Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. П. Чубурин, Об уровнях двухчастичного оператора Шредингера, отвечающего кристаллической пленке, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 2, 229–239

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1960>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 06:04:35

© 2006 г.

Ю. П. Чубурин*

ОБ УРОВНЯХ ДВУХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА, ОТВЕЧАЮЩЕГО КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛЕНКЕ

Для рассматриваемого в ячейке двухчастичного оператора Шредингера с потенциалом, периодическим по четырем переменным, доказано существование уровней (собственных значений или резонансов) вблизи особых точек невозмущенной функции Грина. Получена асимптотическая формула для уровней. Доказана теорема существования и единственности решения соответствующего уравнения Липпмана–Швингера.

Ключевые слова: двухчастичный оператор Шредингера, уравнение Липпмана–Швингера, резонанс, собственное значение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Для $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$ будем пользоваться обозначениями вида $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $x'' = (x_5, x_6)$. Положим $\Omega = [0, 1]^4 \times \mathbb{R}^2$, $\Omega^* = [-\pi, \pi]^4$ – ячейки в прямой и обратной решетках для “удвоенной” пленки. В статье рассматривается оператор Шредингера $H(\mathbf{k}') = H_0(\mathbf{k}') + V(x)$, где $H_0(\mathbf{k}') = -\Delta$, действующий в пространстве $L^2(\Omega)$ и определенный на блоховских по отношению к компонентам вектора x' функциях, здесь $\mathbf{k}' = (k_1, k_2, k_3, k_4) \in \Omega^*$ – квазиимпульс. Блоховскими функциями по отношению к компонентам вектора x' будем называть сужения на Ω функций ψ , определенных на $\mathbb{R}^6$ и удовлетворяющих соотношениям

$$\psi(x + (\mathbf{n}', 0, 0)) = e^{i(\mathbf{k}', \mathbf{n}')} \psi(x), \quad \mathbf{n}' = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{Z}^4.$$

Предполагается, что V – вещественный ненулевой потенциал, удовлетворяющий условию

$$|V(x)| \leq C e^{-a|x''|}, \quad a > 0. \quad (1)$$

*Физико-технический институт УрО РАН, Ижевск, Россия.
E-mail: chuburin@otf.pti.udm.ru

Операторы $H(\mathbf{k}')$ возникают при рассмотрении многочастичного гамильтониана для кристаллической пленки в результате, во-первых, обычной процедуры замены исходного оператора семейством операторов в ячейке, зависящих от квазиимпульса (см. [1]), и, во-вторых, применения к многочастичному гамильтониану в ячейке методики эффективного “оптического” потенциала [2], в результате чего появляется двухчастичный оптический гамильтониан для двух квазиэлектронов.

Через $R_0(\mathbf{k}', E)$ и $R(\mathbf{k}', E)$ будут обозначаться резольвенты операторов $H_0(\mathbf{k}')$ и $H(\mathbf{k}')$, соответственно, а через $G_0(x, y, \mathbf{k}', E)$ и $G(x, y, \mathbf{k}', E)$ – ядра этих резольвент (функции Грина). Через $\sigma(A)$ ($\sigma_{\text{ess}}(A)$) обозначается спектр (существенный спектр) оператора A .

В статье доказано, что возмущение V относительно компактно, так что $\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{k}')) = \sigma(H(\mathbf{k}')) = [(\mathbf{k}')^2, \infty)$. Установлена теорема существования и единственности решения уравнения Липпмана–Швингера. Показано, что при замене V на ϵV для достаточно малых ϵ вблизи точек $E = (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$, $\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4$, существуют уровни (собственные значения или резонансы). Получена приближенная формула для уровней в случае малых ϵ .

Для одночастичного гамильтониана поведение уровней изучено в работе [3], и оно существенно другое, чем в рассматриваемом двухчастичном случае. Исследование резонансов двухчастичного оператора Шредингера с кулоновским взаимодействием (для атома гелия) с помощью комплексного скейлинга проведено в книге [1] (см. гл. XII). В отличие от изучаемого в данной статье случая рассмотренный потенциал в книге [1] не является относительно компактным возмущением оператора $-\Delta$. Метод скейлинга и нестационарный подход в теории резонансов для многочастичного уравнения Шредингера изложены, например, в обзоре [4].

2. ФУНКЦИИ ГРИНА И УРАВНЕНИЕ ЛИППМАНА–ШВИНГЕРА

Для преобразования Фурье введем обозначение

$$\hat{\psi}(p'') = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-i(p'', x'')} \psi(x'') dx'', \quad \psi \in L^2(\mathbb{R}^2).$$

Пусть $\psi \in L^2(\Omega)$ – блоховская по отношению к компонентам вектора x' функция, тогда

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x')} \psi_{\mathbf{n}'}(x'') = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x')} \int_{\mathbb{R}^2} e^{i(x'', p'')} \hat{\psi}_{\mathbf{n}'}(p'') dp'', \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\psi_{\mathbf{n}'}(x'') = \int_{[0,1]^4} e^{-i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x')} \psi(x', x'') dx'. \quad (3)$$

Обозначим через

$$G_0(x'' - y'', E) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\sqrt{E}|x'' - y''|) \quad (4)$$

ядро резольвенты оператора $-\Delta_{x''}$ в $L^2(\mathbb{R}^2)$ (в правой части равенства – функция Ханкеля). Легко видеть, что $\sigma(H_0(\mathbf{k}')) = [(\mathbf{k}')^2, \infty)$, а для $E \in \mathbb{C} \setminus [(\mathbf{k}')^2, \infty)$ в силу соотношений (2), (3) имеют место формулы для резольвенты оператора $H_0(\mathbf{k}')$:

$$\begin{aligned} R_0(\mathbf{k}', E)\psi(x) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x')} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(x'', p'')} \hat{\psi}_{\mathbf{n}'}(p'') dp''}{(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 + p''^2 - E} = \\ &= \int_{\Omega} G_0(x, y, \mathbf{k}', E)\psi(y) dy, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$G_0(x, y, \mathbf{k}', E) = \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x' - y')} G_0(x'' - y'', E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2). \quad (6)$$

Обозначим через $R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E)$, где $M \geq 0$, оператор с ядром

$$G_0^{(M)}(x, y, \mathbf{k}', E) = \sum_{\{\mathbf{n}' : (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 > M\}} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}', x' - y')} G_0(x'' - y'', E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2).$$

ЛЕММА. Пусть $M > \operatorname{Re} E > (\mathbf{k}')^2$. Тогда

$$\|R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E)\| \leq \frac{1}{((M - \operatorname{Re} E)^2 + (\operatorname{Im} E)^2)^{1/2}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Оценим для $\psi \in L^2(\Omega)$, пользуясь формулой (2), соотношениями, подобными (5), (6), а также равенствами Парсеваля и Планшереля:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} |R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E)\psi(x)|^2 dx = \\ &= \sum_{\{\mathbf{n}' : (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 > M\}} \int_{\mathbb{R}^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{e^{i(x'', p'')} \hat{\psi}_{\mathbf{n}'}(p'') dp''}{(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 + p''^2 - E} \right|^2 dx'' = \\ &= \sum_{\{\mathbf{n}' : (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 > M\}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\hat{\psi}_{\mathbf{n}'}(p'')|^2 dp''}{|(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 + p''^2 - E|^2} \leq \\ &\leq \frac{1}{(M - \operatorname{Re} E)^2 + (\operatorname{Im} E)^2} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}_{\mathbf{n}'}(p'')|^2 dp'' = \\ &= \frac{1}{(M - \operatorname{Re} E)^2 + (\operatorname{Im} E)^2} \sum_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} \int_{\mathbb{R}^2} |\psi_{\mathbf{n}'}(x'')|^2 dx'' = \\ &= \frac{\|\psi\|^2}{(M - \operatorname{Re} E)^2 + (\operatorname{Im} E)^2}. \end{aligned} \quad (7)$$

Лемма доказана.

Следуя [5], введем обозначение (применительно только к $V(x)$) $\sqrt{V(x)} = \sqrt{|V(x)|} \operatorname{sign} V(x)$. В следующей теореме рассматривается аналитическое продолжение операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V}$, порожденное аналитическим продолжением функции Грина (6).

ТЕОРЕМА 1. *Оператор $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V}$ компактен и аналитически зависит от $\mathbf{k}'$, E в некоторых комплексных окрестностях точек $(\mathbf{k}', E) \in \mathbb{R}^5 \subset \mathbb{C}^5$ таких, что $E \neq (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формулы (4), асимптотических формул для функций Ханкеля [6] и условия (1) для $|\operatorname{Im} \sqrt{E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2}| < a/2$ имеем

$$\begin{aligned} & \|\sqrt{|V(x)|}G_0(x'' - y'', E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2)\sqrt{V(y)}\|_{L^2(\Omega \times \Omega)}^2 \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^2} dx'' e^{-a|x''|} \int_{\{y'' : |x'' - y''| \leq 1\}} (C_1 |\ln |x'' - y''|| + C_2)^2 e^{-a|y''|} dy'' + \\ & + C_3 \int_{\mathbb{R}^2} dx'' e^{-a|x''|} \int_{\{y'' : |x'' - y''| \geq 1\}} \exp(2|\operatorname{Im} \sqrt{E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2}| \cdot |x'' - y''|) \times \\ & \times e^{-a|y''|} dy'' \leq C < \infty. \end{aligned} \quad (8)$$

Отсюда вытекает, что оператор $\sqrt{|V|}(R_0 - R_0^{(M)})\sqrt{V}$ есть оператор Гильберта–Шмидта. Данный оператор аналитически зависит от E , $\mathbf{k}'$ – это следует из существования производных у ядра как у $L^2(\Omega \times \Omega)$ -значной функции. Последнее, в свою очередь, вытекает из существования производной $dH_0^{(1)}(z)/dz$, асимптотического поведения функции $H_{-1}^{(1)}(z)$ (см. книгу [6]) и оценок, подобных (8). Наконец, в силу леммы

$$\begin{aligned} \sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V} &= \sqrt{|V|}(R_0(\mathbf{k}', E) - R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E))\sqrt{V} + \sqrt{|V|}R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E)\sqrt{V} = \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \sqrt{|V|}(R_0(\mathbf{k}', E) - R_0^{(M)}(\mathbf{k}', E))\sqrt{V}, \end{aligned}$$

поэтому оператор $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V}$ компактен как предел компактных операторов. Очевидно, что оценка леммы локально равномерна по E , $\mathbf{k}'$. Поэтому аналитическая зависимость предельного оператора от этих параметров вытекает из векторнозначного варианта теоремы Вейерштрасса об аналитичности предела аналитических функций. Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Потенциал V является относительно компактным возмущением оператора $H_0(\mathbf{k}')$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E < (\mathbf{k}')^2$, тогда для любого $\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4$

$$|\exp(i\sqrt{E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2}|x'' - y''|)| \leq e^{-\sigma|x'' - y''|},$$

где $\sigma > 0$, и выкладка, подобная (8), показывает, что

$$V(x)G_0(x'' - y'', E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2) \in L^2(\Omega \times \Omega), \quad \mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4.$$

Отсюда, как и в доказательстве теоремы, получаем, что оператор $VR_0(\mathbf{k}', E)$ компактен.

СЛЕДСТВИЕ 2 [1]. *Справедливы соотношения*

$$\sigma_{\text{ess}}(H(\mathbf{k}')) = \sigma(H_0(\mathbf{k}')) = [(\mathbf{k}')^2, \infty).$$

ТЕОРЕМА 2. *Для всех*

$$E \in ((\mathbf{k}')^2, \infty) \setminus \bigcup_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} \{(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2\},$$

за исключением, возможно, не более чем счетного множества, предельными точками которого могут быть только точки $(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$, $\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4$, уравнение Липпмана–Швингера

$$\psi(x) = \psi_0(x) - \int_{\Omega} G_0(x, y, \mathbf{k}', E + i0) V(y) \psi(y) dy \quad (9)$$

имеет единственное решение в классе функций ψ таких, что $\sqrt{V}\psi \in L^2(\Omega)$, для любой функции ψ_0 из этого же класса.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что если

$$(a, b) \subset ((\mathbf{k}')^2, \infty) \setminus \bigcup_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} \{(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2\},$$

причем $a, b \notin \bigcup_{\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4} \{(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2\}$, то для всех $E \in (a, b)$ за исключением, возможно, не более чем счетного множества, предельными точками которого могут быть только a, b , уравнение (9) имеет единственное решение в указанном классе. Полагая $\phi = \sqrt{|V|}\psi$, $\phi_0 = \sqrt{|V|}\psi_0$, перейдем к модифицированному уравнению Липпмана–Швингера [5]

$$\phi(x) = \phi_0(x) - \int_{\Omega} \sqrt{|V|(x)} G_0(x, y, \mathbf{k}', E + i0) \sqrt{V(y)} \phi(y) dy, \quad (10)$$

которое рассматриваем в классе $L^2(\Omega)$. В силу теоремы 1 и аналитической теоремы Фредгольма [7] достаточно доказать, что хотя бы в одной точке области вида $D_{\epsilon} = (a, b) \times (-\epsilon, \infty) \subset \mathbb{C}$ для некоторого $\epsilon > 0$ уравнение (10) однозначно разрешимо. (Аналитичность операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V}$ в D_{ϵ} для достаточно малых ϵ следует из соображений компактности.) Но это вытекает из неравенства

$$\|\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', E)\sqrt{V}\| \leq \frac{C}{|\operatorname{Im} E|} < 1$$

для достаточно больших $\operatorname{Im} E$. Теорема доказана.

3. ИССЛЕДОВАНИЕ УРОВНЕЙ

В данном разделе рассматриваем потенциалы вида $\epsilon V(x)$ с $\epsilon > 0$ такие, что $V(x) = 0$, если $|x''| \geq A$ для некоторого A .

Пусть $\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4$, а E находится в достаточно малой окрестности точки $E_0 = (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$. Далее предполагаем, что если $(\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{m}')^2 = (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$, то $\mathbf{m}' = \mathbf{n}'$. Для этого, очевидно, достаточно, чтобы компоненты вектора $(\mathbf{k}', \pi)$ были линейно независимы над полем $\mathbb{Q}$. Введем новую переменную $k = \sqrt{E - (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2}$ вместо E . Функция $G_0(x, y, \mathbf{k}', E) = G_0(x, y, \mathbf{k}', k)$ в силу соотношения (4) имеет логарифмическую точку ветвления по переменной k в нуле. Соответствующую риманову поверхность обозначим через $\mathcal{D}$, а ее листы будем нумеровать целым n из равенства $\text{Ln } k = \ln |k| + i(\arg k + 2\pi n)$. Ясно, что операторнозначные функции $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', k)\sqrt{V}$ и $\sqrt{|V|}R(\mathbf{k}', k)\sqrt{V}$ также определены на $\mathcal{D}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем уровнем (т.е. собственным значением или резонансом) оператора $H(\mathbf{k}')$ полюс $k \neq 0$ по переменной $k \in \mathcal{D}$ операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R(\mathbf{k}', k)\sqrt{V}$, не совпадающий с полюсом операторнозначной функции $\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', k)\sqrt{V}$, а также соответствующее $E = (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2 + k^2$.

В силу резольвентного тождества

$$1 - \epsilon\sqrt{|V|}R(\mathbf{k}', k)\sqrt{V} = (1 + \epsilon\sqrt{|V|}R_0(\mathbf{k}', k)\sqrt{V})^{-1}$$

и аналитической теоремы Фредгольма наличие уровня означает существование ненулевого решения однородного уравнения

$$\phi(x) = -\epsilon \int_{\Omega} \sqrt{|V(x)|} G_0(x, y, \mathbf{k}', E + i0) \sqrt{V(y)} \phi(y) dy \quad (11)$$

в классе $L^2(\Omega)$.

Обозначим через π естественную проекцию $\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$, а через π_n – сужение π на n -й лист.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $v = \int_{\Omega} V(x) dx < 0$ и $\mathbf{n}' \in \mathbb{Z}^4$ произвольно. Тогда в некоторой достаточно малой комплексной окрестности U точки $E_0 = (\mathbf{k}' + 2\pi\mathbf{n}')^2$ для некоторого целого $n_0 \geq 0$ и всех достаточно малых ϵ существует хотя бы один уровень $E \in \bigcup_{n=-n_0}^{n_0} \pi_n^{-1}(U)$ оператора $H(\mathbf{k}')$. При этом для него справедлива формула

$$E = E_0 + \exp\left(\frac{4\pi + O(\epsilon)}{\epsilon v}\right). \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно книге [6] (функцию Ханкеля рассматриваем на римановом многообразии $\mathcal{D}$)

$$\begin{aligned} H_0^{(1)}(z) &= J_0(z) + \frac{2i}{\pi} \left(J_0(z) \text{Ln} \left(\frac{z}{2} \right) + \gamma \right) + O(z^2) = \\ &= 1 + \frac{2i}{\pi} (\gamma - \ln 2) + \frac{2i}{\pi} \text{Ln } z + \alpha(z) \text{Ln } z + \beta(z), \end{aligned}$$

где γ – постоянная Эйлера, $\alpha(z)$ и $\beta(z)$ – аналитические функции, представляющие собой $O(z^2)$. Для n -го листа имеем

$$\begin{aligned} G_0(x'' - y'', k^2) &= \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x'' - y''|) = -c_1 - \frac{\text{Ln } k}{2\pi} - \frac{\ln|x'' - y''|}{2\pi} + \\ &+ i \left(\frac{\alpha(k|x'' - y''|)}{4} \right) (\ln(|k||x'' - y''|) + i(\arg k + 2\pi n)) + \\ &+ \frac{i\beta(k|x'' - y''|)}{4}, \end{aligned} \quad (13)$$

где $c_1 = -(i/4)(1 + (2i/\pi)(\gamma - \ln 2))$.

Согласно соотношению (6) можно представить функцию Грина оператора $H_0(\mathbf{k}')$ в виде

$$G_0(x, y, \mathbf{k}', k) = e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x' - y')} G_0(x'' - y'', k^2) + G_1(x, y, \mathbf{k}', k), \quad (14)$$

где $G_1(x, y, \mathbf{k}', k)$ – (однозначная) аналитическая функция от переменной k в окрестности нуля в силу наложенного в начале раздела условия на $\mathbf{k}'$, $\mathbf{n}'$. Пользуясь формулами (13), (14) и финитностью по x'' функции V (последнее дает возможность воспользоваться асимптотикой функции Ханкеля для малых значений аргумента), перепишем уравнение (11), определяющее уровни, для достаточно малых k в виде

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \epsilon \left(c_1 + \frac{\text{Ln } k}{2\pi} \right) e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{|V(x)|} \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', y')} \sqrt{V(y)} \phi(y) dy + \\ &+ \epsilon(A(k)\phi)(x), \end{aligned} \quad (15)$$

где $A(k)$ – оператор с ядром

$$\begin{aligned} &\sqrt{|V(x)|} e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x' - y')} \sqrt{V(y)} \left(\frac{(\ln|x'' - y''|)}{2\pi} - \right. \\ &- i \left(\frac{\alpha(k|x'' - y''|)}{4} \right) (\ln(|k||x'' - y''|) + i(\arg k + 2\pi n)) - \frac{i\beta(k|x'' - y''|)}{4} \Big) - \\ &- \sqrt{|V(x)|} G_1(x, y, \mathbf{k}', k) \sqrt{V(y)}. \end{aligned} \quad (16)$$

Из вида ядра (16), доказательства теоремы 1 и свойств функций α и β вытекает, что $A(k)$ – компактный оператор, аналитически зависящий от $k \in \pi^{-1}(U)$, при этом производная $A'(k)$ существует и непрерывна в том числе в окрестностях точек из $\pi^{-1}(\{0\})$, где U – достаточно малая окрестность нуля в $\mathbb{C}$. Следовательно, величины $\|A(k)\|$, $\|A'(k)\|$ равномерно ограничены в $\pi_n^{-1}(U)$ для любого n . Кроме того, из (16) легко усмотреть, что если

$$\|A(k)\| \leq C_1, \quad \|A'(k)\| \leq C_2, \quad k \in \pi_0^{-1}(U)$$

и $\delta > 0$ произвольно, то для любого целого N найдется такая окрестность нуля $U' \subset \mathbb{C}$, что для $k \in \pi_n^{-1}(U')$, где $|n| \leq N$, будут справедливы неравенства

$$\|A(k)\| \leq C_1 + \delta, \quad \|A'(k)\| \leq C_2 + \delta.$$

Пусть ϵ достаточно мало. Положим $\theta = (1 - \epsilon A(k))\phi$, тогда уравнение (15) примет вид

$$\begin{aligned} \theta(x) = \epsilon \left(c_1 + \frac{\text{Ln } k}{2\pi} \right) e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{|V(x)|} \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', y')} \sqrt{V(y)} \times \\ \times ((1 - \epsilon A(k))^{-1} \theta)(y) dy. \end{aligned} \quad (17)$$

Наличие ненулевого решения уравнения (17), очевидно, эквивалентно тому, что k удовлетворяет алгебраическому уравнению

$$\begin{aligned} 1 = \epsilon \left(c_1 + \frac{\text{Ln } k}{2\pi} \right) \langle (1 - \epsilon A(k))^{-1} (e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{|V(x)|}), e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{V(x)} \rangle = \\ = \epsilon \left(c_1 + \frac{\text{Ln } k}{2\pi} \right) (v + f(k, \epsilon)), \end{aligned} \quad (18)$$

где

$$\begin{aligned} f(k, \epsilon) = \langle ((1 - \epsilon A(k))^{-1} - 1) (e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{|V(x)|}), e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{V(x)} \rangle = \\ = \epsilon \langle (1 - \epsilon A(k))^{-1} A(k) (e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{|V(x)|}), e^{i(\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}', x')} \sqrt{V(x)} \rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

здесь и ниже $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в $L^2(\Omega)$. Функция f , очевидно, аналитична по переменной $k \in \pi^{-1}(U)$, и при достаточно малых ϵ имеют место неравенства

$$|f(k, \epsilon)| \leq C_2 \epsilon \|A(k)\|, \quad \left| \frac{\partial f(k, \epsilon)}{\partial k} \right| \leq C_3 \epsilon,$$

где $k \in \pi_n^{-1}(U)$, n произвольно.

Перепишем уравнение (18) в виде

$$\text{Ln } k = \ln |k| + i(\arg k + 2\pi n) = \frac{2\pi}{\epsilon v} + g(k, \epsilon), \quad (20)$$

где

$$g(k, \epsilon) = -2\pi c_1 + 2\pi \left(\frac{1}{\epsilon(v + f(k, \epsilon))} - \frac{1}{\epsilon v} \right) = -2\pi \left(c_1 + \frac{f(k, \epsilon)}{\epsilon v(v + f(k, \epsilon))} \right).$$

Функция g в силу свойств функции f аналитична по $k \in \pi^{-1}(U)$ при малых ϵ и удовлетворяет оценкам

$$|g(k, \epsilon)| \leq C_4(1 + \|A(k)\|), \quad \left| \frac{\partial g(k, \epsilon)}{\partial k} \right| \leq C_5$$

для $k \in \pi_n^{-1}(U)$, где n произвольно.

Далее, запишем уравнение (20) как систему уравнений относительно $r = |k|$ и $\gamma = \arg k + 2\pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$):

$$\ln r = \frac{2\pi}{\epsilon v} + \text{Re } g(r, \gamma, \epsilon), \quad \gamma = \text{Im } g(r, \gamma, \epsilon). \quad (21)$$

Из свойств функции g и сказанного выше относительно оператора $A(k)$ вытекает, что, во-первых,

$$|g(k, \epsilon)| \leq C_4(1 + \|A(k)\|) < 2\pi N$$

для $k \in \pi_0^{-1}(U)$ и некоторого целого N и, во-вторых, существует окрестность нуля $U' = \{|k| < r_0\}$ в $\mathbb{C}$ такая, что для $k \in \pi_n^{-1}(U')$ и $|n| \leq N$ по-прежнему выполнено неравенство $|g(k, \epsilon)| < 2\pi N$, откуда

$$|\operatorname{Im} g(r, \gamma, \epsilon)| \leq |g(r, \gamma, \epsilon)| < 2\pi N, \quad (22)$$

если $r < r_0$ и $|\gamma| \leq 2\pi(N + 1/2)$. Далее, функция $\ln r - \operatorname{Re} g(r, \gamma, \epsilon)$ непрерывно дифференцируема по r и γ и для достаточно малой окрестности нуля U'

$$\frac{\partial}{\partial r}(\ln r - \operatorname{Re} g(r, \gamma, \epsilon)) = \frac{1}{r} - \operatorname{Re} \frac{\partial g(r, \gamma, \epsilon)}{\partial r} > 0$$

в силу ограниченности $\partial g / \partial r$. Поэтому функция $\ln r - \operatorname{Re} g(r, \gamma, \epsilon)$ монотонно возрастает по переменной r и, кроме того, стремится к $-\infty$ при $r \rightarrow +0$ и отличается от $\ln r$ для достаточно малых r не более чем на константу, не зависящую от ϵ . Следовательно, первое из уравнений (21) для всех достаточно малых ϵ и произвольного $\gamma \in [-2\pi(N + 1/2), 2\pi(N + 1/2)]$ имеет единственное решение $r = r(\gamma)$. Это решение непрерывно зависит от $\gamma \in (-2\pi(N + 1/2), 2\pi(N + 1/2))$ по теореме о неявной функции. Таким образом, на отрезке $[-2\pi N, 2\pi N]$ функция $\operatorname{Im} g(r, \gamma, \epsilon)$ непрерывна по переменной γ и, кроме того, согласно неравенству (22) принимает значения в этом же промежутке. Следовательно, существует решение $\gamma \in [-2\pi N, 2\pi N]$ второго из уравнений (21) для $r = r(\gamma)$. Тем самым доказано существование решения системы уравнений (21), а значит, существование уровня. Формула (12) вытекает из уравнения (20). Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 4. *Предположим, что $V(x) \leq 0$ для всех x . Тогда в некоторой достаточно малой окрестности точки $E_0 = (\mathbf{k}')^2$ существует ровно одно собственное значение $E = E(\mathbf{k}') < E_0$, для которого справедлива формула*

$$E = E_0 - \exp\left(\frac{4\pi + O(\epsilon)}{\epsilon v}\right), \quad (23)$$

$$\text{где } v = \int_{\Omega} V(x) dx.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E < (\mathbf{k}')^2$. Согласно свойствам функций Ханкеля и Макдональда [6] для $k = i\kappa$, где $\kappa = \sqrt{(\mathbf{k}')^2 - E} > 0$, имеем

$$G_0(x'' - y'', k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(i\kappa|x'' - y''|) = \frac{1}{2\pi} K_0(\kappa|x'' - y''|) \quad (24)$$

и

$$K_0(x) = -I_0(x) \ln \frac{x}{2} - \gamma + O(x^2) = -\ln x + \ln 2 - \gamma + \alpha(x) \ln x + \beta(x), \quad (25)$$

где $\alpha(x)$, $\beta(x)$ – вещественные аналитические функции, имеющие порядок $O(x^2)$. Пользуясь (14), (24), (25), перепишем уравнение (11) для достаточно малых κ в виде

$$\phi(x) = \epsilon \left(c_1 + \frac{\ln \kappa}{2\pi} \right) e^{i(\mathbf{k}', x')} \sqrt{|V(x)|} \int_{\Omega} e^{-i(\mathbf{k}', y')} \sqrt{V(y)} \phi(y) dy + \epsilon A(\kappa) \phi(x), \quad (26)$$

где $A(\kappa)$ – оператор с ядром

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \sqrt{|V(x)|} e^{i(\mathbf{k}', x' - y')} \sqrt{V(y)} (\ln |x'' - y''| - \alpha(\kappa |x'' - y''|) \ln(\kappa |x'' - y''|) - \\ & - \beta(\kappa |x'' - y''|)) - \sqrt{|V(x)|} G_1(x, y, \mathbf{k}', \kappa) \sqrt{V(y)}; \end{aligned}$$

$c_1 = (-\ln 2 + \gamma)/2\pi$. Легко видеть (см. доказательство теоремы 3), что $A(\kappa)$ – компактный самосопряженный оператор, имеющий равномерно ограниченную производную при малых $\kappa > 0$ (эрмитовость G_1 вытекает из эрмитовости функций Грина $G_0(x'' - y'', E - (\mathbf{k}' + 2\pi \mathbf{n}')^2)$ при $\mathbf{n}' \neq 0$ и малых κ). Как и в этом доказательстве, получаем из (26) алгебраическое уравнение для собственных значений:

$$\begin{aligned} 1 &= \epsilon \left(c_1 + \frac{\ln \kappa}{2\pi} \right) \langle (1 - \epsilon A(\kappa))^{-1} (e^{i(\mathbf{k}', x')} \sqrt{|V(x)|}), e^{i(\mathbf{k}', x')} \sqrt{V(x)} \rangle = \\ &= \epsilon \left(c_1 + \frac{\ln \kappa}{2\pi} \right) (v + f(\kappa, \epsilon)), \end{aligned}$$

причем функция $f(\kappa, \epsilon)$ вещественна в силу самосопряженности оператора $A(\kappa)$ и функции $\epsilon^{-1} f(\kappa, \epsilon)$, $\epsilon^{-1} \partial f(\kappa, \epsilon) / \partial \kappa$ равномерно ограничены для малых $\kappa > 0$. Перепишем полученное уравнение в виде

$$\ln \kappa = \frac{2\pi}{\epsilon v} + g(\kappa, \epsilon), \quad (27)$$

где функция

$$g(\kappa, \epsilon) = -2\pi \left(c_1 + \frac{f(\kappa, \epsilon)}{\epsilon v (v + f(\kappa, \epsilon))} \right)$$

равномерно ограничена вместе с производной для малых $\kappa > 0$. Отсюда получаем, что для всех достаточно малых $\epsilon > 0$ существует единственное решение уравнения (27), а следовательно, единственный уровень (см. доказательство теоремы 3). Формула (23) вытекает из (27). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 4 вытекает хорошо известный факт наличия при малых ϵ единственного собственного значения $E = E(\epsilon) < 0$ у действующего в $L^2(\mathbb{R}^2)$ оператора $-\Delta$, потенциал которого ненулевой, вещественный и удовлетворяет неравенствам $V(x) \leq 0$, $|V(x)| \leq C e^{-a|x|}$, $x \in \mathbb{R}^2$ (см. [1]). Если потенциал V знакопеременный, но $\int_{\mathbb{R}^2} V(x) dx < 0$, то для малых ϵ существует хотя бы один уровень (см. доказательство теоремы 3). В обоих случаях $E = -e^{(4\pi + O(\epsilon))/(\epsilon v)}$.

Список литературы

- [1] М. Рид, Б. Саймон, *Современные методы математической физики, т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.
- [2] Дж. Тейлор, *Теория рассеяния. Квантовая теория нерелятивистских столкновений*, Мир, М., 1975.
- [3] Yu. P. Chuburin, *Commun. Math. Phys.*, **249** (2004), 497.
- [4] W. Hunziker, I. M. Sigal, *J. Math. Phys.*, **41** (2000), 3448.
- [5] М. Рид, Б. Саймон, *Современные методы математической физики, т. 3. Теория рассеяния*, Мир, М., 1982.
- [6] А. Ф. Никифоров, В. Б. Уваров, *Специальные функции математической физики*, Наука, М., 1984.
- [7] М. Рид, Б. Саймон, *Современные методы математической физики, т. 1. Функциональный анализ*, Мир, М., 1977.

Поступила в редакцию 27.VI.2005 г.,
после доработки 5.X.2005 г.