Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. А. Максимов, Явные формулы для обобщенных переменных действие–угол в окрестности изотропного тора и их применение, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 378–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf196>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:50:22

© 2003 г. В. В. Белов*, С. Ю. Доброхотов†, В. А. Максимов*

ЯВНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ В ОКРЕСТНОСТИ ИЗОТРОПНОГО ТОРА И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ

Различные варианты теоремы Дарбу–Вейнштейна гарантируют существование переменных типа действие–угол и гармонического осциллятора в окрестности изотропных торов в фазовом пространстве. Процедура построения этих переменных сводится к решению достаточно сложной системы уравнений в частных производных. Показано, что эта система может быть проинтегрирована в квадратурах, что позволяет свести задачу построения указанных переменных к решению системы квадратных уравнений. Обсуждаются приложения этого чисто геометрического факта к задачам классической и квантовой механики.

Ключевые слова: изотропные торы, переменные действие–угол, квазиклассические асимптотики.

1. ВВЕДЕНИЕ

Канонические переменные типа действие–угол – “фундаментальные” переменные классической механики в теории интегрируемых и близких к интегрируемым гамильтоновых систем. Эти переменные играют также существенную роль и в квантовой механике (в рамках квазиклассического приближения). Достаточно напомнить, что впервые условия квантования в “старой” квантовой теории были записаны именно в этих переменных. Переменным действие–угол посвящено огромное количество публикаций, мы укажем лишь некоторые [1]–[14].

В интегрируемом случае существование переменных действие–угол, обозначаемых $(I, \phi) = (I_1, \dots, I_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$, гарантируется теоремой Лиувилля, и они связаны с геометрическими объектами в $(2n)$ -мерном фазовом пространстве – n -мерными семействами лиувиллевых торов размерности n . Эти торы, определяемые равенством $I = \text{const}$ и обозначаемые в дальнейшем $\Lambda^n(I)$, обладают свойством лагранжевости. Динамика в переменных действие–угол на них становится особенно простой: $\phi = \omega(I)t + \phi_0$. При этом гамильтониан H в переменных (I, ϕ) зависит лишь от I , а вектор частот легко

*Московский государственный институт электроники и математики, Москва, Россия. E-mail: pm@miem.edu.ru

†Институт проблем механики РАН, Москва, Россия. E-mail: dobr@ipmnet.ru

восстанавливается по формуле $\omega(I) = \partial H / \partial I$. Переменные действия, как правило, не являются глобальными во всем фазовом пространстве. Оно разбивается на области, в каждой из которых вводятся “свой” переменные действие–угол. Границам этих областей (там, где нарушены условия теоремы Лиувилля) соответствуют уже не лиувиллевы торы, а другие геометрические объекты [1], [4], [7], [15], [16]. Это могут быть либо торы Λ^k ($k < n$) меньшей размерности, либо негладкие многообразия, либо многообразия, топологически не эквивалентные торам, например сферы. В первом из перечисленных случаев гамильтониан H остается гладкой функцией в окрестности “граничных” торов Λ^k , здесь мы имеем вырождение лиувиллевых торов. Простейший пример дает одномерный гармонический осциллятор с гамильтонианом $H = \omega I$ (когда действие I связано с переменными p, x в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$ формулой $I = (p^2 + x^2)/2$). Точка $I = 0$ на полупрямой $\mathbb{R}_I^+$ определяет границу области одномерных лиувиллевых торов (окружностей) при $I > 0$, отвечающей “нуль-мерному тору” – точке покоя.

Маломерные торы, обобщающие “граничные торы” интегрируемых гамильтоновых систем, известны в математической литературе как изотропные торы, и они могут быть рассмотрены как самостоятельные геометрические объекты в $2n$ -мерном фазовом пространстве. Их размерность k не превышает n . При $k = 0$ эти торы – точки; при $k = 1$ – замкнутые кривые (при $k = n$ они называются лагранжевыми торами). Хотя все такие торы являются чисто геометрическими объектами, существующими независимо от гамильтоновых систем, они играют особую роль в теории динамических систем, поскольку геометрические объекты, обладающие свойством инвариантности по отношению к фазовым потокам, порожденным многими гамильтоновыми системами (включая неинтегрируемые), часто оказываются именно такими торами. При этом условие интегрируемости не является обязательным для их существования. Более того, часто в неинтегрируемых случаях только такие маломерные (или индивидуальные, т.е. не входящие в какое-либо семейство) инвариантные объекты и удастся явно построить. Динамику в их окрестности естественно изучать с помощью теории нормальных форм в переменных типа действие–угол, которые оказываются в данном случае исключительно удобными. Такие задачи, по существу, относятся к кругу задач теории возмущений, поскольку в окрестности изотропных торов гамильтонианы неинтегрируемых систем могут быть рассмотрены как возмущения гамильтонианов некоторых вполне интегрируемых систем.

Поясним сказанное более подробно. Наиболее распространенные задачи теории возмущений гамильтоновых систем относятся к ситуациям, когда гамильтониан задачи представляется в виде $H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \phi)$, где ε – малый параметр, $H_0(I)$ – гамильтониан интегрируемой гамильтоновой системы, а H_1 – ее “возмущение”. Цель теории возмущений, как известно, состоит в построении таких преобразований переменных действие–угол $(I, \phi) \rightarrow (I', \phi')$, при которых в новых переменных гамильтониан H на некоторых “нерезонансных” подмножествах с точностью до $O(\varepsilon^N)$ так же, как и $H_0(I)$, не будет зависеть от новых углов ϕ' , или будет зависеть от ϕ' некоторым специальным простым образом. Наиболее известные и хорошо разработанные процедуры построения таких переменных имеются в теории усреднения и в КАМ-теории (см., например, [1], [5], [6], [9], [11], [14]–[23]).

Другая возможность построения теории возмущений, которую мы и имеем в виду в этой статье, основывается на разложении неинтегрируемого гамильтониана по отклонению переменных действия I от некоторого значения I^0 [1], [5], [6], [9], [15], [17], [18]. Тогда в качестве параметра теории возмущений – “внутреннего” (“скрытого”) параметра – выступает малое отклонение $\Delta I = I - I^0$. В этом случае возмущенный гамильтониан H представляется в виде $H = H(I^0, \Delta I) + \tilde{H}_1(I^0, \Delta I, \phi)$. Здесь $H(I^0, \Delta I) = H^0 + \langle \omega^0, \Delta I \rangle$, H^0 – значение гамильтониана H при $I = I^0$, ω^0 – вектор частот на торе, определяемом равенством $I = I^0$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – евклидово скалярное произведение в пространстве соответствующей размерности, а $\tilde{H}_1 = O(|\Delta I|^{N+1/2})$ (вопрос о поведении $\tilde{H}_1$ по переменной ΔI мы обсудим ниже). Заметим, что такое разложение может иметь место как в окрестности полномерных (n -мерных) торов, так и в окрестности вырожденных (маломерных) торов. При этом разложение по направлениям “вырождения” несколько отличается от разложения по переменным действия и его удобно проводить в переменных типа гармонического осциллятора. По этой причине переменные действия удобно разбить на две группы, обозначив через ρ вектор переменных действия, отвечающих “направлениям вырождения” и задающих равенством $\rho = 0$ соответствующий маломерный тор, и сохранив за оставшимися переменными прежнее обозначение $\Delta I = I - I^0$. Также удобно разбить на две группы компоненты вектора частот, представив его в виде ω^0, β^0 , где частоты (показатели Флоке) β^0 соответствуют переменным ρ . Тогда возмущенный гамильтониан представляется в виде

$$H_1 = H^0 + \langle \omega^0, \Delta I \rangle + \langle \beta^0, \rho \rangle. \quad (1.1)$$

И при таком подходе цель теории возмущений состоит в построении новых переменных $\Delta I'$, ρ' , ϕ' , в которых на некоторых нерезонансных подмножествах гамильтониан H представляется в виде

$$H = H_N(I^0, \Delta I', \rho') + \tilde{H}_N(I^0, \Delta I', \rho', \phi'), \quad (1.2)$$

где $\tilde{H}_N = O((\Delta I')^{N+1}, (\rho')^{N+1/2})$ при $\Delta I' \rightarrow 0$ и $\rho' \rightarrow 0$ равномерно по ϕ' . Теорией возмущения такого типа (процедура *нормализации*) являются, в частности, теория нормальных форм Биркгофа в окрестности точек покоя (тогда в последних формулах присутствуют только переменные ρ и ρ') и теория Вильямсона в окрестности замкнутых траекторий (в этом случае имеется одна переменная ΔI и $n - 1$ переменных ρ). Вообще говоря, гамильтониан H_N может зависеть и от углов, но специальным (простым и стандартным) образом; функция H_N называется нормальной формой. Разумеется, возможны и смешанные ситуации, когда в качестве малых параметров выступают ε и ΔI .

Нормальная форма (как правило, полином) $H_N(I^0, \Delta I', \rho')$, очевидно, определяет вполне интегрируемую гамильтонову систему, а равенства $\Delta I' = \text{const}$, $\rho' = \text{const}$ задают ее (n -мерные) лиувиллевы инвариантные торы, которые по отношению к исходному гамильтониану являются *почти инвариантными* (соответствующее определение см. в разделе 3). Именно по отношению к этой гамильтоновой системе переменные $\Delta I'$, ρ' , ϕ' и являются “настоящими” переменными действие–угол, в то время как по отношению к исходной системе они являются лишь каноническими переменными, удобными с

точки зрения теории возмущений. Поэтому их естественно называть переменными типа действие–угол. Так как часто H_N – полином степени N , то его определение в конкретных задачах сводится к вычислению соответствующих коэффициентов.

Наиболее полные результаты в указанных теориях возмущений получены на основе использования аппарата производящих функций [1], [5], [6], [9], [14], [17], [18], [20], [22], [23]. Основополагающим здесь является тот факт, что переход от переменных (I, ρ, ϕ) к переменным (I', ρ', ϕ') осуществляется с помощью инфинитезимального преобразования: переменные (I, ρ, ϕ) лишь слабо изменяются. Именно поэтому переход к новым переменным в этом случае осуществляется с помощью одной глобально заданной производящей функции, что гарантирует автоматически каноничность замены переменных.

Подчеркнем еще раз, что теория построения нормальных форм в переменных типа действие–угол хорошо развита, алгоритмизуема и по крайней мере несколько приближений теории возмущений (коэффициентов нормальной формы – полинома H_N) могут быть получены явно, например с помощью компьютера. Таким образом, для упомянутых здесь вариантов теории возмущений предположение о наличии переменных типа действие–угол оказывается весьма существенным. Однако их явное построение зачастую является довольно сложной задачей даже для интегрируемых систем¹⁾.

Существование переменных типа действие–угол $(\Delta I', \rho', \phi')$ в окрестности изотропного тора – чисто геометрический факт, который следует из теоремы Дарбу–Вейнштейна [25], [26]; ясно также (в частности, из предыдущего обсуждения), что они могут быть введены различными способами. Однако вопрос о получении явных формул для них в конкретных задачах остается открытым. Использование производящих функций здесь (в отличие от указанных задач теории возмущений в переменных действие–угол) не эффективно, поскольку переход от исходных координат (например, евклидовых) фазового пространства к переменным типа действие–угол *не является инфинитезимальным преобразованием* и, как правило, не может быть осуществлен с помощью одной (глобальной) производящей функции.

Таким образом, решение задачи построения нормальных форм гамильтонианов в окрестности (заданных) инвариантных изотропных торов разбивается на два этапа:

1) построение канонических переменных, являющихся переменными действие–угол для некоторого интегрируемого гамильтониана, аппроксимирующего в первом приближении исходный в окрестности этого тора;

2) собственно построение нормальной формы с заданной точностью с помощью методов теории возмущений.

В этой статье мы решаем задачу первого этапа при дополнительном естественном предположении об *эллиптичности* соответствующего изотропного тора (строгое определение дается в разделе 2). А именно, в полной окрестности инвариантного k -мерного фиксированного тора *строим обобщенные переменные действие–угол (переменные типа действие–угол и гармонического осциллятора), явно задаваемые с помощью некоторой системы квадратных уравнений* (см. формулы (5.3), (5.4) ниже). Эта сис-

¹⁾ Например, переменные действие–угол для интегрируемой системы, описывающей волчок Ковалевской, были построены лишь сравнительно недавно [24].

тема появляется в результате интегрирования довольно сложной системы уравнений в частных производных. То обстоятельство, что последняя оказывается “интегрируемой в квадратурах”, является, на наш взгляд, достаточно неожиданным (и нерегулярным) фактом, представляющим собой центральный результат этой работы.

Указанный факт имеет чисто геометрическую природу и, вообще говоря, не связан с гамильтоновыми системами, хотя, естественно, основные его приложения относятся именно к ним. Как правило, при построении обобщенных переменных действие–угол достаточно иметь лишь один k -мерный изотропный тор и некоторые матрицы на нем, существование которых эквивалентно эллиптичности тора (или наличию симплектической связности, см. раздел 5). Часто, однако, сразу удается найти l -параметрическое семейство таких торов ($l \leq k$) и в конкретных задачах этот факт упрощает некоторые вычисления, несмотря на то что один из шагов алгоритма и соответствующие формулы внешне становятся более громоздкими.

Отметим также, что обобщенные переменные типа действие–угол можно ввести, как мы уже отмечали, неоднозначным образом. Предлагаемый здесь способ их построения оказывается универсальным в том смысле, что им можно пользоваться в любых ситуациях, хотя в некоторых конкретных задачах такие переменные могут быть введены и более оптимальным образом с точки зрения последующего построения соответствующей нормальной формы.

Кратко остановимся на содержании работы. В разделе 2 даны определения изотропных торов и примеры неинтегрируемых гамильтоновых систем, в которых такие торы возникают. В разделе 3 мы приводим определения и примеры обобщенных переменных действие–угол, а в разделе 4 – эвристические соображения для их построения. Основной результат статьи (анонсированный в работе [27]) – система квадратных уравнений для переменных действие–угол – содержится в разделе 5. В разделе 6 приведены примеры построения этих уравнений в некоторых конкретных задачах. Введение переменных действие–угол оказывается весьма полезным также в квантово-механических спектральных задачах с асимптотическим вырождением спектра; квантование этих переменных позволяет переписать исходную квантовую спектральную задачу (по крайней мере, в квазиклассическом приближении) в алгебраической форме (ср. с [10]). Краткому обсуждению этих вопросов посвящен раздел 7. Громоздкие технические вычисления вынесены в приложение.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ИЗОТРОПНЫХ ТОРОВ

Напомним соответствующие определения [5], [10], [13], [15], [22], [25], [28]–[30]. Пусть $\mathbb{R}_{p,x}^{2n}$ – фазовое пространство с координатами $y = (p, x)$, $p = {}^t(p_1, \dots, p_n)$ (импульсы), $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$ (пространственные координаты), с симплектической структурой, задаваемой формой $dp \wedge dx$. Здесь и далее индекс t слева сверху означает транспонирование векторов и матриц. Мы считаем, что l -мерное семейство k -мерных торов Λ^k , $l \leq k$, задается уравнениями

$$\begin{aligned} \Lambda^k = \Lambda^k(I_1, \dots, I_l) = \{y \in \mathbb{R}_{p,x}^{2n}, y = Y(\phi_1, \dots, \phi_k, I), \\ \phi_j \in [0, 2\pi], I = (I_1, \dots, I_l) \in \mathcal{M}\}, \end{aligned}$$

где $Y = {}^t(P(\phi, I), X(\phi, I))$ — гладкие функции, 2π -периодические по каждому из углов ϕ_j , $j = 1, 2, \dots, k$, $\mathcal{M}$ — некоторая область l -мерного пространства параметров $\mathbb{R}_I^l$, причем ранг матрицы $\partial Y / \partial \phi$ равен k . Мы также требуем, чтобы $\Lambda^k(I)$ были изотропными подмногообразиями. Условие изотропности (лагранжевости) означает, что форма $dp \wedge dx|_{\Lambda^k} = 0$, или, что то же самое, что касательные плоскости к Λ^k лагранжевы, т.е. обращаются в нуль скобки Лагранжа

$$\left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi_j}, \frac{\partial X}{\partial \phi_m} \right\rangle - \left\langle \frac{\partial P}{\partial \phi_m}, \frac{\partial X}{\partial \phi_j} \right\rangle = 0, \quad j, m = 1, \dots, k, \iff {}^t Y_\phi \hat{J} Y_\phi = 0. \quad (2.1)$$

Здесь и далее

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -E_n \\ E_n & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

E_n — единичная $(n \times n)$ -матрица и $\mathbf{0}$ — матрица с нулевыми элементами подходящего размера. Условие (2.1) гарантирует существование (локального) действия

$$S(x) = \int_{l(x_0 \rightarrow x)} P dX$$

на Λ^k , или иначе

$$\oint_{C \in \Lambda^k} P dX = 0$$

по замкнутым стягиваемым путям $C \in \Lambda^k$. Интегралы $\int_{\Gamma_m} P dX$ по базисным циклам Γ_m на Λ^k , вообще говоря, в нуль не обращаются. Они и называются переменными действия, сопряженными углам ϕ_j ,

$$I_j = \oint_{\Gamma_j \in \Lambda^k} P dX, \quad \Gamma_j = (\phi_m = \text{const}, m \neq j, \phi_j \in [0, 2\pi]). \quad (2.2)$$

Подчеркнем, что интегралы (2.2) можно вычислить для любого k -мерного тора. При этом если имеется l -мерное семейство Λ^k , то эти торы естественно параметризуются с помощью лишь l таких переменных. В дальнейшем мы предполагаем, что торы Λ^k параметризованы именно таким образом — с помощью l переменных действия $I_1, \dots, I_l$, сопряженных с углами $\phi_1, \dots, \phi_l$, которые мы теперь будем обозначать через $\varphi_1, \dots, \varphi_l$. Оставшиеся углы будем обозначать $\psi_1, \dots, \psi_{k-l}$, так что $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_l, \phi_{l+1}, \dots, \phi_k) = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_l, \psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{k-l}) = (\varphi, \psi)$. Тогда дополнительно к условиям (2.1) вектор-функция $Y(\phi, I)$ будет удовлетворять следующим (каноническим) соотношениям:

$$\langle Y_{I_i}, \hat{J} Y_{I_j} \rangle = 0, \quad \langle Y_{I_i}, \hat{J} Y_{\phi_j} \rangle = -\delta_{ij}, \quad \langle Y_{I_i}, \hat{J} Y_{\psi_m} \rangle = 0, \quad i, j = 1, \dots, l, \quad m = 1, \dots, k-l.$$

Условие инвариантности Λ^k относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом H означает, что траектория, выпущенная из начальной точки $r_0 = (p_0, x_0) \in \Lambda^k$, всегда остается на этом торе, т.е. $r^t(r_0) = g_H^t r_0 \in \Lambda^k \forall t \in \mathbb{R}$. Если движение на инвариантных торах Λ^k квазипериодично, то, как правило, углы на них выбираются так,

что динамика по угловым переменным прямолинейна и задается набором частот $\omega(I) = {}^t(\omega_1(I), \dots, \omega_k(I))$: $\phi \rightarrow \phi_0 + \omega t$. Тогда $y = Y(\phi_0 + \omega t, I)$ есть решение гамильтоновой системы

$$\dot{y} = \hat{J}H_y. \quad (2.3)$$

Заметим также, что, как правило, гамильтониан $H|_{\Lambda^k} = E = \text{const}$ (это всегда так, если частоты $\omega_1, \dots, \omega_n$ несоизмеримы). Параметр E (энергию системы) также можно использовать в качестве одного из параметров, характеризующих Λ^k , однако для нас более удобно считать, что E есть величина, зависящая от I : $E = E(I)$. Если $k = l = n$ (k и l максимальны), то переменные I вида (2.2) и углы φ являются “настоящими” переменными действие–угол для системы (2.3).

Система (2.3) и тор Λ^k (при фиксированном I) порождают систему в вариациях – линейную гамильтонову систему с почти периодическими или периодическими коэффициентами,

$$\dot{v} = \hat{J}H_{yy}(Y(\phi + \omega t), I)v, \quad v(t, \phi) \in \mathbb{C}^{2n}. \quad (2.4)$$

Хорошо известно (и очевидно), что вектор-функции Y_{ϕ_j} и $Y_{I_{j'}}$, $j = 1, 2, \dots, k$, $j' = 1, 2, \dots, l$, являются решениями системы (2.4). В приложениях часто встречаются ситуации (см., например, [2], [5], [6], [13], [15], [20]–[23], [26], [28]–[42]), когда дополнительно к решениям Y_{ϕ_j} и $Y_{I_{j'}}$ для системы (2.4) удастся построить $2(n-k)$ комплексных решений типа Флоке, косоортогональных к решениям Y_{ϕ_j} , $Y_{I_{j'}}$, т.е. решений вида

$$v_m = V_m(\phi + \omega t, I)e^{i\beta_m t}, \quad \bar{v}_m = \bar{V}_m(\phi + \omega t, I)e^{-i\beta_m t}, \quad m = 1, \dots, n-k,$$

где $\beta_m(I)$ – вещественные числа (показатели Флоке), не зависящие от углов ϕ_j , черта означает комплексное сопряжение, $V_m(\phi, I)$ – гладкие 2π -периодические по каждому аргументу вектор-функции, удовлетворяющие условиям косоортогональности и сопряжения

$$\begin{aligned} \langle Y_{\phi_j}, \hat{J}V_m \rangle &= \langle Y_{\phi_j}, \hat{J}\bar{V}_m \rangle = 0, & \langle Y_{I_{j'}}, \hat{J}V_m \rangle &= \langle Y_{I_{j'}}, \hat{J}\bar{V}_m \rangle = 0, \\ \langle V_m, \hat{J}V_{m'} \rangle &= 0, & \langle \bar{V}_m, \hat{J}V_{m'} \rangle &= 2i\delta_{mm'}, \\ j &= 1, \dots, k, & m, m' &= 1, \dots, n-k, & j' &= 1, \dots, l. \end{aligned} \quad (2.5)$$

В этом случае система в вариациях называется приводимой и устойчивой, а торы Λ^k – орбитально устойчивыми в линейном приближении; *такие торы часто называют эллиптическими* [5], [6], [15], [22], [23].

В дальнейшем будем обозначать через $V(\phi, I)$, $\bar{V}(\phi, I)$ $(2n \times (n-k))$ -матрицы, составленные из вектор-столбцов $V_m(\phi, I)$, $\bar{V}_m(\phi, I)$.

Матрицы $V(\phi, I)$, $\bar{V}(\phi, I)$ играют существенную роль в дальнейшем. Так как они комплексно-сопряжены, то, очевидно, достаточно задать лишь одну матрицу $V(\phi, I)$ с предписанными выше свойствами. Эта матрица в точках тора Λ^k порождает $(n-k)$ -мерные комплексные лагранжевы плоскости $\tilde{r}^{n-k}(\phi, I)$ в комплексном фазовом пространстве, которые в теории квазиклассических асимптотик с комплексными фазами [13], [28]–[30], [36] называются (укороченным или минимальным) комплексным ростком Маслова. Совокупность $(\Lambda^k, \tilde{r}^{n-k})$ при каждом фиксированном I есть векторное расслоение – изотропный тор с комплексным ростком. Хотя как матрицы $V(\phi, I)$, $\bar{V}(\phi, I)$, так

и порождаемые ими плоскости естественным образом возникают в теории гамильтоновых систем, в теории линейных систем с периодическими и почти периодическими коэффициентами в квазиклассических асимптотиках, их можно рассматривать отдельно от динамики как самостоятельные объекты.

Простейшими примерами инвариантных изотропных торов являются точка покоя ($k = 0$) или замкнутая фазовая кривая Λ^1 ($k = 1$). Более сложные ситуации возникают в задачах, в которых гамильтонова система допускает инвариантные симплектические подмногообразия M размерности $2(n - m)$, $m < n$. Если динамика суженной на M гамильтоновой системы $H|_M$ является вполне интегрируемой (движение системы на M является периодическим или квазипериодическим), то такая система называется частично интегрируемой [7], [15], [16], [22]. Подобные системы активно исследуются в последнее время. Приведем примеры.

ПРИМЕР 1. Одна из популярных в настоящее время моделей, используемых при изучении проблемы квазиклассического квантования неинтегрируемых гамильтоновых систем с хаотическим поведением, – модель двух связанных нелинейных осцилляторов (см., например, [33], [43]) с гамильтонианом

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2^2}{2} + \frac{\mu}{4}(x_1^4 + x_2^4), \quad (2.6)$$

где μ – неотрицательная константа. В этом случае $M = \{x_1 = p_1 = 0\}$ или $M = \{x_2 = p_2 = 0\}$. Суженные гамильтонианы

$$H'_j = \frac{p_j^2}{2} + \frac{\varepsilon}{4}x_j^4, \quad j = 1, 2,$$

определяют на M семейство замкнутых траекторий $H'_j = E$, E – энергия, $E > 0$.

ПРИМЕР 2. Анизотропная задача Кеплера – одна из модельных задач в теории твердого тела – описывается уравнением Шредингера, соответствующим гамильтониану [8]

$$H(p, x) = \frac{p_1^2 + p_2^2 + \gamma p_3^2}{2} - \frac{\alpha}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}},$$

где γ, α – положительные константы. Соответствующая гамильтонова система при $\gamma \neq 1$ неинтегрируема, однако в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^6$ имеются инвариантные многообразия размерности $k < 3$. Простейший пример – замкнутые траектории в подпространстве $M = \{(x, p): x_3 = p_3 = 0\}$, соответствующие кеплеровым эллипсам на плоскости x_1, x_2 ; более сложный пример – двумерные торы, “склеенные” (неединственным образом) из этих траекторий.

ПРИМЕР 3. Атом водорода в однородном магнитном поле описывается уравнением Шредингера с соответствующим неинтегрируемым гамильтонианом вида (в полярных координатах ρ, φ, z) [34]

$$H = \frac{1}{2m} \left(p_\rho^2 + p_z^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2} \right) + \alpha \rho^2 - \frac{e_0}{\sqrt{\rho^2 + z^2}},$$

здесь m, α, e_0 — физические положительные константы, p_ρ, p_z, p_φ — канонически-сопряженные импульсы. Как и в предыдущем примере, соответствующая гамильтонова система имеет инвариантные многообразия размерности $k = 1, 2$. Например, при сужении системы на инвариантную плоскость $M = \{(x, p): p_z = z = 0\}$ возникает интегрируемая система с циклической переменной $\varphi \in [0, 2\pi]$, имеющая точки покоя и замкнутые фазовые кривые.

ПРИМЕР 4. Трехмерный ангармонический осциллятор с переменной частотой, описываемый гамильтонианом [35]

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}{2} + \frac{\omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2}{2} + \frac{\Omega^2(x_1, x_2)x_3^2}{2}, \quad (2.7)$$

где $\Omega(x_1, x_2)$ — гладкая функция, $\Omega(x_1, x_2) \geq C > 0$. Очевидно, что в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^8$ плоскость $M = \{(p, x), x_3 = p_3\}$ инвариантна относительно соответствующей гамильтоновой системы. Если частоты ω_1, ω_2 двумерного гармонического осциллятора $H|_M$ несоизмеримы, то плоскость M расслаивается на двумерные инвариантные торы. В случае соизмеримости этих частот траекториями гамильтониана $H|_M$ являются известные фигуры Лиссажу и из них можно “склеить” (неоднозначным образом) инвариантные торы.

Отметим еще раз, что многочисленные примеры изотропных торов даются *вырожденными* торами (по отношению к лагранжевым или лиувилевым) в интегрируемых случаях; они соответствуют *границам* семейств лиувилевых торов.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПРИМЕРЫ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ

Как отмечалось во введении, переменные действия в окрестности изотропных торов удобно разделить на две группы ΔI и ρ . При этом, хотя нормальная форма зависит от ρ регулярным образом, исходный гамильтониан, как правило, зависит от ρ при $\rho \rightarrow 0$ нерегулярно. Поэтому вместо переменных ρ и соответствующих углов удобно использовать переменные гармонического осциллятора и тем самым исследовать задачу в смешанных переменных типа действие–угол и гармонического осциллятора. Такие переменные часто называют *обобщенными переменными действие–угол* [5], [15], [22]. Поясним смысл введения таких переменных на простых примерах.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим в евклидовом фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^2$ одномерную гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(p, x) = \beta \frac{p^2 + x^2}{2} + \mu x^3 \equiv H_1(p, x) + \mu x^3, \quad p, x \in \mathbb{R}^2, \quad \mu \geq 0, \quad \beta > 0.$$

При $\mu = 0$ переход от декартовых координат (p, x) к полярным переменным действие–угол (для гармонического осциллятора) задается формулами $p = \sqrt{2\rho} \cos \theta$, $x = \sqrt{2\rho} \sin \theta$, где $\theta \in [0, 2\pi]$, $\rho = \oint_{H_1=E} p dx$. Фазовое пространство расслаивается на траектории $\Lambda^1(\rho)$ — линии уровня $H_1 = E$. При $\rho \rightarrow 0$ траектории $\Lambda^1(\rho)$ стягиваются в устойчивую точку покоя $(0, 0)$ гамильтониана $H(p, x)$.

Эти переменные можно использовать и при исследовании траекторий гамильтоновой системы при $\mu \neq 0$. Тогда гамильтониан H в координатах (ρ, θ) примет вид

$$H(p, x) = \beta\rho + (2\rho)^{3/2} \cos^3 \theta$$

и будет нерегулярно зависеть от ρ . Вместо переменных ρ, θ удобно использовать комплексную систему координат $\xi, \bar{\xi}$:

$$\xi = \frac{p + ix}{2} \equiv \sqrt{2\rho} e^{i\theta}, \quad \bar{\xi} = \frac{p - ix}{2} \equiv \sqrt{2\rho} e^{-i\theta}.$$

В этих переменных

$$H(p, x) = \frac{\beta\xi\bar{\xi}}{2} + \mu \left(\frac{\xi - \bar{\xi}}{2i} \right)^3.$$

При этом $y = Y(\xi, \bar{\xi}) \equiv V\xi + \bar{V}\bar{\xi}$, где $V = {}^t(1, -i)$, $\bar{V} = {}^t(1, i)$ – собственные векторы матрицы $\hat{J}H_{yy}(0)$. Такое представление гамильтониана является более удобным, так как в этих переменных H – аналитическая функция по ξ и $\bar{\xi}$. Переменные $\xi, \bar{\xi}$ и ρ, θ являются каноническими; в терминах матриц Якоби соответствующих отображений $Y: (p, x) \rightarrow (I, \theta)$ и $\tilde{Y}: (p, x) \rightarrow (\xi, \bar{\xi})$ это означает выполнение равенств

$$\langle Y_\theta, \hat{J}Y_\theta \rangle = \langle Y_I, \hat{J}Y_I \rangle = 0, \quad \langle Y_I, \hat{J}Y_\theta \rangle = -1, \quad (3.1a)$$

$$\langle \tilde{Y}_\xi, \hat{J}\tilde{Y}_\xi \rangle = \langle \tilde{Y}_{\bar{\xi}}, \hat{J}\tilde{Y}_{\bar{\xi}} \rangle = 0, \quad \langle \tilde{Y}_\xi, \hat{J}\tilde{Y}_{\bar{\xi}} \rangle = -2i, \quad (3.1b)$$

(2×2) -симплектическая матрица $\hat{J}$ определена в предыдущем разделе.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Комплексные переменные $(\xi, \bar{\xi})$ и их многомерные аналоги (см. ниже) вводятся исключительно для удобства вычислений. В принципе все необходимые вычисления можно проводить и в вещественных переменных $p' = (\xi + \bar{\xi})/2$, $q' = (\xi - \bar{\xi})/(2i)$ так, что при построении как переменных типа действие–угол, так и нормальных форм аналитичности гамильтонианов и функций Y требовать не нужно. Можно проводить все вычисления в комплексных координатах на формальном уровне и лишь в самом конце вычислений вернуться к вещественным переменным. Точно так же в процессе вычислений на переменные $(\xi, \bar{\xi})$ следует смотреть как на независимые и лишь в конце считать их комплексно-сопряженными.

ПРИМЕР 6. Как известно, в окрестности точки покоя ($k = 0$, $r = n$) для построения переменных типа действие–угол работает обычная процедура нормализации – построения нормальных форм Биркгофа [1], [5], [6], [14], [15]. Считаем, что в этой точке $y = Y = 0$, и предположим, что она устойчива в линейном приближении. Тогда все собственные числа матрицы $\hat{J}H_{yy}$ чисто мнимые и образуют пары $\pm i\beta_1, \dots, \pm i\beta_n$. Отвечающие им собственные векторы $V_m, \bar{V}_m$, $m = 1, \dots, n$, удовлетворяют второй группе условий (2.5) (их всегда можно выбрать таким образом). Обозначим через $V, \bar{V}$ $(2n \times n)$ -матрицы, составленные из этих векторов. Тогда замена переменных

$$y = V\xi + \bar{V}\bar{\xi} \quad (3.2)$$

будет канонической и гамильтониан системы в окрестности точки покоя можно записать в виде

$$H = H(0) + \langle \beta^0, \rho \rangle + \tilde{H}_1(\xi, \bar{\xi}), \quad \tilde{H}_1 = O(|\rho|^{3/2}), \quad \rho \rightarrow 0.$$

Здесь $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, $\rho_j = \xi_j \bar{\xi}_j / 2$, $j = 1, 2, \dots, n$, $\beta^0 = (\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Естественная задача исследования поведения соответствующей системы Гамильтона в окрестности точки покоя – это построение при некоторых условиях нерезонансности на частоты β^0 новых переменных $\xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n, \bar{\xi}'_1, \dots, \bar{\xi}'_n)$, в которых гамильтониан примет вид

$$H = H_N(\rho') + \tilde{H}_N(\xi', \bar{\xi}') \quad (3.3)$$

с $N > 1$. Здесь вектор ρ' связан с $(\xi', \bar{\xi}')$ так же, как и ρ с $(\xi, \bar{\xi})$, H_N – полином степени N и $\tilde{H}_N(\xi', \bar{\xi}') = O(|\rho'|^{N+1/2})$.

Следовательно, первый шаг построения таких переменных – нахождение канонической замены (3.2), – по крайней мере с теоретической точки зрения, элементарен. Переменные ρ являются переменными действия для гармонического осциллятора, и такое представление гамильтониана, по существу, есть ряд теории возмущений по $\rho \rightarrow 0$ в окрестности точки покоя $\rho = 0$. Уравнения $\rho_j = \text{const} \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, задают в окрестности устойчивой точки покоя лиувиллев тор, который по отношению к исходной системе будет лишь почти инвариантным. Представление гамильтониана в виде (3.3) дает приближенную динамику (mod $O((\rho')^{N+1/2})$) в окрестности точки покоя.

В двух предыдущих примерах точка $\rho = 0$ являлась критической в том смысле, что при $\rho \rightarrow 0$ торы стягивались в точку. В других примерах такого вырождения не происходит.

ПРИМЕР 7. Рассмотрим одномерную гамильтонову систему на фазовом пространстве $S^1_\psi \times \mathbb{R}^1_{p_\psi}$ (“цилиндре”) с гамильтонианом $H = \omega p_\psi^2$, где $\psi \in [0, 2\pi]$ – угловая координата на окружности S^1_ψ , а p_ψ – сопряженный ей импульс. Поверхность уровня $p_\psi = I$ ($H = \omega I^2$), $I = \text{const}$ задает инвариантную фазовую кривую – окружность $\Lambda^1(I) = \{p_\psi = I, 0 \leq \psi \leq 2\pi\}$, которая в пределе при $I \rightarrow 0$, в отличие от предыдущего примера, сохраняет свою размерность. А именно, $\Lambda^1(0)$ есть “окружность покоя”, состоящая целиком из точек покоя гамильтониана H .

Следующий пример демонстрирует смешанную ситуацию.

ПРИМЕР 8. Рассмотрим теперь неинтегрируемую двумерную гамильтонову систему на фазовом пространстве $S^1_\psi \times \mathbb{R}^1_{p_\psi} \times \mathbb{R}^2_{x,p}$ с гамильтонианом

$$H = \omega p_\psi + \beta \frac{p^2 + x^2}{2} + \tilde{H}(p_\psi, \psi, p, x) \equiv \omega p_\psi + \beta \xi \bar{\xi} + \tilde{H}(p_\psi, \psi, \xi, \bar{\xi}),$$

где функция $\tilde{H} = O(|p_\psi|^2 + |\xi|^3/2)$ равномерно по $\psi \in [0, 2\pi]$ в окрестности подмногообразия $p_\psi = 0$, $|\xi| = 0$. Уравнения $p_\psi = I$, $|\xi|^2/2 = \rho$, $I, \rho = \text{const} \geq 0$ определяют 2-параметрическое семейство двумерных лагранжевых торов $\Lambda^2(I, \rho)$. При $I \rightarrow I^0 = 0$

и $\rho \rightarrow 0$ эти лагранжевы торы переходят в одномерное изотропное многообразие — инвариантную замкнутую кривую гамильтониана H ,

$$\Lambda^1(I^0) = \{(x, p), p = x = 0, p_\psi = 0, \psi \in [0, 2\pi]\}.$$

Набор переменных $\Delta I = I - I^0$, ψ (переменные типа действие-угол) и $\xi, \bar{\xi}$ (переменные гармонического осциллятора) составляет *обобщенные переменные действие-угол* в окрестности замкнутой кривой $\Lambda^1(I^0)$, $I^0 = 0$, а $\omega \Delta I + \beta \rho$ — это нормальная форма первого порядка гамильтониана H в окрестности (изолированного) одномерного изотропного тора (окружности) $\Lambda^k(I^0)$, $k = 1$.

Пусть в фазовом пространстве $\mathbb{R}_{p,x}^{2n}$ задан изотропный тор $\Lambda^k(I^0)$, $0 \leq k \leq n$. Использование в фазовом пространстве декартовых симплектических координат несущественно для дальнейшего; в конкретных ситуациях можно использовать и другие более подходящие симплектические координаты.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Будем говорить, что в окрестности изолированного тора Λ^k можно ввести *обобщенные переменные действие-угол*, если можно построить n -параметрическое семейство n -мерных лагранжевых торов $\Lambda^n(\Delta J, \rho)$, гладко зависящих от параметров $(\Delta J, \rho) = (\Delta J_1, \dots, \Delta J_k, \rho_1, \dots, \rho_{n-k})$, таких, что:

- 1) $J = I_0 + \Delta J$, ρ суть переменные действия на Λ^n (в смысле равенств (2.2));
- 2) $\Lambda^n \rightarrow \Lambda^k$ при $\rho \rightarrow 0$, $\Delta J \rightarrow 0$.

Будем обозначать через $(\phi, \theta) = (\phi_1, \dots, \phi_k, \theta_1, \dots, \theta_{n-k})$ угловые переменные на торах, сопряженные переменным (J, ρ) (в смысле равенств (2.2), если считать, что последние $n - k$ переменных I обозначены буквами ρ). Кроме того, обозначим $\xi_j = \sqrt{2\rho_j}e^{i\theta_j}$, $\bar{\xi}_j = \sqrt{2\rho_j}e^{-i\theta_j}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-k})$, $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-k})$. Переменные $(J = I^0 + \Delta J, \phi, \xi, \bar{\xi})$ будем называть *обобщенными переменными действие-угол*.

Предположим, что такие переменные построены в окрестности тора $\Lambda^k(I^0)$. Если в этих переменных гамильтониан H представляется в виде (ср. с (1.2))

$$H = H_N(\Delta J, \rho) + \tilde{H}_N(\Delta J, \xi, \bar{\xi}), \quad (3.4)$$

где функция $\tilde{H}_N = O(|\Delta J|^N + \rho^{N+1/2})$, $\rho = \xi\bar{\xi}/2$, $\xi \in \mathbb{C}^{n-k}$, то H_N называется *нормальной формой* гамильтониана порядка N .

Ясно, что лагранжевы торы $\Lambda^n(\Delta J, \rho)$ инвариантны относительно гамильтониана $H_N(\Delta J, \rho)$ и движение на них квазипериодично. По отношению к исходному гамильтониану H эти торы являются почти инвариантными в следующем смысле.

Рассмотрим гладкое по параметру ε в окрестности $\varepsilon = 0$ семейство изотропных торов $\Lambda^k(\varepsilon)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Изотропный тор $\Lambda^k(\varepsilon)$ называется почти инвариантным относительно гамильтониана $H(y)$ по $\text{mod } O(\varepsilon^{M+\delta})$ при $|\varepsilon| \rightarrow 0$ ($M \in \mathbb{N}$, $\delta > 0$) с квазипериодическим движением, если существует n -мерный вектор (частот) ω , вообще говоря, зависящий от ε , такой, что функция $Y_\varepsilon = Y(\varphi + \omega t, \varepsilon)$ удовлетворяет системе Гамильтона по $\text{mod } O(\varepsilon^M)$: $\dot{Y}_\varepsilon = JH_y(Y_\varepsilon) + O(|\varepsilon|^M)$ и $H(Y_\varepsilon) = H|_{\Lambda^k(0)} + O(|\varepsilon|^{M+\delta})$ при

$\varepsilon \rightarrow 0$, причем все оценки равномерны по $\varphi \in ([0, 2\pi])^k$ и $t \in \mathbb{R}$. В частном случае при $k = n$ получаем почти инвариантный лагранжев тор.

Как уже отмечалось, теория возмущений для гамильтониана H (методы нормализации) хорошо развита [1], [5], [6], [9], [14], [15], [17], [18], [20], [22], [23]. Обычно предполагается, что представление (3.4) имеет место для случая $N = 1$, и задача состоит в последовательном построении новых канонических переменных $I' = I^0 + \Delta I'$, ϕ , ξ' , $\bar{\xi}'$, в которых число N оказывается достаточно большим (по крайней мере, $N > 1$). Параметрами теории возмущений здесь являются обобщенные переменные действия $(\Delta I, \rho)$. В пределе при $\rho \rightarrow 0$, $\Delta I \rightarrow 0$ мы получаем изотропный тор $\Lambda^k(I^0)$ (с квазипериодическим движением), а приведение исходного гамильтониана H к виду (3.4) и есть приведение этого гамильтониана к нормальной форме порядка N в окрестности тора $\Lambda^k(I^0)$.

4. ЭВРИСТИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ

Построение обобщенных переменных действие–угол сводится к интегрированию системы уравнений типа (3.1) (системы (5.5), см. ниже). Решение этой весьма сложной системы в частных производных неединственно. Используемый нами метод нахождения подходящего явного решения, по существу, состоит в его *угадывании*, основанном на рассмотрении примеров 5, 6 и 9 (см. ниже). В частности, формулы из этих примеров и из работ [6], [29] дают “анзац” для перехода от переменных $y = (p, x)$ к переменным $I = I^0 + \Delta I$, ϕ , ξ , $\bar{\xi}$.

ПРИМЕР 9. Рассмотрим интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы на фазовой плоскости $\mathbb{R}_{p,x}^2$, для которой определены переменные действие–угол (I, φ) . Рассмотрим гладкое семейство замкнутых кривых $\Lambda^1(I) = (y = Y(\varphi, I) = {}^t(P(\varphi, I), X(\varphi, I)))$, где $Y(\varphi, I) - 2\pi$ -периодическая функция по φ . Зафиксируем значение I^0 параметра $I \in (I^0 - \delta, I^0 + \delta)$, $\delta > 0$, и обозначим $\Lambda^1(I^0) = (y = Y^0(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi])$, $Y^0(\varphi) = Y(\varphi, I^0)$. По формуле Тейлора

$$Y(\varphi, I) = Y^0(\varphi) + \Delta I \frac{\partial Y}{\partial I}(\varphi, I^0) + O((\Delta I)^2). \quad (4.1)$$

Забудем теперь на какое-то время, что гамильтониан $H(p, x)$ порождает обычные переменные действие–угол, и будем строить другие канонические переменные, близкие к (I, φ) в окрестности $\Lambda^1(I^0)$, которые будем обозначать через (J, φ) , и такие, что значение $J = 0$ задает кривую $\Lambda^1(I^0)$. Учитывая (4.1), будем искать замену координат от $y = (p, x)$ к этим новым координатам (J, φ) в виде

$$y = Y(\varphi, J) \equiv Y^0(\varphi) + Y^J(\varphi)g(\varphi, J), \quad (4.2)$$

считая, что гладкая скалярная функция

$$g(\varphi, J) = J + O(J^2), \quad J \rightarrow 0. \quad (4.3)$$

Вектор $Y^J(\varphi)$ должен играть роль вектора $Y_I^0(\varphi) = \partial Y / \partial I|_{I=I^0}$ и обладать его свойствами, т.е. он должен быть сопряжен вектору $\partial Y(I^0, \varphi) / \partial \varphi$ в смысле кососкалярного произведения (см. последнее из равенств (3.1a)). Конечно, если задано семейство окружностей, параметризованных настоящей переменной действия, то можно положить $Y^J(\varphi) = \partial Y / \partial I|_{I=I^0}$. Если же забыть о семействе кривых, которому принадлежит $\Lambda^1(I^0)$, то в качестве вектор-функции $Y^J(\varphi)$ можно выбрать

$$Y^J(\varphi) = \hat{J}Y_\varphi^0 M(\varphi), \quad Y_\varphi^0 = \frac{\partial Y^0}{\partial \varphi}(\varphi), \quad (4.4)$$

где $\hat{J}$ – стандартная симплектическая (2×2) -матрица, $M(\varphi)$ – пока неизвестная гладкая скалярная функция, $M(\varphi + 2\pi) = M(\varphi)$. Эту функцию и функцию $g(\varphi, J)$ мы найдем исходя из условий каноничности (3.1a), среди которых нетривиальным является лишь последнее. Делая подстановку (4.2) и полагая $J = 0$, получим

$$M(\varphi) = -({}^t Y_\varphi^0 Y_\varphi^0)^{-1}.$$

С учетом этого равенства третье из условий (3.1a) превращается в следующее уравнение на функцию $g(\varphi, J)$:

$$\frac{\partial g(\varphi, J)}{\partial J} (1 + g(\varphi, J) {}^t Y^J(\varphi) \hat{J} Y_\varphi^J(\varphi)) = 1.$$

Оно легко интегрируется, поскольку коэффициенты в этом уравнении *не зависят* от J . Выбирая постоянную интегрирования с учетом равенства (4.2), получаем, что функция $g(\varphi, J)$ определяется из *квадратного уравнения*

$$g(\varphi, J) + \frac{1}{2} {}^t Y^J(\varphi) \hat{J} Y_\varphi^J(\varphi) g^2(\varphi, J) = J. \quad (4.5)$$

Его корень фиксируем снова с помощью равенства (4.3). Нетрудно проверить, что производящая функция $S(x, J)$ канонического преобразования (4.2), (4.5) имеет вид

$$S(x, J) = \left[\frac{x - X^0(\varphi)}{X_\varphi^0(\varphi)} + \frac{1}{2} \frac{(x - X^0(\varphi))^2}{(X_\varphi^0(\varphi))^2} \right] \Big|_{\varphi=\varphi(x, J)}.$$

Она определена лишь *локально* (вне окрестностей точек поворота) там, где уравнение $X(\varphi, J) = x$ однозначно и гладко разрешимо относительно φ , в то время как формулы (4.2), (4.5) определяют *глобально* в полной окрестности $\Lambda^1(I^0)$ обобщенные (канонические) переменные действие–угол (J, φ) .

При фиксированном J формула (4.2), очевидно, определяет семейство замкнутых кривых $\Lambda^1(J)$. Относительно этого семейства переменные $I^0 + J$ являются обычными переменными действия: нетрудно проверить, что

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Lambda^1(J)} P dX = I^0 + J.$$

Ясно, что $\Lambda^1(J)$ – инвариантные кривые относительно гамильтоновой системы с гамильтонианом $H_1(J) = H(I^0) + \omega(I^0)J$.

Подставим теперь формулы (4.2), (4.5) в гамильтониан $H(y) = H(p, x)$ и разложим его в ряд Тейлора по J в окрестности точки $J = 0$. Тогда получим

$$H(y)|_{y=Y(\varphi, J)=Y^0(\varphi)+Y^J(\varphi)g(\varphi, J)} = E_0 + \omega(I^0)J + O(J^2) = H_1(J) + O(J^2),$$

где $\omega(I^0) = \frac{\partial H}{\partial I}(I^0)$ – частота движения по кривой $\Lambda^1(I^0)$, $E_0 = H|_{\Lambda^1(I^0)}$. Гамильтониан $H_1(J)$ – нормальная форма mod J^2 (первого порядка) исходного гамильтониана в обобщенных переменных действие–угол в окрестности изолированной инвариантной кривой $\Lambda^1(I^0)$. Подчеркнем, что эти переменные (J, φ) , вообще говоря, *не совпадают* с обычными (лиувиллевыми) переменными действие–угол (I, φ) : $J \neq \Delta I$, $\Delta I = I - I^0$. Замкнутые кривые $\Lambda^1(I^0 + J)$, задаваемые уравнением $J = \text{const} > 0$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, являются лишь почти инвариантными (с точностью до J^2 , $J \rightarrow 0$) относительно исходного гамильтониана.

Обобщение замены (4.2), (4.5) на случай k -мерных изотропных торов ($k > 1$) состоит в увеличении до k числа переменных $\Delta I = J$, добавлении в правой части (4.5) слагаемых типа (3.2), в которых матрицы V , $\bar{V}$ уже будут зависеть от углов ϕ , и включении теперь уже в k -мерный вектор g зависимости от $\xi, \bar{\xi}$. Это и приводит к анзацу (5.3) (см. ниже). Соответствующие формулы мы выпишем в следующем разделе, а сейчас укажем на следующее обстоятельство.

Для построения канонической замены переменных (4.2) необходимо фактически решить две задачи: построить функцию Y^J и найти функцию $g(\varphi, J)$. В общей ситуации при построении обобщенных переменных действие–угол в окрестности k -мерного тора $\Lambda^k(I^0)$ возможны три случая:

- 1) тор Λ^k принадлежит гладкому k -параметрическому семейству изотропных торов $\Lambda^k(I)$: $Y = Y(\varphi, I)$ по всем переменным действия, т.е. $I = (I_1, I_2, \dots, I_k)$; в этом случае соответствующую матрицу Y^J можно выбрать равной производной $\partial Y / \partial I|_{I=I^0} = Y_{I^0}^0$;
- 2) тор $\Lambda^k(I^0)$ является изолированным;
- 3) смешанная ситуация, когда мы имеем семейство торов $\Lambda^k(I)$ лишь по части переменных $I = (I_1, \dots, I_l)$, где $l < k$ и при $I = I^0$ тор $\Lambda^k(I^0)$ принадлежит этому семейству.

Ясно, что третья ситуация включает в себя первые два случая. Именно ее мы и будем в дальнейшем рассматривать в общей схеме построения обобщенных переменных действие–угол (см. раздел 5). В такой смешанной ситуации естественно считать, что матрица Y^J имеет блочную структуру вида $Y^J = (\partial Y / \partial I|_{I=I^0}, \tilde{Y}^J)$, где $\tilde{Y}^J$ – матрица размера $2n \times (k - l)$, которая и подлежит определению.

5. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНОГО ИЗОТРОПНОГО ТОРА

В этом разделе мы сформулируем основные результаты статьи.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1. Пусть в $2n$ -мерном фазовом пространстве $\mathbb{R}_y^{2n}$ с координатами $y = {}^t(p, x)$, $p = {}^t(p_1, \dots, p_n)$, $x = {}^t(x_1, \dots, x_n)$, задано гладкое l -пара-

метрическое семейство k -мерных ($l \leq k \leq n$) инвариантных изотропных торов

$$\Lambda^k(I) = \{y \in \mathbb{R}_y^{2n}, y = Y(\phi, I), \phi = (\varphi, \psi), \varphi = {}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_l) \in [0, 2\pi]^l, \\ \psi = {}^t(\psi_1, \dots, \psi_{k-l}) \in [0, 2\pi]^{k-l}, I = (I_1, \dots, I_l)\},$$

определенных с помощью вектор-функции $Y(\phi, I)$, обладающей свойствами, описанными в начале раздела 2.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 2. Дополнительно потребуем существования на торах $\Lambda^k(I)$ матриц $V(\phi, I)$, $\bar{V}(\phi, I)$, также описанных в начале раздела 2 и которые, вообще говоря, никак с динамическими системами не связаны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Предположение 2 эквивалентно условию существования симплектической связности с нулевой кривизной и устойчивой голономией в нормальном расслоении над тором Λ^k [36], [38]–[40]. В рамках теории комплексного роста Маслова оно впервые было введено в работах [28] (существование канонического базиса).

Изложим теперь алгоритм построения обобщенных переменных действие-угол в окрестности индивидуального тора $\Lambda_0^k = \{y = Y^0(\varphi, \psi) = Y(\varphi, \psi, I^0)\}$ из семейства $\Lambda^k(I)$. Конструируемые новые переменные в окрестности тора Λ_0^k обозначим через $(J_1, \dots, J_k)$ (переменные действия), $\phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_l, \psi_1, \dots, \psi_{k-l})$ (сопряженные им углы) и $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-k})$, $\bar{\xi} = (\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_{n-k})$ (комплексные переменные “гармонического осциллятора”, трансверсальные к тору Λ_0^k). Обозначим $\rho_j = \xi_j \bar{\xi}_j$. Переменные J , ρ , ξ , $\bar{\xi}$ должны обладать следующим свойством: равенства $J = \text{const}$, $\rho = \text{const}$ определяют n -мерный лагранжев тор и переменные действия на нем.

1. Введем действия $\tilde{I}^0 = (I_1^0, \dots, I_k^0)$ на торе Λ_0^k с помощью формулы (2.2), полагая $j = 1, \dots, k$. Так как мы предполагаем, что переменные действия $I = (I_1, \dots, I_l)$ сопряжены с углами $(\varphi_1, \dots, \varphi_l)$, то компоненты вектора I^0 должны совпадать с первыми l компонентами вектора $\tilde{I}^0$. Обозначим $\Delta J_j = J_j - I_j^0$. Переменные действия $J_1, \dots, J_l$, вообще говоря, будут отличаться от $I_1, \dots, I_l$. Переменные действия $J_1, \dots, J_l$ будут сопряжены с углами $\varphi = (\varphi_1 = \phi_1, \dots, \varphi_l = \phi_l)$, а $J_{l+1}, \dots, J_k$ – с углами $\psi = (\psi_1 = \phi_{l+1}, \dots, \psi_{k-l} = \phi_k)$.

2. Введем вещественную $(2n \times (k-l))$ -матрицу

$$\tilde{Y}^J = \tilde{Y}^J(\varphi, \psi) = \left[\left(E - \frac{1}{2} Y_\psi^0 M {}^t Y_\psi^0 \right) \left(\frac{i}{2} \bar{V}^0 {}^t V^0 - \frac{i}{2} V^0 {}^t \bar{V}^0 + \right. \right. \\ \left. \left. + Y_\varphi^0 {}^t Y_I|_{I=I^0} - Y_I|_{I=I^0} {}^t Y_\varphi^0 \right) + \hat{J} \right] Y_\psi^0 M \quad (5.1)$$

и $(2n \times k)$ -матрицу

$$Y^J = Y^J(\varphi, \psi) = (Y_I|_{I=I^0}, \tilde{Y}^J), \quad (5.2)$$

где $Y_I|_{I=I^0} = \partial Y / \partial I|_{I=I^0}$. Здесь Y_φ^0, Y_ψ^0 – вещественные $(2n \times l)$ - и $(2n \times (k-l))$ -матрицы на торе, составленные из вектор-столбцов $Y_{\varphi_j}^0(\varphi, \psi), Y_{\psi_j}^0(\varphi, \psi)$ – касательных векторов к Λ_0^k в точке (φ, ψ) ; $V^0 = V(\varphi, \psi, I^0)$, $((k-l) \times (k-l))$ -матрица $M = -({}^t Y_\psi^0 Y_\psi^0)^{-1}$.

ЛЕММА. Справедливы следующие равенства:

$${}^t Y^J \hat{J} Y^J = 0, \quad {}^t Y \phi \hat{J} Y^J = -E_{2n}.$$

Тем самым последние $k - l$ вектор-столбцов матрицы Y^J обладают теми же свойствами, что и производные $\partial Y / \partial I_j$, $j = 1, 2, \dots, l$, по переменным действия I_j на торах Λ^k .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО леммы проводится прямыми вычислениями (см. приложение).

3. Теперь введем новые координаты $(J, \phi, \xi, \bar{\xi})$ по формуле

$$y = y(J, \phi, \xi, \bar{\xi}) = Y^0(\varphi, \psi) + Y^J(\varphi, \psi)G(\varphi, \psi, J, \xi, \bar{\xi}) + V^0(\varphi, \psi)\xi + \bar{V}^0(\varphi, \psi)\bar{\xi}. \quad (5.3)$$

Здесь вещественный k -мерный вектор $G = (G_1, \dots, G_j, \dots, G_k)$ находится из системы квадратных уравнений

$$\begin{aligned} -G_j + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j}^J G \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^t V^0 \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \\ + \langle \xi, {}^t V^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\xi}, {}^t \bar{V}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle = -\Delta J_j, \quad j = 1, 2, \dots, k \end{aligned} \quad (5.4)$$

(фиксируем корень этой системы с помощью требования $G = \Delta J + O(\Delta J^2)$, $\Delta J \rightarrow 0$).

Обоснование приведенного выше алгоритма 1–3 дает следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. 1. В предположениях 1, 2 в некоторой окрестности $U = \{|\xi|^2 + |\bar{\xi}|^2 + |\Delta J|^2 \leq \delta\}$ тора Λ_0^k замена координат $y = y(J, \phi, \xi, \bar{\xi})$ является канонической, причем в этой окрестности вектор-функция G гладко зависит от углов ϕ_j и аналитична по ΔJ и $(\xi, \bar{\xi})$.

2. Если положить в формуле (5.3) $\xi_j = \sqrt{2\rho_j} e^{i\theta_j}$, $\bar{\xi}_j = \sqrt{2\rho_j} e^{-i\theta_j}$, $J_j, \rho_j = \text{const} > 0$, то (5.3) определяет лагранжесов тор $\Lambda^n(J, \rho)$, а (J, ρ, ϕ, θ) – переменные действие–угол на нем.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО первой части теоремы проводится проверкой условий каноничности преобразования прямым дифференцированием уравнений (5.3), (5.4) (детали см. в приложении):

$$\begin{aligned} \langle y_{\phi_m}, \hat{J} y_{\phi_{m'}} \rangle = 0, \quad \langle y_{J_m}, \hat{J} y_{\phi_{m'}} \rangle = -\delta_{mm'}, \\ \langle y_{\xi_j}, \hat{J} y_{\phi_m} \rangle = \langle y_{\bar{\xi}_j}, \hat{J} y_{\phi_m} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (5.5a)$$

$$\begin{aligned} \langle y_{J_{m'}}, \hat{J} y_{J_m} \rangle = 0, \quad \langle y_{\xi_j}, \hat{J} y_{J_m} \rangle = \langle y_{\bar{\xi}_j}, \hat{J} y_{J_m} \rangle = 0, \\ \langle y_{\xi_j}, \hat{J} y_{\xi_{j'}} \rangle = \langle y_{\bar{\xi}_j}, \hat{J} y_{\bar{\xi}_{j'}} \rangle = 0, \quad \langle y_{\xi_j}, \hat{J} y_{\bar{\xi}_{j'}} \rangle = -2i\delta_{jj'}, \\ j, j' = 1, \dots, n - k, \quad m, m' = 1, \dots, k. \end{aligned} \quad (5.5b)$$

Гладкость по углам и аналитичность по ΔJ и $(\xi, \bar{\xi})$ следуют из теоремы о неявной функции. Тот факт, что (5.3) определяет многообразие, диффеоморфное тору, очевиден. Его лагранжевость следует из п. 1. Действия на торе вычислены в приложении.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. При $k = 1$ система (5.4) решается явно. В некоторых примерах с $k > 1$ нелинейные по G члены отсутствуют, тогда вектор-функция G также может быть найдена явно. В любом случае систему (5.4) можно решать методом итераций.

Вернемся к исходной гамильтоновой системе. Мы отмечали, что замена переменных (5.3), (5.4) никак не связана с исходным гамильтонианом. Однако, если выполняется приведенное ниже предположение 3, то справедлива следующая теорема 2.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 3. *Движение на торе Λ_0^k условно-периодическое и система в вариациях приводима.*

ТЕОРЕМА 2. *При предположениях 1–3 в координатах $(J, \phi, \xi, \bar{\xi})$ гамильтониан H (в квадратичном приближении) имеет следующую нормальную форму:*

$$H = H|_{\Lambda_0^k} + \sum_{j=1}^k \langle \omega_j(I^0), \Delta J_j \rangle + \sum_{m=1}^{n-k} \beta_m \rho_m + O((\Delta J)^2, \|\xi\|^3), \quad \rho_m = \frac{\xi_m \bar{\xi}_m}{2}. \quad (5.6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО состоит в подстановке функции (5.3) в гамильтониан и применении формулы Тейлора с учетом свойств вектор-функции Y и матриц $V, \bar{V}$ (см. также [29]).

Вводя в окрестности U глобальные переменные $(J, \phi, \xi, \bar{\xi})$, можно использовать методы теории возмущений [1], [5], [6], [9], [11], [14], [15], [17]–[23] для построения нормальной формы H с большей точностью, т.е. для представления H в виде $\mathcal{H}_N(\Delta J, \rho) + O((\Delta J)^{N+1} + \|\xi\|^{2N+1})$. Подчеркнем, что в конкретных ситуациях реализация этих методов и даже построение уже первых поправок в (5.6) оказываются весьма непростыми вопросами, которых мы здесь не касаемся. Отметим только, что если в разложении гамильтониана по $\Delta J, \xi, \bar{\xi}$ отсутствуют произведения $\Delta J \xi, \Delta J \bar{\xi}$ и кубические степени $\xi, \bar{\xi}$, то вычисление поправки второй степени по $\Delta J, \rho$ в нормальной форме (при выполнении условий нерезонансности) состоит в выделении слагаемых, содержащих произведения вида $\Delta J_j \Delta J_m, \Delta J_j \xi_m \bar{\xi}_m, \xi_m \bar{\xi}_m \xi_j \bar{\xi}_j$, их интегрировании по углам ϕ_j от 0 до 2π и последующем суммировании.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Мы уже отмечали, что переменные $I_1, \dots, I_k$, вообще говоря, не совпадают с $J_1, \dots, J_k$, хотя при построении нормальных форм более высокого порядка различие между ними в смысле оценки $O((\Delta J)^{N+1} + \|\xi\|^{2N+1})$ уменьшается. К сожалению, нам не удалось построить такое каноническое преобразование, в котором $J_1 = I_1, \dots, J_l = I_l$. Препятствием здесь является появление производных по $I_1, \dots, I_l$ от матриц Y^J, V^0 и др. в (5.4) при проверке каноничности замены (5.3), (5.4). Это препятствие, по-видимому, связано с проблемой резонансов при построении инвариантных лагранжевых торов (см. по этому поводу также [37], [38]).

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Формулы (5.3), (5.4) носят локальный характер по отношению к переменным ϕ , они становятся глобальными в силу глобальности этих переменных на торе. Нетрудно проверить, что подисходными переменными u можно также понимать другие симплектические переменные в фазовом пространстве; часть из них, например, могут быть угловыми переменными. Их выбор диктуется, в частности, соображениями

упрощения системы (5.4), такими, например, как обращение в нуль нелинейного по G слагаемого.

6. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ОБОБЩЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ДЕЙСТВИЕ–УГОЛ В ОКРЕСТНОСТИ ИНВАРИАНТНЫХ ИЗОТРОПНЫХ ТОРОВ

Простейшим нетривиальным примером, иллюстрирующим приведенные выше формулы, является построение глобальных обобщенных переменных действие–угол в окрестности замкнутой фазовой кривой с точками поворота (фокальными точками). Именно наличие таких точек вызывает определенные трудности при построении глобальных обобщенных переменных действие–угол.

ПРИМЕР 10. Рассмотрим гамильтониан (2.6) из примера 1. Соответствующая гамильтонова система допускает однопараметрическое семейство замкнутых фазовых кривых с точками поворота на $\mathbb{R}_x^2$ $\Lambda^1(I) = {}^t(P, 0, X, 0)$. Здесь $P = P(\varphi, I)$, $X = X(\varphi, I)$ – 2π -периодические решения уравнений $\dot{p}_1 = -\mu x_1^3/\omega$, $\dot{x}_1 = p_1/\omega$ (здесь и далее точка означает дифференцирование по переменной φ), I – переменная действия на кривой,

$$I = \left(\frac{E}{E_0}\right)^{3/4} I^0, \quad I^0 = \int_{-a}^a \sqrt{E_0 - \mu x_1^4} dx_1,$$

$E_0 > 0$ – фиксированное значение классической энергии системы E , $a = (4E_0\mu^{-1})^{1/4}$. При

$$\mu \in \Omega_m = \left\{ \mu: \frac{1}{(m+1)(2m+1)} < \mu < \frac{1}{m(2m+1)} \right\}, \quad m \in \mathbb{Z}_+,$$

кривая $\Lambda^1(I)$ является устойчивой [33], а матрица $V(\varphi, \psi, I)$ есть вектор-столбец

$$V(\varphi, I) = {}^t(0, W, 0, Z), \quad W = \dot{Z}, \quad Z = e^{-i\beta\varphi/\omega} z,$$

где $z = z(\varphi, I)$ – решение Флоке с показателем $\beta \neq 0 \pmod{2\pi}$ одномерного уравнения Хилла $\omega^2 \ddot{z} + X^2(\varphi, I)z = 0$. Зафиксируем произвольную кривую $\Lambda^1(I^0) = (P_0 = P(\varphi, I^0), 0, X_0 = X(\varphi, I^0), 0)$, $I^0 > 0$, из семейства $\Lambda^1(I)$. Тогда в силу однородности потенциала будем иметь $X(\varphi, I) = (I/I^0)^{1/3} X_0$, $P(\varphi, I) = (I/I^0)^{2/3} P_0$ и, следовательно, $X_I|_{I=I^0} = X_0/(3I^0)$, $P_I|_{I=I^0} = 2P_0/(3I^0)$. Система (5.4) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{1}{9(I^0)^2} (X_0 P_{0\varphi} - P_0 X_{0\varphi}) G^2 - G + \frac{1}{2} (ZW_\varphi - W Z_\varphi) \xi^2 + \\ & + \frac{1}{2} (\overline{Z} \overline{W}_\varphi - \overline{W} \overline{Z}_\varphi) \bar{\xi}^2 + (Z \overline{W}_\varphi - W \overline{Z}_\varphi) \xi \bar{\xi} = -\Delta J. \end{aligned}$$

Таким образом, каноническая замена переменных (5.3), (5.4) $(p_1, p_2, x_2, x_2) \rightarrow (J, \varphi, \xi, \bar{\xi})$ в окрестности кривой $\Lambda^1(I^0)$ может быть записана в виде

$$p_1 = P_0 + \frac{2}{3I^0} P_0 G, \quad p_2 = W \xi + \overline{W} \bar{\xi}, \quad x_1 = X_0 + \frac{1}{3I^0} X_0 G, \quad x_2 = Z \xi + \overline{Z} \bar{\xi}.$$

При этом гамильтониан (2.6) в новых переменных имеет вид

$$H = \frac{\mu}{4} \left\{ \left(X_0 + \frac{1}{3I^0} X_0 G \right)^4 + (Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi})^4 \right\} + \\ + \frac{1}{2} \left\{ \left(P_0 + \frac{2}{3I^0} P_0 G \right)^2 + (Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi})^2 \right\} + \frac{1}{2} \left(X_0 + \frac{1}{3I^0} X_0 G \right)^2 (Z\xi + \bar{Z}\bar{\xi})^2,$$

а его нормальная форма в четвертом приближении есть

$$H = H|_{\Lambda_0^1} + C_1 \Delta J + C_2 \xi \bar{\xi} + C_3 \Delta J^2 + C_4 \xi^2 \bar{\xi}^2 + O(\Delta J^3, \|\xi\|^5),$$

где (см. [33])

$$C_1 = \frac{4}{3} D (I^0)^{1/3}, \quad C_3 = \frac{2}{9} D (I^0)^{-2/3}, \quad D = \left(\frac{3\pi}{4\sqrt{2}\mathcal{K}(1/\sqrt{2})} \right)^{4/3} \approx 0.87, \\ C_2 = 2\pi m + 2(-1)^m \arccos \left(\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \sqrt{1 + \frac{8}{\mu}} \right), \quad \mu \in \Omega_m, \quad m \in \mathbb{Z}_+, \\ C_4 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ (2|A|^2 + B^2) C_3 + \frac{3\mu}{2} |Z|^4 - \frac{2X_0^2}{3I^0} (Z^2 \bar{A} + 2|Z|^2 B + \bar{Z}^2 A) \right\} d\varphi,$$

здесь $\mathcal{K}(1/\sqrt{2})$ – полный эллиптический интеграл 1-го рода, $A = ZW_\varphi - WZ_\varphi$, $B = Z\bar{W}_\varphi - W\bar{Z}_\varphi$.

ПРИМЕР 11. Рассмотрим гамильтониан (2.7) трехмерного ангармонического осциллятора [35] в резонансном случае, т.е. когда $\omega_1/\omega_2 = m_1/m_2$, $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}^+$.

Очевидно, что у соответствующей гамильтоновой системы существует инвариантное подпространство $M = \{p_3 = x_3 = 0\}$, движение по которому задается гамильтонианом двумерного гармонического осциллятора

$$H_{\text{osc}}^2 = \frac{1}{2} (p_1^2 + \omega_1^2 x_1^2) + \frac{1}{2} (p_2^2 + \omega_2^2 x_2^2). \quad (6.1)$$

Его траекториями на плоскости (x_1, x_2) являются фигуры Лиссажу. В фазовом пространстве им соответствуют замкнутые траектории, из которых различным образом (в силу условия резонансности частот) можно “склеить” двумерные (изотропные) торы. Разумный способ “склейки” определяется в ходе построения нормальной формы полного трехмерного осциллятора. Это построение проводится в несколько этапов, причем каждому этапу соответствуют свои канонические переменные, которые мы будем снабжать верхним индексом (j) , где j – номер этапа.

1. Наиболее часто используемые переменные действие-угол $I_1^{(1)}, I_2^{(1)}, \varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}$ для гамильтониана (6.1) вводятся следующим образом:

$$p_1 = -\sqrt{2\omega_1 I_1^{(1)}} \sin \varphi_1^{(1)}, \quad p_2 = -\sqrt{2\omega_2 I_2^{(1)}} \sin \varphi_2^{(1)}, \\ x_1 = \sqrt{2 \frac{I_1^{(1)}}{\omega_1}} \sin \varphi_1^{(1)}, \quad x_2 = \sqrt{2 \frac{I_2^{(1)}}{\omega_2}} \sin \varphi_2^{(1)}.$$

2. Ввиду резонансности частот более удобными в этой задаче оказываются переменные действие–угол $I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}$ такие, что

$$\begin{aligned} I_1^{(1)} &= n_1 I_1^{(2)} + m_2 I_2^{(2)}, & I_2^{(1)} &= n_2 I_1^{(2)} - m_1 I_2^{(2)}, \\ \varphi_1^{(1)} &= m_1 \varphi_1^{(2)} + n_2 \varphi_2^{(2)}, & \varphi_2^{(1)} &= m_2 \varphi_1^{(2)} - n_1 \varphi_2^{(2)}, \end{aligned}$$

где $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 1$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}^+$. Выбор (n_1, n_2) не является единственным; фиксируем какой-нибудь. Каноническая замена переменных $(p, x) \rightarrow (I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, p_3, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, x_3)$ приводит гамильтониан H к виду

$$H = \omega_0 I_1^{(2)} + \frac{1}{2} \left(p_3^2 + (\Omega^{(2)}(I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)})^2 x_3^2) \right),$$

где $\Omega^{(2)}$ – функция $\Omega(x)$, вычисленная в координатах $I^{(2)}, \varphi^{(2)}$.

3. Пусть $F(I_1^{(2)}, I_2^{(2)}, \varphi_2^{(2)})$ – некоторая гладкая 2π -периодическая функция $\varphi_2^{(2)}$. Очевидно, она находится в инволюции с $H_{\text{osc}}^2 = \omega_0 I_1^{(2)}$. При фиксированном $I_1^{(2)}$ каждая связная компонента множества, задаваемого уравнением $F = \text{const}$, определяет на цилиндре $(I_2^{(2)} \in \mathbb{R}) \times (\varphi_2^{(2)} \in [0, 2\pi])$ либо семейство гладких замкнутых кривых (стягиваемых или нестягиваемых), либо семейство незамкнутых кривых, либо точки, либо особые (*сепаратрисные*) кривые. Ограничимся рассмотрением семейства замкнутых стягиваемых кривых и предположим, что на нем $dF \nparallel dH_{\text{osc}}^2$. Тогда согласно теореме Лиувилля они определяют в четырехмерном фазовом пространстве с координатами (p_1, p_2, x_1, x_2) двумерные (полномерные) лагранжевы торы. Поднимая эти торы в исходное шестимерное фазовое пространство, получаем семейство двумерных изотропных торов Λ^2 . Каждой указанной замкнутой кривой соответствуют переменная действия I_2 и сопряженный ей угол φ_2 , которые порождают вместе с переменными $I_1 = I_1^{(2)}$, $\varphi = \varphi_1^{(2)}$ переменные действие–угол на указанных лагранжевых торах и естественную параметризацию изотропных торов $\Lambda^2 = \Lambda^2(I_1, I_2)$. Ясно также, что они порождают каноническую замену $(p, x) \rightarrow (I_1, I_2, p_3, \varphi_1, \varphi_2, x_3)$ в некоторой окрестности торов Λ^2 в исходном фазовом пространстве.

До сих пор функция F никак не была связана с исходным гамильтонианом. Теперь выберем ее, имея в виду последующее построение нормальной формы. Замкнутые траектории гамильтониана (6.1) порождают вместе с исходным гамильтонианом систему в вариациях, нетривиальная часть которой соответствует переменным p_3, x_3 . После замены времени $t = \varphi_1/\omega_0$ эта часть системы в вариациях может быть записана в виде уравнения Хилла

$$Z''_{\varphi_1 \varphi_1} + \frac{\tilde{\Omega}^2(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)}{\omega_0^2} Z = 0, \quad (6.2)$$

где $\tilde{\Omega}$ – функция Ω , записанная в координатах $(I_1, I_2, \varphi_1, \varphi_2)$. Показатель Флоке β этого уравнения зависит от I_1, I_2, φ_2 и определяется с помощью равенства

$$\cos(2\pi\beta) = \frac{1}{2} \left(Z_1 + \omega_0 \frac{\partial Z_2}{\partial \varphi_1} \right) \Big|_{\varphi_1=2\pi},$$

где Z_1, Z_2 – решения уравнения (6.2) с начальными данными

$$Z_1|_{\varphi_1=0} = 1, \quad \frac{\partial Z_1}{\partial \varphi_1} \Big|_{\varphi_1=0} = 0, \quad Z_2|_{\varphi_1=0} = 0, \quad \frac{\partial Z_2}{\partial \varphi_1} \Big|_{\varphi_1=0} = 1.$$

Выберем теперь в качестве F функцию от показателя Флоке [35], [37], например $F = \cos(2\pi\beta)$. Предполагая, что определенная таким образом функция F обладает свойствами, описанными выше, получим семейство инвариантных двумерных изотропных торов $\Lambda^2(I_1, I_2)$ для исходного гамильтониана (2.7). Они (орбитально) устойчивы в линейном приближении, если $|F| \leq 1$, что мы и будем предполагать в дальнейшем. Обозначим через $Z_0(I, \varphi)$ решения Флоке, отвечающие показателям β и нормированные условием $W_0 \bar{Z}_0 - \bar{W}_0 Z_0 = 2i$, где $W_0 = \omega_0 \partial Z_0 / \partial \varphi_1$, и положим $W = e^{-i\beta/\omega_0} W_0$, $Z = e^{-i\beta/\omega_0} Z_0$. Очевидно, что W, Z удовлетворяют тому же нормировочному условию, что и W_0, Z_0 ; кроме того, отвечающий им показатель Флоке есть функция от I_1, I_2 (и не зависит от φ_2 по построению). Торы $\Lambda^2(I_1, I_2)$ тем самым порождают векторы $((6 \times 1)$ -матрицы) $V(I, \varphi) = {}^t(0, 0, Z, 0, 0, W)$ и $\bar{V}(I, \varphi)$, 2π -периодические по каждому углу φ_1, φ_2 .

4. Зафиксируем теперь некоторые значения (I_1^0, I_2^0) и построим в окрестности изотропного тора $\Lambda(I_1^0, I_2^0)$ обобщенные переменные действие–угол из теоремы 1. Заметим, что $l = 2$ и $\phi = \varphi$. Далее в переменных $(I_1, I_2, p_3, \varphi_1, \varphi_2, x_3)$ имеем

$$Y = {}^t(I_1^0, I_2^0, 0, \varphi_1, \varphi_2, 0), \quad {}^t Y^J = {}^t \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad V^0 = V(I^0, \varphi).$$

Поэтому в системе (5.4) второе, третье и четвертое слагаемые в левой части обращаются в нуль, и эта (теперь линейная) система решается явно,

$$\begin{aligned} G_i &= \Delta J_i + g_i, \\ g_i(J, \phi, \xi, \bar{\xi}) &= \frac{1}{2}(a_i \xi^2 + \bar{a}_i \bar{\xi}^2 + 2b_i \xi \bar{\xi}), \\ a_i &= ZW_{\varphi_i} - WZ_{\varphi_i}|_{I=I^0}, \quad b_i = Z\bar{W}_{\varphi_i} - W\bar{Z}_{\varphi_i}|_{I=I^0}, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой (5.3), получим в окрестности тора $\Lambda^2(I^0)$ каноническую замену переменных

$$\begin{aligned} I_1 &= J_1 + g_1(J, \phi, \xi, \bar{\xi}), \quad I_2 = J_2 + g_2(J, \phi, \xi, \bar{\xi}), \quad p_3 = W(I^0, \phi)\xi + \bar{W}(I^0, \phi)\bar{\xi}, \\ \phi_1 &= \varphi_1, \quad \phi_2 = \varphi_2, \quad x_3 = Z(I^0, \phi)\xi + \bar{Z}(I^0, \phi)\bar{\xi}. \end{aligned}$$

Подставляя эти переменные в исходный гамильтониан, записанный в переменных (I, p_3, φ, x_3) , проводя усреднение (с учетом сказанного перед замечанием 4), получим для исходного гамильтониана нормальную форму в четвертом приближении (по $|\xi|$),

$$H = \omega_0 J_1 + \left(\beta(I^0) + \frac{\partial \beta}{\partial I_1}(I^0) \Delta J_1 + \frac{\partial \beta}{\partial I_2}(I^0) \Delta J_2 \right) \rho + Q \rho^2 + O(|\Delta J|^3 + |\rho|^{5/2}).$$

Здесь $\rho = |\xi|^2/2$ и

$$Q = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{\Omega}^2}{\partial I_1} \Big|_{I=I_0} (a_1 \bar{Z}^2 + \bar{a}_1 Z^2 + 2b_1 |Z|^2) + \right. \\ \left. + \frac{\partial \tilde{\Omega}^2}{\partial I_2} \Big|_{I=I_0} (a_2 \bar{Z}^2 + \bar{a}_2 Z^2 + 2b_2 |Z|^2) \right) d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Численное построение двумерных торов и вычисление величин $\beta(I^0)$, $\partial\beta/\partial I_j(I^0)$, $j = 1, 2$, Q для конкретной функции Ω проведены в работе [42].

7. КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ СЕРИЙ, ПОРОЖДЕННЫХ ИЗОТРОПНЫМИ ТОРАМИ

Скажем несколько слов о применении полученных формул к вычислению квазиклассических спектральных серий собственных значений квантово-механических операторов.

Рассмотрим в качестве примера спектральную задачу для уравнения Шредингера с малым параметром $h \in (0, 1]$,

$$\hat{H}\Psi \equiv \left(-\frac{h^2}{2}\Delta + v(x) \right) \Psi = E\Psi, \quad \Psi \in L_2(\mathbb{R}_x^n).$$

Классический гамильтониан, соответствующий оператору $\hat{H}$, есть $H = p^2/2 + v(x)$. Предположим сначала, что соответствующая классическая гамильтонова система вполне интегрируема и допускает семейство n -мерных лиувиллевых торов $\Lambda^n(I, \rho)$, $I = (I_1, \dots, I_k)$, $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_{n-k})$, которые при $\rho \rightarrow 0$ переходят в семейство k -мерных (эллиптических) изотропных торов $\Lambda^k(I)$. Тогда в окрестности $\Lambda^k(I)$ гамильтониан представляется в виде $H = H(I_1, \dots, I_k, \rho_1, \dots, \rho_{n-k})$. Квантово-механический аналог задачи приведения классического гамильтониана к такому виду состоит в построении функции (символа) $\mathcal{H}(I, \rho, h)$, квантовых операторов действие–угол $\hat{I}_j, \hat{\phi}_j$ и операторов рождения и уничтожения $a_m^\pm$, образующих алгебру Гейзенберга,

$$[\hat{I}_j, \hat{I}_k] = 0, \quad [\hat{\phi}_j, \hat{\phi}_k] = 0, \quad [\hat{\phi}_j, \hat{I}_k] = i\hbar\delta_{jk}, \quad [a_j^-, a_k^+] = \delta_{jk}, \quad (7.1)$$

таких, что исходный квантовый гамильтониан с помощью этих операторов может быть записан в виде (см., например, [10])

$$\hat{H} = \mathcal{H}(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_k, a_1^+ a_1^-, \dots, a_{n-k}^+ a_{n-k}^-, h). \quad (7.2)$$

Тогда решение исходной спектральной задачи легко находится.

Разумеется, такое представление (и, тем более, его явное описание) в квантовой ситуации далеко не всегда возможно. С другой стороны, наличие малого параметра в задаче позволяет находить асимптотику спектра в квазиклассическом приближении. При этом, если иметь в виду задачу асимптотического описания лишь некоторых частей

спектра – *спектральных серий* (возможно “маломощных”), от требования интегрируемости можно отказаться.

Предположим, что соответствующая гамильтонова система допускает инвариантный изотропный k -мерный тор Λ^k и что соответствующая система в вариациях приводима. Тогда согласно предыдущему можно ввести обобщенные переменные действие–угол и представить гамильтониан в виде (5.6). Запишем теперь условия квантования Бора–Зоммерфельда (подробнее см. [13], [28]–[30], [36], [38])

$$I_j^0 + \Delta I_j^\nu = h \left(\nu_j + \frac{M_j}{4} \right), \quad j = 1, \dots, k, \quad \rho_l^\mu = h \left(\mu_l + \frac{1}{2} \right), \quad l = 1, \dots, n-k, \quad \nu_j, \mu_l \in \mathbb{Z}^+,$$

где M_j – индексы Маслова базисных циклов на торах $\Lambda^n(\Delta I, \rho)$. (Очевидно, что если $\Gamma_j(\Delta I, \rho)$ – циклы на Λ^n , непрерывно зависящие от $\Delta I, \rho$, то индексы Маслова M_j на них совпадают для всех допустимых $\Delta I, \rho$.) Тогда [29] числа

$$\tilde{E}_{\nu, \mu} = H^0|_{\Lambda^k} + \langle \omega, \Delta I^\nu \rangle + \langle \beta, \rho_l^\mu \rangle \quad (7.3)$$

оказываются асимптотическими собственными числами (образуют спектральную серию) оператора $\hat{H}$, если ν_j и μ_l выбраны таким образом, что $\mu_l = O(1)$, а $\Delta I_j^\nu = O(h^{3/2})$ при $h \rightarrow 0$. Иначе говоря, в $O(h^{3/2})$ -окрестности каждого значения $\tilde{E}_{\nu, \mu}$ всегда найдется точка $E_{\nu, \mu}$ из спектра оператора $\hat{H}$.

Формула (7.3) (при некоторых дополнительных условиях) удовлетворительно определяет структуру спектра только в случае несоизмеримых частот. Если это не так, то по крайней мере одна из частот $\omega_j(I^0)$ может быть выбрана равной нулю, что, как минимум, приводит к асимптотическому вырождению спектра. Предположим, что это вырождение снимается в некотором степенном по параметру h приближении. Вычисление соответствующего расщепления с помощью рядов Рэлея–Шредингера по собственным функциям в исходных переменных практически неосуществимо в реальных задачах. Это связано, в частности, с тем обстоятельством, что собственные функции в силу наличия каустик и особенностей, как правило, не могут быть заданы одной глобальной формулой в исходных координатах. Кроме того, разложение собственных функций, порожденных маломерными торами, проводится не по параметру h (как для собственных значений), а по параметру $\sqrt{h}$, что приводит к практически непреодолимым трудностям даже при вычислении поправок порядка $O(h^2)$ к собственным значениям.

Квантование в квазиклассическом приближении обобщенных переменных действие–угол в окрестности торов может быть проведено *глобально*, что дает возможность, по крайней мере в принципе, преодолеть указанные трудности. Хотя и в этих переменных реализация схемы нахождения расщепления собственных значений остается технически сложной. В реальных задачах, вероятно, эта схема может быть доведена до конкретных чисел только с помощью компьютера.

Приведем здесь лишь общие эвристические соображения, ограничившись для простоты описанием построения поправки порядка h^2 (ср. [10]). По существу, цель последующих рассуждений состоит в построении операторов $\hat{I}_j, \hat{\phi}_j, a_m^\pm$ и функции $H(I - I^0, \rho, h)$

таких, что равенство (7.2) на соответствующих функциях Ψ в подходящей норме заменится на равенство

$$\hat{H}\Psi = \mathcal{H}(\hat{I}_1, \dots, \hat{I}_k, a_1^+ a_1^-, \dots, a_{n-k}^+ a_{n-k}^-, h)\Psi + O(h^{5/2}).$$

Предположим, что мы построили обобщенные переменные действие–угол и получили явные формулы перехода к ним от исходных декартовых переменных, т.е. $y = Y(\Delta I, \varphi, \xi, \bar{\xi})$. Наивное квантование переменных $I, \varphi, \xi, \bar{\xi}$ вида

$$\varphi \rightarrow \hat{\varphi} = \varphi, \quad I \rightarrow \hat{I} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \xi \rightarrow \hat{\xi}, \quad \bar{\xi} \rightarrow \hat{\xi}^+$$

дает алгебру Гейзенберга операторов $\hat{I}, \hat{\varphi}, \hat{\xi}, \hat{\xi}^+$ (7.1) и с помощью операторных методов [10], [44] позволяет построить квантовые операторы $\hat{x}' = X(\hat{I}, \hat{\varphi}, \hat{\xi}, \hat{\xi}^+)$, $\hat{p}' = P(\hat{I}, \hat{\varphi}, \hat{\xi}, \hat{\xi}^+)$. Эти операторы, в отличие от исходных операторов $\hat{x}, \hat{p} = -i\hbar \partial/\partial x$, образуют алгебру Гейзенберга лишь с точностью $O(\hbar^2)$, т.е. имеет место деформация скобок Пуассона (или соответствующих коммутаторов). Поэтому следует подправить функции X, P , определяемые из приведенных выше формул, включив в них квантовые поправки $\hbar X^{(1)}(\Delta I, \varphi, \xi, \bar{\xi}), \hbar P^{(1)}(\Delta I, \varphi, \xi, \bar{\xi})$ из того соображения, чтобы “проквантованные” функции удовлетворяли коммутационным соотношениям с точностью $O(\hbar^3)$. Такая процедура, однако, приведет и к изменению полного символа оператора $\hat{H}$ (в переменных $\hat{I}, \hat{\varphi}, \hat{\xi}, \hat{\xi}^+$) на функцию порядка $O(\hbar^2)$. Поскольку сам гамильтониан не зависит от угловых переменных лишь с точностью до $(\Delta I)^2$ и $\rho^{3/2}$, то возникают две группы поправок:

- 1) классический дефект, связанный с недостаточной точностью построения нормальной формы;
- 2) квантовый дефект, порожденный деформацией скобок Пуассона (коммутаторов) при квантовании обобщенных переменных действие–угол.

Естественно классическую и квантовую поправки находить последовательно. Именно, первый шаг процедуры состоит в построении нормальной формы гамильтониана $\mathcal{H}(\Delta I, \rho)$ с точностью до $O((\Delta I)^3, \rho^{5/2})$, что можно сделать лишь при некоторых дополнительных условиях на частоты и свойства классического гамильтониана. Если такой шаг удастся реализовать, то далее, как уже говорилось, следует подправить соответствующее каноническое преобразование членами порядка $\hbar$, чтобы коммутационные соотношения выполнялись с точностью до $O(\hbar^3)$. После этого следует вычислить символ исходного оператора в новых переменных, что приводит к гамильтониану

$$\mathcal{H}(\Delta I, \rho) + \hbar^2 H_{\text{quant}}(\Delta I, \varphi, \xi, \bar{\xi}) + O((\Delta I)^3, \rho^{5/2}).$$

Теперь в гамильтониане появился новый малый параметр $\varepsilon = \hbar^2$, по которому можно применить КАМ-теорию при условии типа нерезонансности частот и исключить из H_{quant} угловые переменные, построив новые переменные $\tilde{\varphi}, \tilde{J}$. Последующее квантование по правилу Бора–Зоммерфельда даст возможность найти величину расщепления асимптотически вырожденного спектра в членах порядка $O(\hbar^2)$. Подчеркнем еще раз, что хотя изложенная схема снятия асимптотического вырождения требует весьма объемных аналитических и компьютерных вычислений, тем не менее она вполне реализуема в конкретных задачах.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство леммы (о восстановлении недостающих производных Y^J). В силу структуры матрицы Y^J для доказательства леммы достаточно проверить выполнение равенств

$${}^t Y_\psi^0 \hat{J} \tilde{Y}^J = E_{k-l}, \quad {}^t Y_\varphi^0 \hat{J} \tilde{Y}^J = 0, \quad {}^t \tilde{Y}^J \hat{J} \tilde{Y}^J = 0, \quad {}^t Y_I|_{I=I^0} \hat{J} \tilde{Y}^J = 0.$$

Запишем матрицу $\tilde{Y}^J$ в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Y}^J &= V^0 A_1 + \bar{V}^0 A_2 + \hat{J} Y_\psi^0 M + Y_\psi^0 A_3 + \\ &+ \left(E - \frac{1}{2} Y_\psi^0 M {}^t Y_\psi^0 \right) (Y_\varphi^0 {}^t Y_I|_{I=I^0} - Y_I|_{I=I^0} {}^t Y_\varphi^0) Y_\psi^0 M, \end{aligned}$$

где

$$A_1 = -\frac{i}{2} {}^t \bar{V}^0 Y_\psi^0 M, \quad A_2 = \frac{i}{2} {}^t V^0 Y_\psi^0 M, \quad A_3 = \frac{i}{4} {}^t A_4 {}^t Y_\psi^0 (V^0 {}^t \bar{V}^0 - \bar{V}^0 {}^t V^0) Y_\psi^0 M.$$

Тогда с учетом условий каноничности и свойств матриц $V^0, \bar{V}^0$ (см. раздел 2) имеем

$$\begin{aligned} {}^t Y_\psi^0 \hat{J} \tilde{Y}^J &= {}^t Y_\psi^0 \hat{J} \hat{J} Y_\psi^0 M = -{}^t Y_\psi^0 Y_\psi^0 (-({}^t Y_\psi^0 Y_\psi^0)^{-1}) = E_{k-l}, \\ {}^t Y_\varphi^0 \hat{J} \tilde{Y}^J &= {}^t Y_\varphi^0 \hat{J} \hat{J} Y_\psi^0 M + {}^t Y_\varphi^0 \hat{J} Y_I|_{I=I^0} {}^t Y_\varphi^0 Y_\psi^0 M = -{}^t Y_\varphi^0 Y_\psi^0 M + {}^t Y_\varphi^0 Y_\psi^0 M = 0, \\ {}^t Y_I|_{I=I^0} \hat{J} \tilde{Y}^J &= {}^t Y_I|_{I=I^0} \hat{J} \hat{J} \tilde{Y}^J M - {}^t Y_I|_{I=I^0} \hat{J} {}^t Y_\varphi^0 {}^t Y_I|_{I=I^0} Y_\psi^0 M = \\ &= -{}^t Y_I|_{I=I^0} \tilde{Y}^J M + {}^t Y_I|_{I=I^0} \tilde{Y}^J M = 0, \\ {}^t \tilde{Y}^J \hat{J} \tilde{Y}^J &= -2i {}^t A_1 A_2 - {}^t A_1 {}^t V^0 Y_\psi^0 M + 2i {}^t A_2 A_1 - {}^t A_2 {}^t \bar{V}^0 Y_\psi^0 M - {}^t A_3 {}^t Y_\psi^0 Y_\psi^0 M + \\ &+ M {}^t Y_\psi^0 \left(V^0 A_1 + \bar{V}^0 A_2 + Y_\psi^0 A_3 + \right. \\ &+ \left. \left(E - \frac{1}{2} Y_\psi^0 M {}^t Y_\psi^0 \right) (Y_\varphi^0 {}^t Y_I|_{I=I^0} - Y_I|_{I=I^0} {}^t Y_\varphi^0) Y_\psi^0 M \right) - \\ &- M {}^t Y_\psi^0 {}^t (Y_\varphi^0 {}^t Y_I|_{I=I^0} - Y_I|_{I=I^0} {}^t Y_\varphi^0) \left(E - \frac{1}{2} Y_\psi^0 M {}^t Y_\psi^0 \right) Y_\psi^0 M = \\ &= 2i ({}^t A_2 A_1 - {}^t A_1 A_2) - ({}^t A_1 {}^t V^0 + {}^t A_2 {}^t \bar{V}^0) Y_\psi^0 M + \\ &+ M {}^t Y_\psi^0 (V^0 A_1 + \bar{V}^0 A_2) + 2A_3. \end{aligned}$$

Далее, воспользовавшись тождествами

$$\begin{aligned} 2i ({}^t A_2 A_1 - {}^t A_1 A_2) &= 2A_3, \quad ({}^t A_1 {}^t V^0 + {}^t A_2 {}^t \bar{V}^0) Y_\psi^0 M = 2A_3, \\ M {}^t Y_\psi^0 (V^0 A_1 + \bar{V}^0 A_2) &= -2A_3, \end{aligned}$$

получим последнее из требуемых равенств ${}^t \tilde{Y}^J \hat{J} \tilde{Y}^J = 0$.

Доказательство утверждения 1 теоремы 1 (проверка условий каноничности). Покажем, что преобразование, задаваемое формулами (5.2)–(5.4), удовлетворяет условиям каноничности (5.5). Доказательство проведем прямым дифференцированием уравнения (5.3). А именно, имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} y_J &= Y^J G_J, & y_{\phi_j} &= Y_{\phi_j}^0 + Y_{\phi_j}^J G + Y^J G_{\phi_j} + V_{\phi_j}^0 \xi + \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi}, \\ y_{\xi_j} &= Y^J G_{\xi_j} + V_j^0, & y_{\bar{\xi}_j} &= Y^J G_{\bar{\xi}_j} + \bar{V}_j^0. \end{aligned}$$

Непосредственно из этих формул, а также из леммы следует выполнение канонических соотношений (5.5б). Для проверки оставшихся равенств необходимо продифференцировать уравнение (5.4). Имеем

$$G_{jJ_k} + \langle G_{jJ_k}, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G_{jJ_k}, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \langle G_{jJ_k}, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j}^J G \rangle = \delta_{jk}, \quad (\text{П.1})$$

$$\begin{aligned} G_{k\xi_j} + \langle G_{\xi_j}, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G_{\xi_j}, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_k}^0 e_j \rangle + \\ + \langle G_{\xi_j}, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_k}^J G \rangle + \langle e_j, {}^t V \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \langle e_j, {}^t V \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.2})$$

$$\begin{aligned} G_{j\varphi_k} + \frac{1}{2} \langle G_{\phi_k}, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j}^J G \rangle + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j}^J G_{\phi_k} \rangle + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y_{\phi_k}^J \hat{J} Y_{\phi_j}^J G \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j \phi_k}^J G \rangle + \langle G_{\phi_k}, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \\ + \langle G, {}^t Y_{\phi_k}^J \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_j \phi_k}^0 \xi \rangle + \langle G_{\phi_k}, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \\ + \langle G, {}^t Y_{\phi_k}^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^t V_{\phi_k}^0 \hat{J} V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^t V^0 \hat{J} V_{\phi_j \phi_k}^0 \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\xi}, {}^t \bar{V}_{\phi_k}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\xi}, {}^t \bar{V}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \\ + \langle \xi, {}^t V_{\phi_k}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle \xi, {}^t V \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (\text{П.3})$$

$$\begin{aligned} G_{k\phi_j} + \frac{1}{2} \langle G_{\phi_j}, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_k}^J G \rangle + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_k}^J G_{\phi_j} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y_{\phi_j}^J \hat{J} Y_{\phi_k}^J G \rangle + \frac{1}{2} \langle G, {}^t Y^J \hat{J} Y_{\phi_j \phi_k}^J G \rangle + \\ + \langle G_{\phi_j}, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \langle G, {}^t Y_{\phi_j}^J \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} V_{\phi_j \phi_k}^0 \xi \rangle + \\ + \langle G_{\phi_j}, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G, {}^t Y_{\phi_j}^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle G, {}^t Y^J \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^t V_{\phi_j}^0 \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle \xi, {}^t V^0 \hat{J} V_{\phi_j \phi_k}^0 \xi \rangle + \\ + \frac{1}{2} \langle \bar{\xi}, {}^t \bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \frac{1}{2} \langle \bar{\xi}, {}^t \bar{V}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \\ + \langle \xi, {}^t V_{\phi_j}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle \xi, {}^t V^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_j \phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Вычитая (П.3) из (П.4), получим

$$\begin{aligned}
 G_{k\phi_j} - G_{j\phi_k} + \langle G_{\phi_j}, {}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^J G \rangle - \langle G_{\phi_k}, {}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_j}^J G \rangle + \langle G, {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}Y_{\phi_k}^J G \rangle + \\
 + \langle G_{\phi_j}, {}^tY^J \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi \rangle - \langle G_{\phi_k}, {}^tY^J \hat{J}V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \langle G, {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi \rangle - \\
 - \langle G, {}^tY_{\phi_k}^J \hat{J}V_{\phi_j}^0 \xi \rangle + \langle G_{\phi_j}, {}^tY^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle - \langle G_{\phi_k}, {}^tY^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \\
 + \langle G, {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle - \langle G, {}^tY_{\phi_k}^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle \xi, {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi \rangle + \\
 + \langle \bar{\xi}, {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle + \langle \xi, {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} \rangle - \langle \xi, {}^tV_{\phi_k}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} \rangle = 0.
 \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Для равенств из (5.5а) имеем (см. (7.1), (П.2) и (П.5), соответственно)

$$\begin{aligned}
 {}^ty_{I_k} \hat{J}y_{\phi_j} &= {}^tG_{I_k} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_j}^0}_{E_j} + {}^tG_{I_k} {}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_j}^J G + {}^tG_{I_k} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y^J}_{0} G_{\phi_j} + \\
 &+ {}^tG_{I_k} {}^tY^J \hat{J}V_{\phi_j}^0 \xi + {}^tG_{I_k} {}^tY^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_j}^0 \bar{\xi} = \delta_{jk}, \\
 {}^ty_{\xi_j} \hat{J}y_{\phi_k} &= {}^tG_{\xi_j} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^0}_{E_k} + {}^tG_{\xi_j} {}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^tG_{\xi_j} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y^J}_{0} G_{\phi_k} + \\
 &+ {}^tG_{\xi_j} {}^tY^J \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + {}^tG_{\xi_j} {}^tY^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + \underbrace{{}^tV_j^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0}_{0} + \\
 &+ {}^tV_j^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + \underbrace{{}^tV_j^0 \hat{J}Y^J}_{0} G_{\phi_k} + {}^tV_j^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + {}^tV_j^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} = 0, \\
 {}^ty_{\phi_j} \hat{J}y_{\phi_k} &= \underbrace{{}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}Y_{\phi_k}^0}_{0} + {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + \underbrace{{}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}Y^J}_{-E_j} G_{\phi_k} + {}^tG {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0 + \\
 &+ {}^tG {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^tG {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}Y^J G_{\phi_k} + {}^tG_{\phi_j} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^0}_{E_k} + \\
 &+ {}^tG_{\phi_j} {}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^tG_{\phi_j} \underbrace{{}^tY^J \hat{J}Y^J}_{0} G_{\phi_k} + \\
 &+ {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + {}^tG {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + {}^tG_{\phi_j} {}^tY^J \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + \\
 &+ {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0 + {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}Y^J G_{\phi_k} + \\
 &+ {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + {}^tG {}^tY_{\phi_j}^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + {}^tG_{\phi_j} {}^tY^J \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + \\
 &+ {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0 + {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}Y^J G_{\phi_k} + \\
 &+ {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi = \\
 &= {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^J G + {}^tG {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0 + {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}V_{\phi_k}^0 \xi + \\
 &+ {}^t\xi {}^tV_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0 + {}^tY_{\phi_j}^0 \hat{J}\bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} + {}^t\bar{\xi} {}^t\bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J}Y_{\phi_k}^0.
 \end{aligned}$$

Для упрощения этого выражения рассмотрим тождества ${}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_k}^0 = e_k$ и ${}^tY^J \hat{J}Y_{\phi_j}^0 = e_j$ (здесь e_j, e_k — орты в $\mathbb{R}^{2n}$). Дифференцируя первое из тождеств по ϕ_j , а второе — по

ϕ_k и сравнивая полученные выражения, заключаем, что

$${}^t Y_{\phi_j}^0 \hat{J} Y_{\phi_k}^J G = - {}^t G {}^t Y_{\phi_j}^0 \hat{J} Y_{\phi_k}^0.$$

Аналогично, рассмотрев тождества ${}^t V^0 \hat{J} Y_{\phi_j}^0 = 0$ и ${}^t \bar{V}^0 \hat{J} Y_{\phi_j}^0 = 0$, получим

$${}^t Y_{\phi_j}^0 \hat{J} V_{\phi_k}^0 \xi = - {}^t \xi {}^t V_{\phi_j}^0 \hat{J} Y_{\phi_k}^0, \quad {}^t Y_{\phi_j}^0 \hat{J} \bar{V}_{\phi_k}^0 \bar{\xi} = - {}^t \bar{\xi} {}^t \bar{V}_{\phi_j}^0 \hat{J} Y_{\phi_k}^0.$$

Тогда на основании полученных равенств заключаем, что ${}^t y_{\phi_j} \hat{J} y_{\phi_k} = 0$. Таким образом, выполнение всех канонических соотношений (5.5) доказано.

Доказательство утверждения 2 теоремы 1 (о переменных действия).

Положим в (5.3) $\xi_j = \sqrt{2\rho_j} e^{i\theta_j}$, $\bar{\xi}_j = \sqrt{2\rho_j} e^{-i\theta_j}$. Покажем, что для переменных действия на лагранжевом торе $\Lambda^n(J, \rho)$, задаваемом формулой (5.3), справедливы равенства

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j \in \Lambda^n} \langle P, dX \rangle = I_j^0 + \Delta J_j, \quad \Gamma_j = (\phi_m = \text{const}, m \neq j, \phi_j \in [0, 2\pi]), \quad j = 1, \dots, k, \quad (\text{П.6})$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_l \in \Lambda^n} \langle P, dX \rangle = \rho_l, \quad \gamma_l = (\theta_m = \text{const}, m \neq l, \theta_l \in [0, 2\pi]), \quad l = 1, \dots, n-k. \quad (\text{П.7})$$

Для доказательства формулы (П.6) продифференцируем интеграл $\oint_{\Gamma_j \in \Lambda^n} \langle P, dX \rangle$ по $\partial J_{j'}$. Получим следующую цепочку равенств (аргументы функций для краткости опущены, предпоследнее равенство получаем в силу условий каноничности):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial J_{j'}} \oint_{\Gamma_j} \langle P, dX \rangle &= \oint_{\Gamma_j} \langle P_{J_{j'}}, dX \rangle + \oint_{\Gamma_j} \langle P, dX_{J_{j'}} \rangle = \\ &= \oint_{\Gamma_j} \langle P_{J_{j'}}, X_{\varphi_j} d\varphi \rangle - \oint_{\Gamma_j} \langle X_{J_{j'}}, P_{\varphi_j} d\varphi \rangle = \\ &= \oint_{\Gamma_j} \langle (P_{J_{j'}} {}^t X_{\varphi_j} - X_{\varphi_j} {}^t P_{J_{j'}}), d\varphi \rangle = \oint_{\Gamma_j} \delta_{jj'} d\varphi = 2\pi \delta_{jj'}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial J_{j'}} \oint_{\Gamma_j} \langle P, dX \rangle = \delta_{jj'}.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j} \langle P, dX \rangle = \delta_{jj'} \Delta J + \delta_{jj'} C.$$

Константу C определим, положив $\Delta J = 0$. В этом случае почти инвариантный тор $\Lambda^n(\Delta J, \rho)$ переходит в инвариантный тор $\Lambda^k(I^0)$, действие на котором имеет вид

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\Gamma_j \in \Lambda^k} \langle P, dX \rangle = I^0.$$

Таким образом, при $\Delta J = 0$ имеем $I^0 = \delta_{jj'} C$. Отсюда при $j = j'$ следует требуемое равенство (П.6).

Доказательство равенства (П.7) проводится аналогично дифференцированием формы $\oint_{\gamma_l} \langle P, dX \rangle$ по переменной $\xi_{j'}$.

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке INTAS (грант № 00-257). С. Ю. Доброхотов благодарит физический департамент TECHNION (Хайфа) и Й. Аврона за возможность провести исследования по обсуждаемой здесь проблеме во время пребывания в Израиле в октябре 2000 г. Авторы выражают искреннюю благодарность А. И. Нейштадту за полезное обсуждение и М. В. Карасеву, прочитавшему рукопись и сделавшему ряд ценных замечаний.

Список литературы

- [1] В. И. Арнольд. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974.
- [2] В. М. Бабич, В. С. Булдырев. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
- [3] M. V. Berry. Semiclassical mechanics of regular and irregular motion. In: Chaotic Behavior of Deterministic Systems. Les Houches, Session 36, 1981. Eds. G. Ioss, R. H. G. Helleman, R. Stora. Amsterdam: North-Holland, 1983. P. 171–271.
- [4] А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко. Введение в топологию интегрируемых гамильтоновых систем. М.: Наука, 1997.
- [5] H. W. Broer, G. B. Huitema, M. B. Sevryuk. Quasi-Periodic Motions in Families of Dynamical Systems. Lect. Notes in Math. V. 1645. Berlin: Springer, 1996.
- [6] А. Д. Брюно. Ограниченная задача трех тел. М.: Наука, 1990.
- [7] А. Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [8] M. Gutzwiller. Chaos in Classical and Quantum Mechanics. New York: Springer, 1990.
- [9] В. Ф. Журавлев, Д. М. Климов. Прикладные методы в теории колебаний. М.: Наука, 1988.
- [10] М. В. Карасев, В. П. Маслов. УМН. 1984. Т. 39. № 6. С. 115–173; Нелинейные скобки Пуассона. М.: Наука, 1991.
- [11] V. F. Lazutkin. KAM Theory and Semiclassical Approximations to Eigenfunctions. Ergebnisse der Mathem. und ihrer Grenz. 3. Folge. Bd. 24. Berlin: Springer, 1993.
- [12] В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965; В. П. Маслов, М. В. Федорюк. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976.
- [13] В. П. Маслов. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. М.: Наука, 1977.
- [14] М. Табор. Хаос и неинтегрируемость в нелинейной динамике. М.: Эдиториал УРСС, 2001.
- [15] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт. Математические аспекты классической и небесной механики. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 3. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1985.
- [16] В. В. Козлов. Симметрии, топологии и резонансы в гамильтоновой механике. Ижевск: Изд-во УГУ, 1995.
- [17] В. И. Арнольд. ДАН СССР. 1961. Т. 138. С. 13–15.
- [18] В. И. Арнольд. УМН. 1963. Т. 18. № 5. С. 13–40.
- [19] Е. Н. Динабург, Я. Г. Синай. Функц. анализ и его прилож. 1975. Т. 9. № 4. С. 8–21.
- [20] A. Jorba, C. Simó. SIAM J. Math. Anal. 1996. V. 27. P. 1704–1737; A. Jorba, J. Villanueva. Nonlinearity. 1997. V. 10. P. 783–822; A. Jorba, R. de la Llave, M. Zou. Linstedt series for lower dimensional tori. In: Hamiltonian Systems with Three or More Degrees of Freedom. NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C, Math. Phys. Sci. V. 533 (S'Agaro, Spain, June 1995). Ed. C. Simo. Dordrecht: Kluwer, 1999. P. 151–167.
- [21] С. Б. Куксин. Матем. заметки. 1989. Т. 45. № 5. С. 38–49.
- [22] Н. Н. Нехорошев. Тр. Моск. матем. об-ва. 1972. Т. 26. С. 181–198.
- [23] H. Rüssmann. Regul. Chaotic Dyn. 2001. V. 6. № 2. P. 119–204.
- [24] В. В. Соколов, А. В. Цыганов. ТМФ. 2002. Т. 131. № 1. С. 118–125.
- [25] В. И. Арнольд, А. Б. Гивенталь. Симплектическая геометрия. Ижевск: РХД, 2000.
- [26] J. E. Marsden, A. Weinstein. Rep. Math. Phys. 1974. V. 5. P. 121–130.

- [27] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. А. Максимов. Докл. РАН. 2001. Т. 381. № 4. С. 452–456.
- [28] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов. ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 5. С. 1037–1042; ТМФ. 1992. Т. 92. № 2. С. 215–254.
- [29] В. В. Белов, О. С. Доброхотов, С. Ю. Доброхотов. Матем. заметки. 2001. Т. 69. № 4. С. 483–514.
- [30] В. П. Маслов, О. Ю. Шведов. Метод комплексного роста в квантовой теории поля. М.: УРСС, 1998.
- [31] J. Avron, B. Simon. Phys. Rev. Lett. 1981. V. 46. № 17. P. 1166–1168.
- [32] В. В. Белов, С. Ю. Доброхотов, В. М. Оливе. Докл. РАН. 1993. Т. 331. № 2. С. 150–154.
- [33] В. В. Белов, В. А. Максимов. Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 2. С. 297–301; V. V. Belov, V. A. Maksimov. Russ. J. Math. Phys. 2000. V. 7. № 3. P. 363–370.
- [34] V. V. Belov, J. L. Volkova. Russ. J. Math. Phys. 1993. V. 1. № 4. P. 409–427; V. V. Belov, V. M. Olivè, J. L. Volkova. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 5799–5810; P. 5811–5829.
- [35] S. Yu. Dobrokhoto, V. Martínez-Olivé, A. I. Shafarevich. Russ. J. Math. Phys. 1995. V. 3. № 1. P. 133–138; С. Ю. Доброхотов, В. М. Оливе. Тр. Моск. матем. об-ва. 1997. Т. 58. С. 3–87; S. Yu. Dobrokhoto, A. I. Shafarevich. Russ. J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 2. P. 267–272.
- [36] С. Ю. Доброхотов, А. И. Шафаревич. Квазиклассическое квантование инвариантных изотропных многообразий гамильтоновых систем. В сб.: Топологические методы в теории гамильтоновых систем. Ред. А. В. Болсинов, А. Т. Фоменко, А. И. Шафаревич. М.: Факториал, 1998. С. 41–114.
- [37] M. Karasev. To the Maslov theory of quasi-classical asymptotics. Examples of new global quantization formula application. Preprint ITP-89-78E. Kiev: Inst. Theor. Phys., 1989.
- [38] M. Karasev, Yu. Vorobjev. Adapted connections, Hamilton dynamics, geometric phases, and quantization over isotropic submanifolds. In: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry. Advances in Math. Sci., Transl. 2. V. 187. Ed. M. Karasev. Providence, RI: AMS, 1998. P. 203–326.
- [39] M. Karasev, Yu. Vorobjev. Linear connections for Hamilton dynamics over isotropic submanifolds. In: Progress in Nonlinear Diff. Equations and their Appl. Seminar on Dynamical Systems (St. Petersburg, Oct. 14–25 and Nov. 18–29, 1991). V. 12. Eds. S. Kukulin, V. Lazutkin, J. Poschel. Basel: Birkhauser, 1994. P. 235–252.
- [40] M. Karasev, Yu. Vorobjev. Adv. Math. 1998. Т. 135. № 2. С. 220–286.
- [41] А. Д. Крашнов. Построение асимптотики собственных чисел оператора Лапласа, отвечающих невырожденному инвариантному тору геодезического потока. В сб.: Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Вып. 1. Горький: Изд-во ГГУ, 1973. С. 66–74.
- [42] M. A. Poteryakhin. The spectral series of 3-D quantum anharmonic oscillator. In: Proc. Days of Diffraction. 2000. S. Petersburg: S. Petersburg Univ., 2000. P. 127–133.
- [43] O. Bohigas, S. Tomsovic, D. Ullmo. Phys. Rep. 1993. V. 223. № 2. P. 43–133.
- [44] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.