Delta)^{n/2}$, где $\Delta = 2\nabla_1 \nabla_{-1}$ – двумерный оператор Лапласа, $\Delta(0) = 1$, $\nabla_{nm} = (\nabla_m)^n$. Кинетические коэффициенты $\lambda(k)_m$ и $\eta(k)_{2m}$, отличные от нуля только при нечетных k , и остальные кинетические коэффициенты в (2.1), отличные от нуля только при четных k , определяются формулами (А.1) (см. приложение А). Отметим, что коэффициенты $\eta(k)_0$ и $\eta(k)$ отличны от нуля при $k = 4, 6, \dots$.

Из (1.15) при $s = 1$, учитывая (2.1), находим в первом (навье-стоксовском) приближении отличные от нуля компоненты потока тепла и тензора напряжений

$$Q(1)_m = Q(1 | 0)_m, \quad P(1)_{2m} = P(1 | 0)_{2m}, \quad (2.2)$$

в которых кинетические коэффициенты (см. (A.1)) имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda(1)_m &= T\lambda(B)_m = (a_{-m} | a_{-m}), \\ \eta(1)_{2m} &= \eta(B)_{2m} = \frac{1}{2}(b_{-2m} | b_{-2m}), \\ (c_q | d_q) &= p(c_q, R_B^{-1}d_q). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Учитывая (2.2) в (1.12), получаем в этом приближении уравнения переноса

$$\begin{aligned} \sum_m \nabla_m u(l)_{-m} &= 0, \quad \Delta T(l-1) = 0, \\ p \nabla_m p(l) &= \eta(B)_{2m} \Delta u(l-1)_m, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $l = 0, 1$ и $m = \pm 1$. Из уравнений (2.4) следует, что $\Delta \Delta u(l-1)_m = 0$, $\Delta \omega(l-1) = 0$.

Поправки к потоку тепла и тензору напряжений и уравнения переноса в высших приближениях находим, подставляя (2.1) в (1.15) и (1.12) последовательно при $s = 2$, $s = 3, \dots$ и учитывая уравнения переноса и следствия из этих уравнений в $(s-1)$ -м приближении. Так получаем отличные от нуля компоненты поправок к потоку тепла и тензору напряжений

$$\begin{aligned} Q(s)_m &= \sum_{k=1}^2 Q(k | s-k)_m, \\ P(s)_{2m} &= \sum_{k=1}^3 P(k | s-k)_{2m} \end{aligned} \quad (2.5)$$

и уравнения переноса, которые можно представить в виде (2.4), где $l = 0, 1, \dots, s$.

В выражениях (2.5), где учитываются поправки к диссипативным потокам (2.1), навье-стоксовские кинетические коэффициенты определяются в (2.3). Барнеттовские и супербарнеттовский кинетические коэффициенты получаем из (A.1) в виде

$$\begin{aligned} \Lambda(2)_{2m} &= \Lambda(B)_{2m} = \frac{1}{2}(b_{-2m} | v_{-m} R_B^{-1} a_{-m}), \\ \Gamma(2)_m &= \Lambda(-B)_{-2m}, \\ \eta(3)_{2m} &= \Theta(B)_{2m} = \frac{1}{4}(b_{-2m} | h_{-2m}), \\ h(1)_{2m} &= \sum_{j=1,3} v_{(2-j)m} R_B^{-1} \left(v_{(j-2)m} R_B^{-1} b_{2m} - \frac{2}{p} \eta(B)_{-2m} v_m \delta_{j1} \right), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера.

Подставляя в (1.9) выражения (2.2) и (2.5) с учетом связи между компонентами декартовых и сферических тензоров [10] и суммируя в полученных формулах ряды для газодинамических скорости и температуры, получаем поток тепла и тензор напряжений в случае двумерных течений газа во внешнем постоянном магнитном поле, перпендикулярном плоскости течения, в виде

$$\begin{aligned} Q^j &= Q^j(+) - (-1)^j Q^{3-j}(-), \\ P^{ij} &= P^{ij}(+) - (-1)^j P^{i3-j}(-), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} Q^j(\pm) &= -\lambda^{(\pm)}(B) T \nabla_j T^* \pm \Lambda^{(\pm)}(-B) \Delta u^j, \\ P^{ij}(\pm) &= -2\eta^{(\pm)}(B) S^{ij} + 2\Lambda^{(\pm)}(B) \nabla_i \nabla_j T^* - 2\Theta^{(\pm)}(B) \Delta S^{ij}, \end{aligned}$$

индексы $(i, j) = (1, 2) = (x, y)$. Навье-стоксовские коэффициенты теплопроводности $\lambda^{(\pm)}(B)$ и сдвиговой вязкости $\eta^{(\pm)}(B)$, барнеттовские коэффициенты линейных температурных напряжений $\Lambda^{(\pm)}(B)$ и супербарнеттовские коэффициенты линейных сдвиговых напряжений $\Theta^{(\pm)}(B)$ находим по формулам

$$x^{(+)} = \frac{1}{2}(x_q + x_{-q}), \quad x^{(-)} = \frac{i}{2}(x_q - x_{-q}),$$

где i — мнимая единица и величины $x_{\pm q}$ надо заменить соответственно кинетическими коэффициентами $\lambda(B)_{\pm 1}$, $\eta(B)_{\pm 2}$, $\Lambda(B)_{\pm 2}$, $\Theta(B)_{\pm 2}$, определенными в (2.3), (2.6). Заметим, что коэффициенты $\lambda^{(\pm)}(B), \dots, \Theta^{(\pm)}(B)$ составляют полный набор коэффициентов переноса, которые следует знать при описании стационарных процессов переноса при двумерных течениях газа во всех приближениях по малому числу Кнудсена.

Аналогичным образом получаем уравнения сохранения в виде

$$\begin{aligned} \nabla_j u^j &= 0, \quad \Delta T^* = 0, \\ p \nabla_j p^* &= \eta^{(+)}(B) \Delta u^j - (-1)^j \eta^{(-)}(B) \Delta u^{3-j}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $(i, j) = (1, 2)$. Оператор Вигнера (1.1) вне кнудсеновского слоя принимает вид

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f(\varepsilon_1) \left\{ 1 + n^* + \hat{\varepsilon}_1 T^* + \frac{M}{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{m=\pm 1} (-1)^s [\nabla_{sm} (A(1)_{-sm} T^* + \right. \\ &\quad \left. + B(1)_{-(s+1)m} u_m) + \delta(s; 2) \nabla_{(s-2)m} \Delta C(1)_{-(s-1)m} u_m] \right\}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Этот оператор необходим при получении известными методами [2], [3] граничных условий для уравнений (2.8) — скорости скольжения и скачка температуры на обтекаемой газом поверхности. В (2.9) функция $\delta(s; k)$ есть единица при $s \geq k$ и нуль при $s < k$,

$$\begin{aligned} A(1)_{sm} &= R_B^{-1} a_{sm}, \\ B(1)_{(s+1)m} &= R_B^{-1} b_{(s+1)m}, \\ C(1)_{km} &= R_B^{-1} \left[\delta(k; 2) C_{(k-1)m} v_m + \frac{1}{2} B_{(k+1)m} v_{-m} - \frac{1}{p} \eta(B)_{-2m} v_m \delta_{k1} \right], \end{aligned}$$

где $k = 1, 2, \dots$. Операторы $a(1)_{sm}$ и $b(1)_{(s+1)m}$ для $s = 1$ определены в (1.7). При $s = 2, 3, \dots$ они соответственно суть операторы $A(1)_{(s-1)m} v_m$ и $B(1)_{sm} v_m$.

3. В отсутствие магнитного поля кинетические коэффициенты $\lambda_m, \dots, \Theta_m$ не зависят от m в связи с инвариантностью амплитуд рассеяния по отношению к вращениям [2], [6]. В этом случае поток тепла и тензор напряжений (2.7) и уравнения сохранения (2.8) имеют вид

$$\begin{aligned} Q^j &= -\lambda T \nabla_j T^* + \Lambda \Delta u^j, \\ P^{ij} &= -2\eta S^{ij} + 2\Lambda \nabla_i \nabla_j T^* - 2\Theta \Delta S^{ij}, \\ \nabla_j u^j &= 0, \quad \Delta T^* = 0, \quad p \nabla_j p^* = \eta \Delta u^j, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $(i, j) = (1, 2) = (x, y)$. Навье-стоксовские коэффициенты теплопроводности λ и сдвиговой вязкости η , барнеттовский коэффициент линейных температурных напряжений Λ и супербарнеттовский коэффициент линейных сдвиговых напряжений Θ определяются формулами

$$\begin{aligned} T\lambda &= \frac{1}{3}(\mathbf{a} \cdot | \mathbf{a}), \quad \eta = \frac{1}{10}(\mathbf{b} : | \mathbf{b}), \\ \Lambda &= \frac{1}{10}(\mathbf{b} : | \mathbf{g}), \quad \Theta = \frac{1}{10}(\mathbf{b} : | \mathbf{h}), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где $(c | d) = p(c, R^{-1}d)$, декартовы векторный $\mathbf{a}(1)$ и тензорный второго ранга $\mathbf{b}(1)$ операторы определяются в (1.7), компоненты декартовых неприводимых тензорных операторов второго ранга $\mathbf{g}(1)$ и $\mathbf{h}(1)$ получаем по известным формулам [10] через соответствующие им компоненты сферических тензорных операторов

$$\begin{aligned} g(1)_{2q} &= [vR^{-1}a_1]_{2q}, \\ h(1)_{2q} &= \sum_{j=1}^3 [vR^{-1}c_j]_{2q}, \\ c(1)_{jq} &= d_j [vR^{-1}b_2]_{jq} - \frac{\eta}{p} v_{1q} \delta_{j1}, \\ d_1 &= \left(\frac{3}{20}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad d_2 = -\frac{1}{6}, \quad d_3 = \frac{8}{(315)^{\frac{1}{2}}}, \\ [vF_n]_{jq} &= \sum_{m=-1}^1 \langle 1mnq - m | jq \rangle v_{1m} F_{n,q-m}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$\langle j_1 q_1 j_2 q_2 | jq \rangle$ – коэффициент Клебша–Гордана [10].

Вычисление навье-стоксовских и барнеттовского коэффициентов переноса в (3.2) рассматривалось в работах [2], [6]. Вычисление супербарнеттовского коэффициента Θ в приближении первых моментов дано в приложении Б.

Следует ожидать, что в отсутствие магнитного поля, когда нет выделенного направления в пространстве, поток тепла, тензор напряжений и уравнения сохранения в виде (3.1) можно получить и в случае трехмерных течений газа ($i, j = 1, 2, 3$, Δ – трехмерный оператор Лапласа). Действительно, это можно показать, рассматривая, как и во втором пункте, соотношения (1.16), (1.15) и (1.12) последовательно при $s = 1$, $s = 2, \dots$

и учитывая получаемые при равной нулю дивергенции газодинамической скорости равенства

$$\begin{aligned} [\nabla S_k]_{kq} &= -\alpha_k \Omega_{kq}, \\ [\nabla \Omega_k]_{kq} &= \beta_k \Delta S_{kq}, \\ [\nabla [\nabla G_k]_{k\pm 1}]_{kq} &= \gamma_k(\pm) \Delta G_{kq}, \end{aligned}$$

где $k = 2, 3, \dots$. В последних соотношениях кроме обозначений из (3.3) введены следующие обозначения: $S_{2q} = [\nabla u]_{2q}$ – сферические компоненты тензора скоростей деформации (1.7), $\Omega_{2q} = [\nabla \omega]_{2q}$, где $\omega = (\text{rot } \mathbf{u})/2$ – локальная угловая скорость газа, G_{kq} есть или S_{kq} , или Ω_{kq} , $G_{kq} = [\nabla G_{k-1}]_{kq}$ при $k = 3, 4, \dots$. Числовые коэффициенты α_k , β_k и $\gamma_k(\pm)$ легко найти при каждом конкретном k , учитывая свойства коэффициентов Клебша–Гордана. Например, $\alpha_2 = (2/3)^{1/2}$, $\beta_2 = (1/24)^{1/2}$, $\gamma_2(-) = (3/20)^{1/2}$, $\gamma_2(+)= 8/(315)^{1/2} \dots$

Аналогичным образом получаем из (1.13) и (1.6) оператор Вигнера (1.1) вне кнудсеновского слоя в случае трехмерных течений газа линейных диамагнитных молекул в отсутствие внешнего магнитного поля в виде

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(\varepsilon_1) \Big\{ 1 + n^* + \hat{\varepsilon}_1 T^* + \frac{M}{T} \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + \sum_{s=1}^{\infty} (-1)^s [(A(1) | \nabla)^{[s]} T^* + (B(1) | S)^{[s+1]} + \\ + \Delta(C(1) | S)^{[s-1]} - (E(1) | \Omega)^{[s]} + \delta_{s2} \Delta(C(1) | u)^{[1]}] \Big\}, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где в отличие от обозначений к (1.13) величина

$$(X(1) | Y)^{[s]} = \sum_{q=-s}^s (-1)^{s-q} X(1)_{sq} Y_{s,-q}$$

есть скалярное произведение сферических тензоров ранга s , $\nabla_{sq} = [\nabla \nabla_{s-1}]_{sq}$ при $s = 2, 3, \dots$,

$$A(1)_{sq} = R^{-1} a(1)_{sq}, \quad B(1)_{s+1,q} = R^{-1} b(1)_{s+1,q},$$

где $s = 1, 2, \dots$, операторы $a(1)_{sq}$ и $b(1)_{s+1,q}$ при $s = 1$ определяются в (1.7), а при $s = 2, 3, \dots$ они представляют собой соответственно операторы $[vA(1)_{s-1}]_{sq}$ и $[vB(1)_s]_{s+1,q}$,

$$\begin{aligned} C(1)_{1q} &= R^{-1} \left(\gamma_2(-) [vB_2]_{1q} - \frac{\eta}{p} v_{1q} \right), \\ C(1)_{sq} &= R^{-1} [v(C_{s-1} - \beta_s E_s + \gamma_s(+)) B_{s+1}]_{sq}, \\ E(1)_{sq} &= R^{-1} [v(E_{s-1} + \alpha_s B_s)]_{sq}, \end{aligned}$$

где $s = 2, 3, \dots$. Заметим, что в отличие от функций распределения для одноатомного газа [5] оператор Вигнера (3.4) зависит от производных локальной угловой скорости газа по пространственным координатам, что обусловлено нецентральными межмолекулярными силами, в отсутствие которых операторы $E(1)_{sq}$, как легко видеть, являются нулевыми.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Кинетические коэффициенты в (2.1) определяются формулами

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} T\lambda(k)_m \\ \Gamma(k)_m \end{bmatrix} &= 2^{\frac{1}{2}} p \left(a_{-m}, \begin{bmatrix} A_{k;-m} \\ B_{k+1;-m} \end{bmatrix} \right), \\
 \begin{bmatrix} \eta(k)_{2m} \\ \Lambda(k)_{2m} \end{bmatrix} &= p \left(b_{-2m}, \begin{bmatrix} B_{k+1;-2m} \\ A_{k;-2m} \end{bmatrix} \right), \\
 \begin{bmatrix} \Lambda(k)_0 \\ \Lambda(k) \end{bmatrix} &= p \left(\begin{bmatrix} b_{20} \\ c \end{bmatrix}, A_{k;0} \right), \\
 \begin{bmatrix} \eta(k)_0 \\ \eta(k) \end{bmatrix} &= p \left(\begin{bmatrix} b_{20} \\ c \end{bmatrix}, B_{k+2;0}^{(1)} \right),
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

в которых кроме обозначений к (2.1) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
 A(1)_{i;n} &= 2^{-\frac{i}{2}} \sum_{m(i)} A(1)_{m(i)} \delta \left(\sum_{j=1}^i m_j - n \right), \\
 B(1)_{i;n} &= B(1)_{i;n}^{(0)}, \\
 B(1)_{i;n}^{(k)} &= 2^{-\frac{i}{2}} \sum_{m(i)} m_1^k B(1)_{m(i)} \delta \left(\sum_{j=1}^i m_j - n \right),
 \end{aligned}$$

где $m(i)$ – набор индексов $m_1, \dots, m_i$ ($m_j = \pm 1$, $j = 1, \dots, i$, $i = 1, 2, \dots$) и суммирование производится по всем этим индексам, $\delta(z - n) = \delta_{zn}$ – символ Кронекера,

$$\begin{aligned}
 A(1)_{m(i)} &= R_B^{-1} a_{m(i)}, \\
 B(1)_{m(i+1)} &= R_B^{-1} b_{m(i+1)}.
 \end{aligned}$$

Операторы $a(1)_{m(i)}$ и $b(1)_{m(i+1)}$ при $i = 1$ есть соответственно $v_{m_1}(\hat{\varepsilon}_1 - 1)$ и $(M/T)v_{m_1}^2 \times \delta_{m_1, m_2}$. При $i = 2, 3, \dots$ эти операторы можно найти по формуле (см. обозначения к (1.14))

$$x(1)_{m(j)} = V[(X(1)v)_{m(j)}],$$

где

$$\begin{aligned}
 (X(1)v)_{m(j)} &= X(1)_{m(j-1)} v_{m_j}, \\
 x &= a, b, \quad X = A, B, \quad j = i, i+1.
 \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

В двухмоментном приближении, когда [2], [6]

$$R^{-1}b_{2q} = 2^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^*}{p} [\Phi^{2000}(1)_{2q} - \nu(02)\Phi^{0200}(1)_{2q}],$$

операторы $c(1)_{jq}$ в (3.3) имеют вид

$$\begin{aligned} c(1)_{1q} &= -g \left[\Phi^{1010}(1)_{1q} + \left(\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{2}} \nu(02)\Phi^{1200}(1)_{1q} \right], \\ c(1)_{2q} &= \frac{5}{6} g \nu(02)\Phi^{1200}(1)_{2q}, \\ c(1)_{3q} &= \left(\frac{64}{21}\right)^{\frac{1}{2}} g [\Phi^{3000}(1)_{3q} - 3^{-\frac{1}{2}} \nu(02)\Phi^{1200}(1)_{3q}], \end{aligned}$$

где $\eta^* = \eta + \Delta\eta$ — коэффициент сдвиговой вязкости в двухмоментном приближении [2], [6],

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{T}{vG(2000)}, \quad \Delta\eta = \eta\nu(02)\nu(20), \\ \nu(ij) &= \frac{\sigma(ij^{00})}{\sigma(ij^{00})}, \quad v = \left(\frac{16T}{\pi M}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad g = \left(\frac{2T}{5M}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta^*}{p}, \end{aligned}$$

ортонормированные операторы $\Phi^{kslr}(1)_{jq}$ при $k, s = 0, 1, 2$ и $l, r = 0, 1$ и эффективные сечения $\sigma(\cdots\cdots)$, $\sigma(\cdots)$ определяются в приложении работы [11],

$$\Phi^{3000}(1)_{3q} = \left(\frac{M}{3T}\right)^{\frac{1}{2}} [v\Phi^{2000}(1)_2]_{30}.$$

Учитывая равенства для эффективных сечений

$$\begin{aligned} \sigma(3000) &= \frac{3}{2}\sigma(2000) = \frac{9}{4(1+x)}\sigma(1010), \\ \sigma\left(\begin{smallmatrix} 3000 \\ 1200 \end{smallmatrix}\right) &= \frac{3}{2} \sigma\left(\begin{smallmatrix} 2000 \\ 0200 \end{smallmatrix}\right) = -\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sigma\left(\begin{smallmatrix} 1010 \\ 1200 \end{smallmatrix}\right), \end{aligned}$$

где

$$x = \frac{5}{6} \left(C_V - \frac{3}{2}\right) \frac{\sigma(0001)}{\sigma(2000)},$$

получаем супербарнеттовский коэффициент линейных сдвиговых напряжений Θ в виде

$$\Theta = \frac{5}{3} \frac{\eta^3}{\rho p} \xi,$$

где

$$\xi = 1 - \frac{9}{25} \frac{x}{1+x} + \frac{\Delta\eta}{\eta} \left[2 + 0.03y \left(16 + 48z + 17z^2 + \frac{3(3+2x)}{(1+x)^2} \right) \right],$$

$$y = \frac{\sigma(0200)}{\sigma(1200)}, \quad z = \frac{\sigma(2000)}{\sigma(0200)}.$$

Возбуждение внутренних степеней свободы молекул, как и в случае коэффициента сдвиговой вязкости η , слабо влияет на величину Θ . Так, для одноатомного газа $\xi = 1$ [5]. Для азота при нормальной температуре, подставляя в выражение для ξ вычисленные в [2], [6] эффективные сечения, получаем $\xi = 0.955$.

Список литературы

- [1] *Н. Н. Боголюбов*. Избранные труды в трех томах. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
- [2] *F. R. W. McCourt, J. J. M. Beenakker, W. E. Köhler, I. Kuščer*. Nonequilibrium Phenomena in Polyatomic Gases. V. I, II. Oxford: Clarendon, 1990.
- [3] *Дж. Ферцигер, Г. Канер*. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [4] *A. C. Levi, F. R. McCourt, J. Hajdu*. Physica. 1969. V. 42. № 2. P. 347–362.
- [5] *Л. А. Пальцев*. Изв. РАН МЖГ. 1997. Т. 1. С. 155–164.
- [6] *H. Moraal*. Phys. Rep. 1975. V. 17C. № 5. P. 225–306.
- [7] *Л. А. Пальцев*. ТМФ. 1996. Т. 107. № 2. С. 307–319.
- [8] *Л. А. Пальцев*. ТМФ. 1986. Т. 66. № 3. С. 445–454.
- [9] *Y. Sone, A. Kazuo, S. Takata, H. Sugimoto, A. V. Bobylev*. Phys. Fluids. 1996. V. 8. № 2. P. 628–638.
- [10] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [11] *Л. А. Пальцев*. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 118–131.

Поступила в редакцию 18.VI.2001 г.