Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Зупник, Деформации евклидовых суперсимметрий, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 2, 270–289

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1963>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 16:42:55

© 2006 г.

Б. М. Зупник*

ДЕФОРМАЦИИ ЕВКЛИДОВЫХ СУПЕРСИММЕТРИЙ

Рассматриваются квантовые супергруппы, возникающие при неантикоммутативных деформациях $N = (1/2, 1/2)$ и $N = (1, 1)$ четырехмерных евклидовых суперсимметричных теорий. Операторы твиста в соответствующих суперпространствах и деформированных алгебрах суперполей содержат левые спинорные генераторы. Показано, что неантикоммутативные $\star$ -произведения суперполей преобразуются ковариантно в деформированных суперсимметриях. Эта ковариантность гарантирует инвариантность деформированных суперполевых действий моделей, использующих $\star$ -произведения суперполей.

Ключевые слова: суперсимметрия, суперпространство, деформация, твист.

1. ВВЕДЕНИЕ

Простейшая пространственно-временная некоммутативность связана со следующим соотношением для операторов координат $\hat{x}^m$:

$$C_{\star}^{mn} \equiv \hat{x}^m \star \hat{x}^n - \hat{x}^n \star \hat{x}^m - i\vartheta^{mn} = 0, \quad (1.1)$$

где ϑ^{mn} , $m, n = 0, 1, 2, 3$, – некоторый постоянный тензор, определяющий деформацию коммутативных четырехмерных координат x^m (см., например, обзоры [1]). Некоммутативная алгебра полей на этом деформированном пространстве-времени $\hat{f}(\hat{x})$ формально аналогична алгебре Гейзенберга–Вейля на квантованном фазовом пространстве $\hat{x}, \hat{p}$, $[\hat{p}, \hat{x}] = i\hbar$. Некоммутативная алгебра $A_{\star}$ определяется как алгебра формальных полиномов по $\hat{x}^m$, факторизованная по квадратичному соотношению (1.1). Упорядочение Вейля операторного поля использует разложение по полностью симметризованным мономам $\hat{x}^{(m_1 \star \dots \star m_n)}$:

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m_1 \dots m_n} \hat{x}^{(m_1 \star \dots \star m_n)}, \quad (1.2)$$

где $c_{m_1 \dots m_n}$ – числовые коэффициенты, симметричные по $m_1, \dots, m_n$. Этой упорядоченной операторной функции можно поставить в соответствие обычную гладкую

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.
E-mail: zupnik@theor.jinr.ru

функцию $f(x)$:

$$w[\hat{f}(\hat{x})] = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_{m_1 \dots m_n} x^{m_1} \dots x^{m_n}, \quad (1.3)$$

которую мы будем называть коммутативным образом $\hat{f}(\hat{x})$. Обратное отображение в операторное представление обозначим $w^{-1}[f(x)] = \hat{f}(\hat{x})$.

Популярная в теории поля реализация этой некоммутативной алгебры $A_\star$ может быть определена на гладких функциях коммутативных координат с использованием следующего псевдолокального представления некоммутативного произведения:

$$\begin{aligned} w[\hat{f} \star \hat{g}] &= f \star g = f e^P g = f g + \frac{i}{2} \vartheta^{mn} \partial_m f \partial_n g - \frac{1}{8} \vartheta^{mn} \vartheta^{rs} \partial_m \partial_r f \partial_n \partial_s g + \dots, \\ f P g &= \frac{i}{2} \vartheta^{mn} \partial_m f \partial_n g, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\partial_m = \partial/\partial x_m$. Все произведения функций и их частных производных в правой части коммутативны. Формула $(\hat{f} \star \hat{g})(\hat{x}) = w^{-1}[(f \star g)(x)]$ позволяет построить упорядоченное разложение некоммутативного произведения операторных функций по степенному разложению произведений гладких функций. В представлении (1.4) основное коммутационное соотношение (1.1) выполняется тождественно:

$$x^m \star x^n = x^m x^n + \frac{i}{2} \vartheta^{mn}. \quad (1.5)$$

Очень многие результаты исследования некоммутативной теории поля получены именно в этом удобном теоретико-полевым представлении, использующем производные произвольного порядка локальных полей, хотя все свойства теории могут быть переформулированы в операторном представлении.

Рассмотрим простое ϑ -некоммутативное взаимодействие вещественного скалярного поля $\phi(x)$ в некоммутативной алгебре $A_\star$:

$$S_\star = \int d^4x L_\star(\phi) = \frac{1}{2} \int d^4x (\eta^{mn} \partial_m \phi \star \partial_n \phi - M^2 \phi \star \phi - \lambda \phi_\star^4), \quad (1.6)$$

где M и λ – масса и константа связи, соответственно, η^{mn} – метрика пространства Минковского, а $\phi_\star^4 = \phi \star \phi \star \phi \star \phi$. В представлении (1.4) квадратичные члены этого действия содержат стандартное недеформированное свободное действие и дополнительные исчезающие интегралы от полных дивергенций. Нелинейное взаимодействие явно зависит от ϑ_{mn} , поэтому оно не инвариантно относительно стандартного преобразования Лоренца. Несмотря на это нарушение лоренц-инвариантности, все модели ϑ -некоммутативной теории поля используют следующее правило отбора: *исходные некоммутативные (примарные) поля преобразуются по представлениям группы Пуанкаре, а взаимодействия этих полей построены на основе алгебры $A_\star$* . Поскольку $\star$ -произведения примарных полей нековариантны по отношению к группе Лоренца, это правило не имеет простой интерпретации в рамках обычных симметрий.

В работах [2]–[5] было показано, что это правило отбора вытекает из инвариантности некоммутативной теории поля относительно t -деформированной квантовой группы Пуанкаре с использованием оператора твиста

$$\mathcal{F} = \exp\left(\frac{i}{2}\vartheta^{mn}\partial_m \otimes \partial_n\right). \quad (1.7)$$

Следует сказать, что другие варианты квантово-групповых деформаций группы Пуанкаре рассматривались ранее [6]. В частности, различные формы оператора твиста Дринфельда [7] широко использовались в этих исследованиях. Однако соответствующие некоммутативные полевые модели еще не изучены так детально, как модели, основанные на соотношении (1.1).

В разделе 2 мы рассматриваем t -деформированные преобразования Лоренца для $\star$ -произведения примарных полей, используя локальные соотношения между дифференциальными операторами на коммутативной и некоммутативной алгебрах из работ [4].

Деформации суперсимметричных теорий характеризуются скобкой Пуассона APB на суперполях A и B , где оператор P представляет собой некоторую квадратичную форму по производным четных и нечетных координат суперпространства [8]. Важные классы нильпотентных Q -деформаций евклидовых суперсимметрий были найдены в работе [9] для случая $N = (1/2, 1/2)$, $D = 4$ суперсимметрии и в работах [10], [11] для $N = (1, 1)$, $D = 4$ суперсимметрии. Построенные из левых спинорных генераторов суперсимметрии Q операторы деформации P для этих моделей сохраняют суперполевые связи для представлений недеформированной суперсимметрии, например, связи киральности или грассмановой аналитичности. Q -деформированные суперполевые теории [9]–[13] в псевдолокальном представлении используют $\star$ -произведения недеформированных примарных суперполей. Деформированные теории не инвариантны относительно действия генераторов исходной евклидовой суперсимметрии, которые не коммутируют с P .

Интерпретация деформированных евклидовых суперсимметрий в рамках алгебр Хопфа была введена в работе [14]. Раздел 3 посвящен обсуждению твист-деформированной $N = (1/2, 1/2)$ суперсимметрии. Неантикоммутативное $\star$ -умножение в деформированной супералгебре определяется на суперкоммутативных суперполях, которые заданы в обычном суперпространстве. Примарные суперполя этой модели преобразуются по представлениям $N = (1/2, 1/2)$ суперсимметрии, которые реализованы дифференциальными операторами первого порядка. Оператор твиста $\mathcal{F}$ для нильпотентной Q -деформации определяет копроизведение в t -деформированной $N = (1/2, 1/2)$ суперсимметрии, а также $\star$ -умножение в соответствующей некоммутативной алгебре суперполей. Мы формулируем локальный принцип ковариантности в этой алгебре: примарные суперполя A, B и их $\star$ -произведение $A \star B$ преобразуются одинаково в t -деформированной суперсимметрии. Генераторы деформированных преобразований в операторном представлении однозначно определяются по оператору твиста и соответствующему генератору недеформированной суперсимметрии. Например, деформированные генераторы правых преобразований супер-

симметрии содержат константы деформации и грассмановы производные второго порядка в операторном представлении, хотя супералгебра Ли остается недеформированной. Показано, что деформированные суперполевые действия, использующие $\star$ -умножение, сохраняют инвариантность относительно t -деформированной суперсимметрии.

В разделе 4 рассматривается оператор твиста, определяющий копроизведение в t -деформированной $N = (1, 1)$ суперсимметрии и соответствующее $\star$ -умножение в неантикоммутативной алгебре гармонических суперполей. Деформированные суперполевые действия, построенные в $N = (1, 1)$ гармоническом суперпространстве [12], [13], частично нарушают стандартную суперсимметрию, однако эти суперполевые действия инвариантны относительно преобразований t -деформированной $N = (1, 1)$ суперсимметрии. Примечательно, что квадратичные суперполевые члены действия сохраняют также обычную суперсимметрию.

Отметим, что квантово-групповые деформации суперсимметрии с более сложной суперполевой геометрией рассматривались ранее [15], однако мы не обсуждаем эти модели в нашей работе. Краткое описание t -деформированных суперсимметрий в суперполевых теориях было дано в нашей работе [16].

2. ДЕФОРМИРОВАННАЯ ГРУППА ПУАНКАРЕ

Мы дадим обзор основных приложений t -деформированной симметрии Пуанкаре [2]–[4] в некоммутативной теории поля. Соответствующий оператор твиста $\mathcal{F} = e^{\mathcal{P}}$ (1.7) действует на тензорных произведениях функций:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} \circ f \otimes g &= f \otimes g + \mathcal{P} \circ f \otimes g + \frac{1}{2} \mathcal{P}^2 \circ f \otimes g + \dots, \\ \mathcal{P} \circ f \otimes g &= \frac{i}{2} \vartheta^{mn} \partial_m f \otimes \partial_n g.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Строгое определение некоммутативного произведения (1.4) связано с этим оператором $\mathcal{F}$:

$$f \star g \equiv \mu_\star \circ f \otimes g = \mu \circ \mathcal{F} \circ f \otimes g, \quad \mu \circ f \otimes g = fg,\tag{2.2}$$

где отображение μ определяет умножение в коммутативной алгебре функций $A(\mathbb{R}^4)$, а аналогичное отображение $\mu_\star = \mu \circ \mathcal{F}$ – умножение в алгебре $A_\star$. В теоретико-полевых конструкциях оператор твиста аналогичен псевдолокальному оператору e^P (1.4), а тензорное произведение можно трактовать как нелокальное произведение обычных полей в различных точках $f(x_1)g(x_2)$.

Рассмотрим локальное представление генераторов группы Пуанкаре

$$P_m = \partial_m, \quad M_{mn} = x_n \partial_m - x_m \partial_n\tag{2.3}$$

и соответствующие инфинитезимальные преобразования скалярного поля

$$\delta_c \phi = -c^m P_m \phi = -P_c \phi, \quad \delta_\omega \phi = -\frac{1}{2} \omega^{mn} M_{mn} \phi = -M_\omega \phi,\tag{2.4}$$

где c_m, ω^{mn} – инфинитезимальные параметры трансляций и преобразований Лоренца. Конечное преобразование формы скалярной функции (активное преобразование Пуанкаре) имеет следующий вид:

$$\phi'(x) = \phi(\tilde{x}) = e^{-M_\omega} e^{-P_c} \phi(x), \quad \tilde{x}^m = e^{-M_\omega} (x^m - c^m). \quad (2.5)$$

Операторы преобразования $e^{-M_\omega} e^{-P_c}$ принадлежат универсальной обертывающей бивалгебре функций от генераторов $U(P_m, M_{mn})$, в которой задано ассоциативное умножение генераторов и коумножение $\Delta: U \rightarrow U \otimes U$. На единице и генераторах $U(P_m, M_{mn})$ коумножение действует тривиально:

$$\Delta(1) = 1 \otimes 1, \quad \Delta(P_c) = P_c \otimes 1 + 1 \otimes P_c, \quad D(M_\omega) = M_\omega \otimes 1 + 1 \otimes M_\omega, \quad (2.6)$$

соответственно определяется действие Δ на функциях генераторов, например,

$$\Delta(M_\omega M_\omega) = \Delta(M_\omega) \Delta(M_\omega), \quad \Delta(e^{-M_\omega}) = e^{-M_\omega} \otimes e^{-M_\omega}.$$

Копроизведение задает действие генераторов и их функций на тензорном произведении полей, например

$$\Delta(M_\omega) \circ f \otimes g = M_\omega f \otimes g + f \otimes M_\omega g. \quad (2.7)$$

Таким образом, стандартное правило Лейбница для инфинитезимального преобразования Лоренца в коммутативной алгебре полей вытекает из формулы для $\Delta(M_\omega)$:

$$\delta_\omega(fg) = \mu \circ \delta_\omega(f \otimes g) = (\delta_\omega f)g + f \delta_\omega g. \quad (2.8)$$

В коммутативной теории поля это правило постулируется, однако в некоммутативном случае возможны деформации копроизведения и соответствующих правил преобразования произведений функций.

Очевидно, что некоммутативное произведение преобразуется нековариантно в обычной группе Лоренца:

$$\delta_\omega(f \star g) = (\delta_\omega f) \star g + (f \star \delta_\omega g) \neq -M_\omega(f \star g). \quad (2.9)$$

По определению t -деформация группы Пуанкаре $U(P_m, M_{mn}) \rightarrow U_t(P_m, M_{mn})$ не изменяет алгебру Ли генераторов, поэтому можно оставить стандартное представление (2.3) в U_t . Копроизведение в $U_t(P_m, M_{mn})$ деформировано для генераторов M_{mn} :

$$\begin{aligned} \Delta_t(P_c) &= e^{-P} \Delta(P_c) e^P = \Delta(P_c), \\ \Delta_t(M_\omega) &= e^{-P} \Delta(M_\omega) e^P = \Delta(M_\omega) + \frac{i}{2} \omega^{mn} \vartheta_{ms} P_n \otimes P^s - \frac{i}{2} \omega^{mn} \vartheta_{rn} P^r \otimes P_m. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Детальное описание деформированных преобразований полей в некоммутативной алгебре $A_\star$ было дано в недавних работах мюнхенской группы [4]. Эти авторы построили отображение между дифференциальными операторами на коммутативной и некоммутативной алгебрах функций. Пусть $\xi = \xi^m(x) \partial_m$ – дифференциальный оператор первого порядка на $A(\mathbb{R}^4)$, содержащий произвольную функцию

$\xi^m(x)$, например, инфинитезимальное преобразование Лоренца определяется функцией $\xi^m = \omega^{mn} x_n$. Можно построить соответствующий оператор $\hat{X}_\xi$ на некоммутативной алгебре $A_\star$, удовлетворяющий простому соотношению

$$(\xi f) = \mu \circ (\xi^m \otimes \partial_m)(1 \otimes f) = \mu_\star e^{-\mathcal{P}}(\xi^m \otimes \partial_m)(1 \otimes f) = \xi^m \star \partial_m f - \frac{i}{2} \vartheta^{rs} \partial_r \xi^m \star \partial_s \partial_m f - \frac{1}{8} \vartheta^{rs} \vartheta^{pq} \partial_r \partial_p \xi^m \star \partial_s \partial_q \partial_m f + O(\vartheta^3) = (\hat{X}_\xi \star f). \quad (2.11)$$

Отметим, что в общем случае $\hat{X}_\xi$ содержит производные любого порядка и действует по определению на любых некоммутативных функциях или их коммутативных образах.

Локальным генераторам P_m и M_{mn} (2.3), действующим на коммутативных образах $f(x)$, соответствуют следующие операторы на некоммутативных функциях $\hat{f}(\hat{x})$ в алгебре $A_\star$:

$$\begin{aligned} \partial_m f &= (\hat{P}_m \star f), & (\hat{P}_m \star \hat{f}) &= w^{-1}(\hat{P}_m \star f), \\ (M_{mn} f) &= (\hat{M}_{mn} \star f), & (\hat{M}_{mn} \star \hat{f}) &= w^{-1}(\hat{M}_{mn} \star f). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Отметим, что генератор трансляций имеет стандартный вид, а генератор преобразований Лоренца в операторном представлении содержит производные второго порядка:

$$\begin{aligned} \hat{M}_{mn} &= x_n \star \partial_m - x_m \star \partial_n + \frac{i}{2} \eta_{mr} \vartheta^{rs} \partial_s \partial_n - \frac{i}{2} \eta_{nr} \vartheta^{rs} \partial_s \partial_m, \\ \hat{M}_\omega &= \frac{1}{2} \omega^{mn} \hat{M}_{mn} = \omega^{mn} x_n \star \partial_m + \frac{i}{2} \omega^{mn} \eta_{mr} \vartheta^{rs} \partial_s \partial_n. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Операторы $\hat{P}_m = \partial_m$ и $\hat{M}_{mn}$ естественно применять в операторном представлении некоммутативной алгебры $A_\star$ на функциях $\hat{f}(\hat{x})$, например

$$(\hat{M}_\omega \star \hat{x}^m \star \hat{x}^n) = \eta_{sr} \left[\omega^{ms} \hat{x}^r \star \hat{x}^n + \omega^{ns} \hat{x}^m \star \hat{x}^r - \frac{i}{2} \omega^{ms} \vartheta^{rn} + \frac{i}{2} \omega^{ns} \vartheta^{rm} \right]. \quad (2.14)$$

Нетрудно проверить ковариантность величины $C_\star^{mn}$ (1.1) относительно преобразований деформированной группы Лоренца:

$$(\hat{M}_\omega \star C_\star^{mn}) = \omega^{ms} \eta_{sr} C_\star^{rn} + \omega^{ns} \eta_{sr} C_\star^{mr}. \quad (2.15)$$

Антикоммутатор $A_\star^{mn} = \hat{x}^m \star \hat{x}^n + \hat{x}^n \star \hat{x}^m$ также преобразуется ковариантно в $U_t(P_m, M_{mn})$.

Из соотношений (2.12) следует, что операторы $\hat{P}_m$ и $\hat{M}_{mn}$ образуют алгебру Ли (и соответствующую ассоциативную алгебру), изоморфную стандартной алгебре с генераторами P_m и M_{mn} :

$$(\hat{M}_{mn} \star \hat{M}_{rs} \star f) = (M_{mn} M_{rs} f), \quad (\hat{P}_s \star \hat{M}_{mn} \star f) = (P_s M_{mn} f). \quad (2.16)$$

Копроизведение (2.10) действует на тензорном произведении функций

$$-\frac{1}{2} \omega^{mn} \Delta_t(M_{mn}) \circ f \otimes g = (\delta_\omega f) \otimes g + f \otimes (\delta_\omega g) + \frac{i}{2} (\omega^{mn} \vartheta_{ns} - \vartheta^{mn} \omega_{ns}) \partial_m f \otimes \partial^s g. \quad (2.17)$$

Применив отображение $\mu_\star$ (2.2) к этому соотношению, получим формулу ковариантного действия деформированного преобразования Лоренца в алгебре $A_\star$:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_\omega \star (f \star g) &= -\frac{1}{2}\omega^{mn}\mu_\star \circ \Delta_t(M_{mn}) \circ f \otimes g = (\delta_\omega f) \star g + f \star (\delta_\omega g) + \\ &+ \frac{i}{2}(\omega^{mn}\vartheta_{ns} - \vartheta^{mn}\omega_{ns})\partial_m f \star \partial^s g = -M_\omega(f \star g).\end{aligned}\quad (2.18)$$

Последнее соотношение можно проверить с помощью псевдолокальной формулы (1.4). Таким образом, в $U_t(P_m, M_{mn})$ некоммутативное произведение скалярных полей преобразуется как скаляр. Следует отметить, что соответствующие конечные преобразования $f \star g$ в $U_t(P_m, M_{mn})$ имеют вид, аналогичный преобразованию формы (2.5) примарных скалярных полей:

$$(f \star g)'(x) = (e^{-M_\omega} e^{-P_c} f \star g)(x). \quad (2.19)$$

В этом псевдолокальном представлении мы рассматриваем активные преобразования всех полевых объектов в фиксированной точке и не обсуждаем дуальные преобразования некоммутативного произведения полей совместно с преобразованиями координат¹⁾.

Применение отображения μ к (2.17) дает нековариантное действие $U_t(P_m, M_{mn})$ на коммутативном произведении полей:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_\omega \star (fg) &= -\frac{1}{2}\omega^{mn}\mu \circ \Delta_t(M_{mn}) \circ f \otimes g = (\delta_\omega f)g + f(\delta_\omega g) + \\ &+ \frac{i}{2}(\omega^{mn}\vartheta_{ns} - \vartheta^{mn}\omega_{ns})\partial_m f \partial^s g \neq -\frac{1}{2}\omega^{mn}M_{mn}(fg).\end{aligned}\quad (2.20)$$

Четырехмерные интегралы от $\star$ -произведений полей (1.6) инвариантны относительно $U_t(P_m, M_{mn})$ -симметрии. Квадратичные (свободные) члены взаимодействия обладают также стандартной пуанкаре-инвариантностью.

3. ДЕФОРМАЦИЯ $N = (1/2, 1/2)$ СУПЕРСИММЕТРИИ

В этом разделе рассматривается простейшая евклидова суперсимметрия $SUSY(1/2, 1/2)$, обобщающая $ISO(4)$ -симметрию пространства $\mathbb{R}^4$. Мы используем киральные координаты $z^M = (y_m, \theta^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ в евклидовом $N = (1/2, 1/2)$ суперпространстве, где $m = 1, 2, 3, 4$, $\alpha = 1, 2$ и $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$ – векторные и спинорные индексы группы $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Отметим, что эти координаты псевдовещественны по отношению к специальному сопряжению [10]

$$(y_m)^* = y_m, \quad (\theta^\alpha)^* = \varepsilon_{\alpha\beta}\theta^\beta, \quad (\bar{\theta}^{\dot{\alpha}})^* = \varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}, \quad (AB)^* = B^*A^* \quad (3.1)$$

для любых суперполей $A(z)$ и $B(z)$. Например, можно использовать условие вещественности для четного евклидова кирального суперполя: $[\phi(y, \theta)]^* = \phi(y, \theta)$.

¹⁾ Действие дуальной квантовой группы Пуанкаре обсуждалось в работах [2], [5].

Центральные и правые $4D$ -координаты могут быть выражены через киральные координаты

$$x_m = y_m - i\theta\sigma_m\bar{\theta}, \quad \bar{y}_m = y_m - 2i\theta\sigma_m\bar{\theta}, \quad (3.2)$$

где $(\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}$ – матрицы Вейля группы $SO(4)$. Генераторы супергруппы $SUSY(1/2, 1/2)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} L_\alpha^\beta &= L_\alpha^\beta(y) + L_\alpha^\beta(\theta) = \frac{1}{4}(\sigma_m\bar{\sigma}_n)_\alpha^\beta(y_n\partial_m - y_m\partial_n) + \theta^\beta\partial_\alpha - \frac{1}{2}\delta_\alpha^\beta\theta^\gamma\partial_\gamma, \\ R_{\dot{\alpha}}^\beta &= R_{\dot{\alpha}}^\beta(y) + R_{\dot{\alpha}}^\beta(\bar{\theta}) = \frac{1}{4}(\bar{\sigma}_m\sigma_n)_{\dot{\alpha}}^\beta(y_m\partial_n - y_n\partial_m) + \bar{\theta}^\beta\bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - \frac{1}{2}\delta_{\dot{\alpha}}^\beta\bar{\theta}^\gamma\bar{\partial}_\gamma, \\ O &= \theta^\alpha\partial_\alpha - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\bar{\partial}_{\dot{\alpha}}, \quad Q_\alpha = \partial_\alpha, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}} - 2i\theta^\alpha\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad P_m = \partial_m, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $(\bar{\sigma}_m)^{\dot{\alpha}\alpha} = \varepsilon^{\alpha\beta}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}(\sigma_m)_{\beta\dot{\beta}}^2$ и $\partial_M = (\partial_m, \partial_\alpha, \bar{\partial}_{\dot{\alpha}})$ – частные производные в киральных координатах

$$\partial_m y_n = \delta_{mn}, \quad \partial_{\alpha\dot{\alpha}} = (\sigma_m)_{\alpha\dot{\alpha}}\partial_m, \quad \partial_\alpha\theta^\beta = \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}. \quad (3.4)$$

Генераторы L_α^β , $R_{\dot{\alpha}}^\beta$ и O соответствуют группе автоморфизмов $SU(2)_L \times SU(2)_R \times O(1, 1)$.

Рассмотрим четные комбинации генераторов суперсимметрии и соответствующих параметров преобразования c_m , λ_β^α , $\rho_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}}$, a , ϵ^α и $\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}}$:

$$P_c = c_m P_m, \quad aO, \quad L_\lambda = \lambda_\beta^\alpha L_\alpha^\beta, \quad R_\rho = \rho_{\dot{\beta}}^{\dot{\alpha}} R_{\dot{\alpha}}^\beta, \quad Q_\epsilon = \epsilon^\alpha Q_\alpha, \quad \bar{Q}_{\bar{\epsilon}} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}. \quad (3.5)$$

При изучении деформаций удобно разделить операторы $SUSY(1/2, 1/2)$ -преобразований на две группы:

$$\delta A = (\delta_g + \delta_G)A = -(g + G)A, \quad g = P_c + R_\rho + Q_\epsilon, \quad G = L_\lambda + aO + \bar{Q}_{\bar{\epsilon}}. \quad (3.6)$$

Стандартные алгебры общих и киральных суперполей мы будем обозначать $S(4|2, 2)$ и $C(4|2, 0)$, соответственно. Для суперполей $A(z)$ и $B(z)$ с фиксированной Z_2 -четностью $p(A)$ и $p(B)$ умножение в этих алгебрах суперкоммутативно:

$$AB = (-1)^{p(A)p(B)} BA. \quad (3.7)$$

Формально это умножение определяется билинейным отображением μ :

$$\mu \circ A \otimes B = A(z)B(z). \quad (3.8)$$

В теории поля тензорному произведению ставится в соответствие нелокальное умножение суперполей $A(z_1)B(z_2)$, заданных на независимых наборах координат; тогда μ можно интерпретировать как отождествление z_1 и z_2 .

На генераторах $SUSY(1/2, 1/2)$ задано тривиальное копроизведение

$$\Delta(g) = g \otimes 1 + 1 \otimes g, \quad \Delta(G) = G \otimes 1 + 1 \otimes G. \quad (3.9)$$

²⁾Мы используем следующие соотношения для антисимметричных символов: $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma$, $\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\varepsilon^{\dot{\beta}\dot{\gamma}} = \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}}$.

Это копроизведение определяет действие суперсимметрии на тензорном произведении суперполей:

$$\delta(A \otimes B) = -\Delta(g + G)(A \otimes B) = \delta A \otimes B + A \otimes \delta B, \quad (3.10)$$

и порождает стандартное правило Лейбница для преобразований суперсимметрии на локальном произведении суперполей:

$$\delta(AB) = \mu \circ \delta(A \otimes B) = (\delta A)B + A\delta B. \quad (3.11)$$

Неантикоммутативная деформация координат евклидова $N = (1/2, 1/2)$ суперпространства $\hat{z} = (y_m, \hat{\theta}^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}})$ рассматривалась в работе [9]. Клиффордова координата $\hat{\theta}^\alpha$ деформированного суперпространства удовлетворяет простым соотношениям

$$T^{\alpha\beta} = \hat{\theta}^\alpha \star \hat{\theta}^\beta + \hat{\theta}^\beta \star \hat{\theta}^\alpha - C^{\alpha\beta} = 0, \quad (3.12)$$

где $C^{\alpha\beta}$ – некоторые константы, а координаты y_m , $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ остаются недеформированными:

$$[\hat{\theta}^\alpha, y_m] = [\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, y_m] = [y_m, y_n] = 0, \quad \{\hat{\theta}^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\} = \{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}, \bar{\theta}^{\dot{\beta}}\} = 0. \quad (3.13)$$

Каноническое разложение упорядоченного операторного суперполя $\hat{A}(\hat{z})$ предполагает антисимметризацию по $\hat{\theta}^\alpha$:

$$\hat{A}(y, \hat{\theta}, \bar{\theta}) = r(y, \bar{\theta}) + \hat{\theta}^\alpha \chi_\alpha(y, \bar{\theta}) + \varepsilon_{\alpha\beta} \hat{\theta}^\alpha \star \hat{\theta}^\beta s(y, \bar{\theta}). \quad (3.14)$$

Некоммутативные деформации $S(4|2, 2)$ и $C(4|2, 0)$ будут обозначаться $S_\star(4|2, 2)$ и $C_\star(4|2, 0)$.

В псевдолокальном представлении некоммутативному суперполю $\hat{A}(\hat{z})$ соответствует суперкоммутативный образ $A(z)$ в недеформированном суперпространстве

$$w[\hat{A}(y, \hat{\theta}, \bar{\theta})] = A(z) = r(y, \bar{\theta}) + \theta^\alpha \chi_\alpha(y, \bar{\theta}) + \varepsilon_{\alpha\beta} \theta^\alpha \theta^\beta s(y, \bar{\theta}). \quad (3.15)$$

Соответствующее $\star$ -произведение суперполей $A(z)$ и $B(z)$ содержит генераторы левой суперсимметрии Q_α :

$$\begin{aligned} w[\hat{A} \star \hat{B}] &= (A \star B)(z) = A e^P B = \\ &= AB - \frac{1}{2}(-1)^{p(A)} C^{\alpha\beta} Q_\alpha A Q_\beta B - \frac{1}{32} C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} Q^2 A Q^2 B, \\ APB &= -\frac{1}{2}(-1)^{p(A)} C^{\alpha\beta} Q_\alpha A Q_\beta B, \quad P^3 = 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где P – нильпотентный бидифференциальный оператор и $Q^2 = \varepsilon^{\beta\alpha} Q_\alpha Q_\beta$. В правой части этой формулы все произведения суперполей и их производных суперкоммутативны. Используя разложения этих произведений по степеням θ^α , можно легко построить упорядоченное разложение по $\hat{\theta}^\alpha$ операторного произведения $(\hat{A} \star \hat{B})(\hat{z}) = w^{-1}[(A \star B)(z)]$. Соотношение (3.12) автоматически выполняется в представлении (3.16).

Очевидно, что некоммутативная алгебра $S_*(4|2, 2)$ нековариантна по отношению к преобразованиям δ_G недеформированной суперсимметрии (3.6), например

$$\delta_{\bar{\epsilon}}(A \star B) = -(\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} A) \star B - A \star \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}} B \neq -\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \bar{Q}_{\dot{\alpha}}(A \star B), \quad (3.17)$$

хотя оператор δ_g действует ковариантно:

$$\delta_g(A \star B) = (-gA) \star B - A \star (gB) = -g(A \star B). \quad (3.18)$$

Оператор твиста $\mathcal{F} = e^{\mathcal{P}}$ в этом суперпространстве рассматривался в работе [14] (см. также [17]):

$$\begin{aligned} \mathcal{P} &= -\frac{1}{2} C^{\alpha\beta} Q_{\alpha} \otimes Q_{\beta}, & \mathcal{P}(A \otimes B) &= -\frac{1}{2} (-1)^{p(A)} C^{\alpha\beta} Q_{\alpha} A \otimes Q_{\beta} B, \\ \mathcal{F}(A \otimes B) &= A \otimes B - \frac{1}{2} (-1)^{p(A)} C^{\alpha\beta} Q_{\alpha} A \otimes Q_{\beta} B - \frac{1}{32} C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} Q^2 A \otimes Q^2 B. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Оператор $\mathcal{P}$ веществен по отношению к эрмитову сопряжению, включающему отображение (3.1) на генераторах суперсимметрии $Q_{\alpha}^* = Q^{\alpha}$ и транспонирование:

$$\mathcal{P}^* = -\frac{1}{2} (C^{\alpha\beta})^* Q_{\beta}^* \otimes Q_{\alpha}^* = \mathcal{P}, \quad (3.20)$$

если выполняется условие $(C^{\alpha\beta})^* = \varepsilon_{\alpha\rho} \varepsilon_{\beta\sigma} C^{\rho\sigma}$. Из этого свойства вытекает вещественность скобки Пуассона:

$$(APB)^* = \mu \circ \mathcal{P}^*(B^* \otimes A^*) = B^* P A^*. \quad (3.21)$$

Билинейное отображение μ_* в $S_*(4|2, 2)$ может быть определено через оператор твиста

$$A \star B \equiv \mu_* \circ A \otimes B = \mu \circ e^{\mathcal{P}} A \otimes B. \quad (3.22)$$

По аналогии с отображением между дифференциальными операторами на коммутативной и некоммутативной алгебрах функций (2.11) мы можем легко определить отображение дифференциального оператора k -го порядка $D = \xi^{M_1 \dots M_k}(z) \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1}$ на суперкоммутативной алгебре $S(4|2, 2)$ в дифференциальный оператор $\hat{X}_D$ на $S_*(4|2, 2)$:

$$\begin{aligned} (DA) &= \mu \circ \xi^{M_1 \dots M_k} \otimes \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1} A = \mu_* \circ e^{-\mathcal{P}} \xi^{M_1 \dots M_k} \otimes \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1} A = \\ &= \xi^{M_1 \dots M_k} \star \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1} A + \frac{1}{2} (-1)^{p(D)} C^{\alpha\beta} Q_{\alpha} \xi^{M_1 \dots M_k} \star \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1} Q_{\beta} A - \\ &\quad - \frac{1}{32} C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} Q^2 \xi^{M_1 \dots M_k} \star \partial_{M_k} \dots \partial_{M_1} Q^2 A = (\hat{X}_D \star A), \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $p(D) - Z_2$ -четность оператора D . Оператор $\hat{X}_D$ включает производные порядков $k, k+1$ и $k+2$. Дифференциальные операторы на $S(4|2, 2)$ образуют ассоциативную алгебру, и отображение $D \rightarrow \hat{X}_D$ порождает изоморфную алгебру дифференциальных операторов на $S_*(4|2, 2)$:

$$(D_1 D_2 A) = (\hat{X}_{D_1} \star \hat{X}_{D_2} \star A). \quad (3.24)$$

В случае оператора первого порядка $\xi = \xi^M(z)\partial_M$ образ $\widehat{X}_\xi$ содержит в общем случае члены с производными первого, второго и третьего порядков на $S_\star(4|2,2)$:

$$\begin{aligned}(\hat{\partial}_M \star A) &= \partial_M A, & (\hat{\partial}_M \star z^N) &= \delta_M^N, \\(\widehat{X}_\xi \star A) &= (\xi A) = \mu_\star \circ e^{-\mathcal{P}}(\xi^M(z) \otimes \partial_M)(1 \otimes A) = \\&= \xi^M(z) \star \partial_M A + \frac{1}{2}(-1)^{p(\xi)} C^{\alpha\beta} Q_\alpha \xi^M(z) \star \partial_M Q_\beta A - \\&\quad - \frac{1}{32} C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} Q^2 \xi^M(z) \star \partial_M Q^2 A.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Некоммутативные образы операторов $\overline{Q}_\alpha$ и L_a^β (3.3) представляют собой следующие дифференциальные операторы второго порядка на $S_\star(4|2,2)$:

$$\begin{aligned}(\widehat{\overline{Q}}_\alpha \star A) &= (\bar{\partial}_\alpha - 2i\theta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + iC^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} Q_\beta) \star A = \overline{Q}_\alpha A, \\(\hat{L}_\alpha^\beta \star A) &= \left(L_\alpha^\beta - \frac{1}{2} C^{\beta\gamma} Q_\gamma Q_\alpha \right) \star A = L_\alpha^\beta A,\end{aligned}\tag{3.26}$$

тогда как операторы P_m , $R_{\dot{\alpha}}^\beta$ и O сохраняют свою форму при этом отображении, например

$$(OA) = (\theta^\alpha \partial_\alpha - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}}) \star A.\tag{3.27}$$

Дополнительный член в $\widehat{O}$ исчезает: $C^{\alpha\beta} Q_\alpha Q_\beta = 0$.

Выражение (3.23) включает дифференцирование и $\star$ -умножение в псевдолокальном представлении, однако по этой формуле можно определить действие соответствующего оператора $(\widehat{X}_D \star A) = w^{-1}[(\widehat{X}_D \star A)]$ на некоммутативных суперполях в произвольном представлении алгебры $S_\star(4|2,2)$. В операторном представлении нетрудно проверить ковариантность величины $T^{\alpha\beta}$ (3.12) относительно действия деформированных генераторов:

$$(\widehat{\overline{Q}}_\alpha \star T^{\alpha\beta}) = 0, \quad (\hat{L}_\sigma^\rho \star T^{\alpha\beta}) = \delta_\sigma^\alpha T^{\rho\beta} + \delta_\sigma^\beta T^{\alpha\rho} - \delta_\sigma^\rho T^{\alpha\beta}.\tag{3.28}$$

В соответствии с соотношением (3.24) деформированные генераторы на $S_\star(4|2,2)$ образуют супералгебру Ли, изоморфную недеформированной супералгебре Ли генераторов (3.3).

Копроизведение $\Delta_t(G) = e^{-\mathcal{P}} \Delta(G) e^{\mathcal{P}}$ в деформированной суперсимметрии $SUSY_t(1/2, 1/2)$ изменено на части генераторов:

$$\Delta_t(\overline{Q}_\epsilon) = \overline{Q}_\epsilon \otimes 1 + 1 \otimes \overline{Q}_\epsilon + i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \otimes Q_\beta - Q_\alpha \otimes \partial_{\beta\dot{\alpha}}),\tag{3.29}$$

$$\Delta_t(L_\lambda) = L_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes L_\lambda + \frac{1}{2} C^{\rho\sigma} (\lambda_\rho^\alpha Q_\alpha \otimes Q_\sigma + \lambda_\sigma^\alpha Q_\rho \otimes Q_\alpha),\tag{3.30}$$

$$\Delta_t(O) = O \otimes 1 + 1 \otimes O - C^{\alpha\beta} Q_\alpha \otimes Q_\beta.\tag{3.31}$$

На генераторах $R_{\dot{\alpha}}^\beta$, P_m и Q_α копроизведение не деформировано.

По определению действие $SUSY_t(1/2, 1/2)$ на примарном суперполе $\hat{A}$ в произвольном представлении порождается недеформированным преобразованием суперсимметрии суперкоммутативного образа $A(z)$:

$$\begin{aligned}\hat{\delta} \star A &= -(g + G)A = -(\hat{g} + \hat{G}) \star A, \\ \hat{\delta} \star \hat{A} &= w^{-1}[\hat{\delta} \star A] = -(\hat{g} + \hat{G}) \star \hat{A},\end{aligned}\tag{3.32}$$

где использованы связи между операторами и суперполями в различных представлениях.

Деформированное копроизведение $\Delta_t(G)$ в $SUSY_t(1/2, 1/2)$ определяет преобразования некоммутативного произведения в алгебре $S_*(4 | 2, 2)$:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \star (A \star B) &= -\mu_{\star} \circ \Delta_t(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}})A \otimes B = -(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}A) \star B - A \star \bar{Q}_{\bar{\epsilon}}B - \\ &\quad - i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\beta} [(-1)^{p(A)} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A \star Q_{\beta B} - Q_{\alpha} A \star \partial_{\beta\dot{\alpha}} B],\end{aligned}\tag{3.33}$$

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\lambda} \star (A \star B) &= -\mu_{\star} \circ \Delta_t(L_{\lambda})A \otimes B = -(L_{\lambda}A) \star B - A \star L_{\lambda}B - \\ &\quad - \frac{1}{2}(-1)^{p(A)} C^{\rho\sigma} (\lambda_{\rho}^{\alpha} Q_{\alpha} A \star Q_{\sigma} B + \lambda_{\sigma}^{\alpha} Q_{\rho} A \star Q_{\alpha} B),\end{aligned}\tag{3.34}$$

$$\hat{\delta}_a \star (A \star B) = -a(OA) \star B - aA \star (OB) + a(-1)^{p(A)} C^{\alpha\beta} Q_{\alpha} A \star Q_{\beta} B.\tag{3.35}$$

Появление членов с $C^{\alpha\beta}$ в преобразованиях $A \star B$ можно трактовать как деформацию правил Лейбница для $\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}$, $\hat{\delta}_{\lambda}$ и $\hat{\delta}_a$. Нетрудно показать, что из этих соотношений вытекает ковариантность некоммутативного произведения

$$\hat{\delta}_G \star (A \star B) = -G(A \star B),\tag{3.36}$$

которое преобразуется подобно примарным суперполям A и B (3.32) в $SUSY_t(1/2, 1/2)$. Например, формула $\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \star (A \star B) = -\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}(A \star B)$ получается из уравнения (3.33) с использованием соотношений

$$\begin{aligned}-\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}(A \star B) &= -[\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}, (Ae^P B)] = -(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}A)e^P B - A[\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}, e^P]B - Ae^P(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}B), \\ &\quad - A[\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}, e^P]B = -i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\beta} [(-1)^{p(A)} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A \star Q_{\beta B} - Q_{\alpha} A \star \partial_{\beta\dot{\alpha}} B].\end{aligned}\tag{3.37}$$

Отметим, что суперполе AB – нековариантная величина в $SUSY_t(1/2, 1/2)$. Например, нетрудно определить нековариантное действие операторов $\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}$ и $\hat{\delta}_{\lambda}$ на обычном произведении четных киральных суперполей:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \star (\phi_1 \phi_2) &\equiv -\mu \circ \Delta_t(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}})\phi_1 \otimes \phi_2 = -\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}(\phi_1 \phi_2) - i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} \phi_1 Q_{\beta} \phi_2 - \\ &\quad - Q_{\alpha} \phi_1 \partial_{\beta\dot{\alpha}} \phi_2) = \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}(a_1 a_2) + \theta^{\alpha} \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}(a_1 \psi_{2\alpha} + a_2 \psi_{1\alpha}) + O(\theta^2), \\ \hat{\delta}_{\lambda} \star (\phi_1 \phi_2) &\equiv -\mu \circ \Delta_t(L_{\lambda})\phi_1 \otimes \phi_2 = -\lambda_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(\phi_1 \phi_2) - \\ &\quad - \frac{1}{2} C^{\rho\sigma} (\lambda_{\rho}^{\alpha} Q_{\alpha} \phi_1 Q_{\sigma} \phi_2 + \lambda_{\sigma}^{\alpha} Q_{\rho} \phi_1 Q_{\alpha} \phi_2) = \hat{\delta}_{\lambda}(a_1 a_2) + O(\theta).\end{aligned}\tag{3.38}$$

Первые члены в этих формулах совпадают с преобразованиями недеформированной суперсимметрии. Используя θ -разложение этих суперполевых формул

$$\begin{aligned}\phi_i &= a_i + \theta^{\alpha} \psi_{i\alpha} + \theta^2 f_i, \\ Q_{\alpha} \phi_i &= \psi_{i\alpha} + 2\theta_{\alpha} f_i, \quad Q^2 \phi_i = -4f_i,\end{aligned}\tag{3.39}$$

можно получить деформированные преобразования произведений компонентных полей, например

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}(a_1 a_2) &= -i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} C^{\alpha\beta} (\partial_{\alpha\dot{\alpha}} a_1 \psi_{\beta 2} - \psi_{\alpha 1} \partial_{\beta\dot{\alpha}} a_2), \\ \hat{\delta}_{\lambda}(a_1 a_2) &= -\lambda_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(y)(a_1 a_2) - \frac{1}{2} C^{\rho\sigma} (\lambda_{\rho}^{\alpha} \psi_{\alpha 1} \psi_{\sigma 2} + \lambda_{\sigma}^{\alpha} \psi_{\rho 1} \psi_{\alpha 2}).\end{aligned}\quad (3.40)$$

Разложение $\star$ -произведения двух киральных суперполей по θ^{α} зависит от констант $C^{\alpha\beta}$:

$$\Phi_{12} = \phi_1 \star \phi_2 = \mathcal{B} + \theta^{\alpha} \Psi_{\alpha} + \theta^2 F, \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} &= a_1 a_2 - \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} \psi_{1\alpha} \psi_{2\beta} - \frac{1}{2} C^{\alpha\beta} C_{\alpha\beta} f_1 f_2, \\ \Psi_{\alpha} &= a_1 \psi_{2\alpha} + a_2 \psi_{1\alpha} - C_{\alpha\beta} (f_1 \psi_2^{\beta} - f_2 \psi_1^{\beta}), \\ F &= a_1 f_2 + a_2 f_1 - \frac{1}{2} \psi_1^{\alpha} \psi_{2\alpha}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

Эти соотношения порождают деформированное тензорное исчисление для перемножения киральных компонентных мультиплетов. Преобразования составных компонент (3.41) в деформированной суперсимметрии полностью аналогичны преобразованиям примарных компонентных полей a_i , $\psi_{\alpha i}$, f_i :

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \mathcal{B} &= 0, & \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \Psi_{\alpha} &= -2i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \mathcal{B}, & \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} F &= -i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \Psi^{\alpha}, \\ \hat{\delta}_{\lambda} \mathcal{B} &= -\lambda_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(y) \mathcal{B}, & \hat{\delta}_{\lambda} \Psi_{\gamma} &= \lambda_{\gamma}^{\alpha} \Psi_{\alpha} - \lambda_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(y) \Psi_{\gamma}, & \hat{\delta}_{\lambda} F &= -\lambda_{\beta}^{\alpha} L_{\alpha}^{\beta}(y) F.\end{aligned}\quad (3.43)$$

Эти преобразования совместны с нековариантными преобразованиями произведений компонент (3.40).

Неантикоммутативная деформация евклидовой модели с произвольным числом киральных (антикиральных) суперполей и калибровочных суперполей $V(z)$ использует $\star$ -произведения этих суперполей в суперполевым действии [9]. Каждый член $\star$ -полиномиального разложения этого действия по отдельности инвариантен относительно преобразований $SUSY_t(1/2, 1/2)$, а квадратичные члены инвариантны также относительно обычной суперсимметрии.

4. ДЕФОРМИРОВАННАЯ $N = (1, 1)$ СУПЕРСИММЕТРИЯ

Нильпотентные деформации евклидовой $N = (1, 1)$ суперсимметрии рассматривались в рамках формализма гармонического суперпространства [10], [11] с использованием $SU(2)/U(1)$ -гармоник $u_i^{\pm}$ и киральных координат суперпространства

$$z^M = (y_m, \theta_k^{\alpha}, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}), \quad y_m = x_m + i\theta_k \sigma_m \bar{\theta}^k, \quad (4.1)$$

где x_m – центральные $4D$ -координаты. Стандартное сопряжение этих координат меняет положение всех спинорных индексов:

$$\overline{y_m} = y_m, \quad \overline{\theta_k^{\alpha}} = \theta_k^k, \quad \overline{\bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}} = -\bar{\theta}_{\dot{\alpha}k}, \quad (4.2)$$

и, в частности, сохраняет инвариантность относительно $SU(2)$ -автоморфизмов, действующих на индекс k . В этом же суперпространстве можно определить альтернативное псевдосопряжение [10]

$$(y_m)^* = y_m, \quad (\theta_k^\alpha)^* = \theta_{\alpha k}, \quad (\bar{\theta}^{\dot{\alpha}k})^* = \bar{\theta}_{\dot{\alpha}}^k, \quad (4.3)$$

которое не меняет положения $SU(2)$ -индекса k . Спинорные производные D_α^k и $\bar{D}_{\dot{\alpha}k}$ в этих координатах имеют вид

$$D_\alpha^k = \partial_\alpha^k + 2i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}k}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}k} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}k}. \quad (4.4)$$

Четная часть гармонического суперпространства $\mathbb{R}^4 \times S^2$ имеет размерность $4+2$, удобно также отдельно обозначать левые и правые нечетные размерности грассмановых координат общего суперпространства $(4, 4)$, кирального суперпространства $(4, 0)$ и аналитического суперпространства $(2, 2)$, соответственно. Мы будем использовать обозначение $S(4, 2 | 4, 4)$ для суперкоммутативной алгебры общих гармонических суперполей и $S_\star(4, 2 | 4, 4)$ – для соответствующей неантикоммутативной алгебры.

Мы используем следующее представление генераторов $SUSY(1, 1)$ -суперсимметрии в виде дифференциальных операторов на алгебре $S(4, 2 | 4, 4)$:

$$\begin{aligned} T_l^k &= -\theta_l^\alpha \partial_\alpha^k + \frac{1}{2} \delta_l^k \theta_j^\alpha \partial_\alpha^j + \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}l} - \frac{1}{2} \delta_l^k \bar{\theta}^{\dot{\alpha}j} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}j} - u_l^\pm \partial^{\mp k} + \frac{1}{2} \delta_l^k u_j^\pm \partial^{\mp j}, \\ L_\alpha^\beta &= L_\alpha^\beta(y) + \theta_k^\beta \partial_\alpha^k - \frac{1}{2} \delta_\alpha^\beta \theta_k^\gamma \partial_\gamma^k, \quad R_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} = R_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}(y) + \bar{\theta}^{\dot{\beta}k} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}k} - \frac{1}{2} \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \bar{\theta}^{\dot{\gamma}k} \bar{\partial}_{\dot{\gamma}k}, \\ O &= \theta_k^\alpha \partial_\alpha^k - \bar{\theta}^{\dot{\alpha}k} \bar{\partial}_{\dot{\alpha}k}, \quad Q_\alpha^k = \partial_\alpha^k, \quad \bar{Q}_{\dot{\alpha}k} = \bar{\partial}_{\dot{\alpha}k} - 2i\theta_k^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad P_m = \partial_m, \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $L_\alpha^\beta(y)$ и $R_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}(y)$ определены выше (3.3), а частные производные удовлетворяют соотношениям

$$\partial_m y_n = \delta_{mn}, \quad \partial_\alpha^i \theta_k^\beta = \delta_k^i \delta_\alpha^\beta, \quad \bar{\partial}_{\dot{\alpha}i} \bar{\theta}^{\dot{\beta}k} = \delta_i^k \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad \partial^{\mp l} u_k^\pm = \delta_k^l. \quad (4.6)$$

Для изучения деформаций удобно разделить преобразования $SUSY(1, 1)$ на две части:

$$\delta_g A = -gA, \quad \delta_G A = -GA, \quad (4.7)$$

используя следующие комбинации генераторов и соответствующих параметров:

$$\begin{aligned} g &= P_c + R_\rho + Q_\epsilon, \quad G = T_u + L_\lambda + \bar{Q}_{\dot{\epsilon}} + aO, \\ P_c &= c_m P_m, \quad T_u = u_l^k T_k^l, \quad L_\lambda = \lambda_\beta^\alpha L_\alpha^\beta, \\ R_\rho &= \rho_\beta^{\dot{\alpha}} R_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}, \quad Q_\epsilon = \epsilon_k^\alpha Q_\alpha^k, \quad \bar{Q}_{\dot{\epsilon}} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} \bar{Q}_{\dot{\alpha}k}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналитические координаты гармонического суперпространства $(x_A, \theta^\pm, \bar{\theta}^\pm)$ определяются с помощью гармонических проекций грассмановых координат $\theta^{\pm\alpha} =$

$u_k^\pm \theta^{\alpha k}$ и $\bar{\theta}^{\pm \dot{\alpha}} = u_k^\pm \bar{\theta}^{\dot{\alpha} k}$. Соответствующее представление спинорных и гармонических производных можно найти в работах [10], [12]:

$$D_\alpha^+ = \partial_{-\alpha}, \quad D_\alpha^- = -\partial_{+\alpha} + 2i\bar{\theta}^{-\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad (4.9)$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}^+ = \bar{\partial}_{-\dot{\alpha}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}}^- = -\bar{\partial}_{+\dot{\alpha}} + 2i\theta^{-\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}},$$

$$D_A^{++} = \partial^{++} - 2i\theta^{+\alpha} \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} + \theta^{+\alpha} \partial_{-\alpha} + \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \bar{\partial}_{-\dot{\alpha}}, \quad (4.10)$$

где $\partial_{\pm\alpha} \equiv \partial/\partial\theta^{\pm\alpha}$, $\bar{\partial}_{\pm\dot{\alpha}} \equiv \partial/\partial\bar{\theta}^{\pm\dot{\alpha}}$.

$N = (1, 1)$ оператор твиста $\mathcal{F} = e^{\mathcal{P}}$ содержит нильпотентный оператор

$$\mathcal{P} = -\frac{1}{2} C_{kl}^{\alpha\beta} Q_\alpha^k \otimes Q_\beta^l, \quad \mathcal{P}^5 = 0, \quad (4.11)$$

где $C_{kl}^{\alpha\beta}$ – константы деформации. Оператор $\mathcal{P}$ эрмитов по отношению к сопряжению, построенному на основе транспонирования и сопряжения (4.2):

$$\overline{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2} \overline{C_{kl}^{\alpha\beta}} \overline{Q_\beta^l} \otimes \overline{Q_\alpha^k} = \mathcal{P}, \quad \overline{Q_\alpha^k} = \varepsilon^{\alpha\rho} \varepsilon_{kj} Q_\rho^j, \quad (4.12)$$

если выполняются условия $\overline{C_{kl}^{\alpha\beta}} = \varepsilon_{\alpha\rho} \varepsilon_{\beta\sigma} \varepsilon^{ki} \varepsilon^{lj} C_{ij}^{\rho\sigma}$.

Действие оператора $\mathcal{P}$ на тензорном произведении суперполей A и B согласовано с Z_2 -градуировкой:

$$\mathcal{P}A \otimes B = -\frac{1}{2} (-1)^{p(A)} C_{kl}^{\alpha\beta} Q_\alpha^k A \otimes Q_\beta^l B. \quad (4.13)$$

Неантикоммутативное умножение в соответствующей деформированной алгебре $S_\star(4, 2 | 4, 4)$ можно определить с помощью эквивалентных формул

$$A \star B = A e^{\mathcal{P}} B = \mu \circ e^{\mathcal{P}} A \otimes B = \mu_\star \circ A \otimes B, \quad (4.14)$$

где μ и $\mu_\star$ – билинейные отображения для $S(4, 2 | 4, 4)$ и $S_\star(4, 2 | 4, 4)$, а $\mathcal{P}$ – бидифференциальный оператор из работ [10], [11]

$$APB = -\frac{1}{2} (-1)^{p(A)} C_{kl}^{\alpha\beta} Q_\alpha^k A Q_\beta^l B = \mu \circ \mathcal{P}A \otimes B. \quad (4.15)$$

Неантикоммутативные алгебры $N = (1, 1)$ киральных или аналитических суперполей определяются как подалгебры $S_\star(4, 2 | 4, 4)$ с использованием суперполевых связей

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}k} B = 0 \quad \text{или} \quad (D_\alpha^+, \bar{D}_{\dot{\alpha}}^+) \Lambda = 0, \quad (4.16)$$

которые сохраняются оператором деформации $e^{\mathcal{P}}$.

По аналогии с уравнением (3.23) каждому дифференциальному оператору на алгебре $S(4, 2 | 4, 4)$ можно поставить в соответствие оператор на некоммутативной алгебре $S_\star(4, 2 | 4, 4)$, например

$$\begin{aligned} \widehat{Q}_{\dot{\alpha}k} \star A &= \overline{Q}_{\dot{\alpha}k} A, \\ \widehat{Q}_{\dot{\alpha}k} &= \bar{\partial}_{\dot{\alpha}k} - 2i\theta_k^\alpha \star \partial_{\alpha\dot{\alpha}} - C_{kl}^{\alpha\beta} \partial_\beta^l \partial_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

В твист-деформированной суперсимметрии $SUSY_t(1,1)$ мы можем использовать стандартное представление генераторов (4.5) на примарных суперполях.

Деформированное копроизведение в $SUSY_t(1,1)$ $\Delta_t(\mathcal{G}) = e^{-\mathcal{P}} \Delta(\mathcal{G}) e^{\mathcal{P}}$ легко вычислить на следующих генераторах:

$$\begin{aligned}\Delta_t(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}) &= \bar{Q}_{\bar{\epsilon}} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{Q}_{\bar{\epsilon}} + i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} C_{kj}^{\alpha\beta} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \otimes Q_{\beta}^j - i\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} C_{ik}^{\alpha\beta} Q_{\alpha}^i \otimes \partial_{\beta\dot{\alpha}}, \\ \Delta_t(T_u) &= T_u \otimes 1 + 1 \otimes T_u - \frac{1}{2} u_k^l C_{lj}^{\alpha\beta} Q_{\alpha}^k \otimes Q_{\beta}^j - \frac{1}{2} u_k^l C_{jl}^{\alpha\beta} Q_{\alpha}^j \otimes Q_{\beta}^k, \\ \Delta_t(L_{\lambda}) &= L_{\lambda} \otimes 1 + 1 \otimes L_{\lambda} + \frac{1}{2} \lambda_{\beta}^{\alpha} C_{kl}^{\beta\gamma} Q_{\alpha}^k \otimes Q_{\gamma}^l + \frac{1}{2} \lambda_{\beta}^{\alpha} C_{kl}^{\rho\beta} Q_{\rho}^k \otimes Q_{\alpha}^l, \\ \Delta_t(O) &= O \otimes 1 + 1 \otimes O - C_{kl}^{\alpha\beta} Q_{\alpha}^k \otimes Q_{\beta}^l.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Для оператора $g = Q_{\epsilon} + P_c + R_{\rho}$ деформация копроизведения исчезает: $e^{-\mathcal{P}} \Delta(g) e^{\mathcal{P}} = 1 \otimes g + g \otimes 1$.

Некоммутативные $\star$ -произведения $N = (1,1)$ суперполей сохраняют ковариантность по отношению к деформированным преобразованиям $SUSY_t(1,1)$:

$$\hat{\delta}_G \star (A \star B) = -\mu_{\star} \circ \Delta_t(G) A \otimes B = -G(A \star B).\tag{4.19}$$

Деформированные правила Лейбница для $\star$ -произведений выводятся из формул (4.18), например

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \star (A \star B) &= -\mu_{\star} \circ \Delta_t(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}) A \otimes B = \\ &= -(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}} A) \star B + A \star (\bar{Q}_{\bar{\epsilon}} B) - i(-1)^{p(A)} C_{kj}^{\alpha\beta} \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A \star Q_{\beta}^j B + \\ &\quad + i C_{ik}^{\alpha\beta} \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} Q_{\alpha}^i A \star \partial_{\beta\dot{\alpha}} B = -\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}(A \star B).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Преобразование $\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}$ действует нековариантно на суперкоммутативном произведении суперполей:

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_{\bar{\epsilon}} \star (AB) &= -\mu \circ \Delta_t(\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}) A \otimes B = -\bar{Q}_{\bar{\epsilon}}(AB) - \\ &\quad - i(-1)^{p(A)} C_{kj}^{\alpha\beta} \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} A Q_{\beta}^j B + i C_{ik}^{\alpha\beta} \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} Q_{\alpha}^i A \partial_{\beta\dot{\alpha}} B.\end{aligned}\tag{4.21}$$

Нетрудно определить деформацию преобразований произведений $N = (1,1)$ компонентных полей, используя соответствующие грассмановы разложения суперполевых преобразований.

В специальном случае синглетной деформации [12], [13] оператор твиста содержит параметр I и $SU(2) \times SU(2)_L$ -инвариантный постоянный тензор

$$C_{kl}^{\alpha\beta} = 2I \varepsilon^{\alpha\beta} \varepsilon_{kl} \Rightarrow \mathcal{P}_s = -I Q_{\alpha}^i \otimes Q_i^{\alpha}.\tag{4.22}$$

Деформация, соответствующая $\mathcal{P}_s$ -оператору, исчезает на генераторах $SU(2)$ - и $SU(2)_L$ -преобразований и остается только для $N = (0,1)$ и $O(1,1)$ -генераторов:

$$\begin{aligned}\Delta_t(\bar{Q}_{\dot{\alpha}k}) &= \bar{Q}_{\dot{\alpha}k} \otimes 1 + 1 \otimes \bar{Q}_{\dot{\alpha}k} + 2iI \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \otimes Q_k^{\alpha} - 2iI Q_k^{\alpha} \otimes \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ \Delta_t(O) &= O \otimes 1 + 1 \otimes O - 2I Q_k^{\alpha} \otimes Q_k^{\alpha}.\end{aligned}\tag{4.23}$$

Вырожденной $N = (1, 1/2)$ деформации (см. работу [10]) соответствует использование оператора твиста $\mathcal{F}_{\text{deg}} = e^{\mathcal{P}_{\text{deg}}}$, где оператор

$$\mathcal{P}_{\text{deg}} = -\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}Q_\alpha^2 \otimes Q_\beta^2 \quad (4.24)$$

эрмитов по отношению к альтернативному псевдосопряжению (4.3):

$$(Q_\alpha^k)^* = Q^{\alpha k}, \quad (\bar{Q}^{\dot{\alpha}k})^* = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^k, \quad (C^{\alpha\beta})^* = C_{\alpha\beta}. \quad (4.25)$$

В этом случае копроизведение Δ_t деформировано на генераторах $\bar{Q}_{\dot{\alpha}2}$, L_α^β , O и T_k^l .

В работе [18] рассматривалась деформация $S(4, 2 | 4, 4)$, действующая одновременно в киральном и антикиральном секторах суперпространства с использованием псевдосопряжения (4.3). Эта деформация соответствует оператору твиста $\hat{\mathcal{F}} = e^{\hat{\mathcal{P}}}$,

$$\hat{\mathcal{P}} = -\frac{1}{2}C^{\alpha\beta}Q_\alpha^2 \otimes Q_\beta^2 - \frac{1}{2}\bar{C}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{Q}_{\dot{\alpha}1} \otimes \bar{Q}_{\dot{\beta}1} - B^{\alpha\dot{\alpha}}(Q_\alpha^2 \otimes \bar{Q}_{\dot{\alpha}1} + \bar{Q}_{\dot{\alpha}1} \otimes Q_\alpha^2). \quad (4.26)$$

Интересно отметить, что аналогичный оператор твиста можно применять для деформации $N = 2$, $D = (3, 1)$ суперпространства на основе пространства Минковского. В этом случае эрмитовость $\hat{\mathcal{P}}$ возможна, если использовать альтернативное сопряжение в центральных координатах $N = 2$, $D = (3, 1)$ суперпространства

$$(x^m)^\dagger = x^m, \quad (\theta_k^\alpha)^\dagger = \bar{\theta}_k^{\dot{\alpha}}, \quad (\bar{\theta}_k^{\dot{\alpha}})^\dagger = \theta_k^\alpha, \quad (4.27)$$

которое нарушает группу автоморфизмов $SU(2)$, но совместно с ковариантным сопряжением спиноров в группе $SL(2, \mathbb{C})$ ³⁾. Оператор (4.26) деформирует копроизведение на генераторах $SL(2, \mathbb{C})$, $U(2)$, Q_α^1 и $\bar{Q}_{\dot{\alpha}2}$.

Дифференциальные операторы $(\partial_m, D_\alpha^k, \bar{D}_{\dot{\alpha}k}, \partial/\partial u_k^\pm)$ удовлетворяют стандартному правилу Лейбница для всех рассмотренных нильпотентных деформаций.

Рассмотрим примарные аналитические суперполя гипермультиплета q^+ , $\tilde{q}^+$ и калибровочного мультиплета V^{++} [10], [11], которые имеют следующие некоммутативные калибровочные преобразования:

$$\delta_\Lambda V^{++} = D^{++}\Lambda + [V^{++}, \Lambda]_\star, \quad \delta_\Lambda q^+ = [q^+, \Lambda]_\star, \quad (4.28)$$

где Λ – суперполевой калибровочный параметр. Эти суперполя и их $\star$ -произведения преобразуются ковариантно в деформированной суперсимметрии $SUSY_t(1, 1)$:

$$\hat{\delta}_G \star [V^{++}(z, u_1) \star V^{++}(z, u_2)] = -G[V^{++}(z, u_1) \star V^{++}(z, u_2)], \quad (4.29)$$

$$\hat{\delta}_G \star (V^{++} \star q^+) = -G(V^{++} \star q^+), \quad (4.30)$$

где генераторы G заданы уравнениями (4.8) или эквивалентными соотношениями в аналитических координатах.

Калибровочное действие V^{++} определено в полном или киральном суперпространствах [10]–[12]. В произвольной калибровке это действие явно инвариантно

³⁾Следует сказать, что на $SU(2)$ -инвариантных величинах альтернативное и обычное сопряжения действуют одинаково.

относительно преобразований $SUSY_t(1, 1)$. В аналитическом суперпространстве суперполе действие гипермультиплетов содержит интеграл по мере $d^4x_A(D^-)^4$, а простой пример аналитической суперполевой плотности имеет вид

$$L_\star^{+4} = \tilde{q}^+ \star (D^{++}q^+ + [V^{++}, q^+]_\star) + \lambda q^+ \star q^+ \star \tilde{q}^+ \star \tilde{q}^+. \quad (4.31)$$

Деформированные преобразования этой суперполевой плотности ковариантны в произвольной калибровке V^{++} :

$$(\hat{\delta}_\epsilon + \hat{\delta}_u + \hat{\delta}_l + \hat{\delta}_a) \star L_\star^{+4} = (\bar{\epsilon}^{\dot{\alpha}k} \bar{Q}_{\dot{\alpha}k} + u_k^l T_l^k + l_\beta^\alpha L_a^\beta + aO) L_\star^{+4}, \quad (4.32)$$

поэтому интеграл по аналитическому суперпространству от этих вариаций исчезает. Таким образом, все суперполевые действия, использующие $\star$ -произведения в неантикоммутативном $N = (1, 1)$ гармоническом суперпространстве [12], [13], инвариантны относительно преобразований деформированной суперсимметрии $SUSY_t(1, 1)$. Свободные квадратичные члены в этих теориях сохраняют также недеформированную $N = (1, 1)$ суперсимметрию.

В калибровке Весса–Зумино (ВЗ) калибровочное суперполе определяет компонентные поля векторного мультиплета

$$\begin{aligned} V_{\text{ВЗ}}^{++} = & (\theta^+)^2 \bar{\phi}(x_A) + (\bar{\theta}^+)^2 \phi(x_A) + 2(\theta^+ \sigma_m \bar{\theta}^+) A_m(x_A) + 4(\bar{\theta}^+)^2 \theta^{+\alpha} u_k^- \Psi_\alpha^k(x_A) + \\ & + 4(\theta^+)^2 \bar{\theta}_\alpha^+ u_k^- \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}k}(x_A) + 3(\theta^+)^2 (\bar{\theta}^+)^2 u_k^- u_l^- D^{kl}(x_A). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Преобразования $SUSY_t(1, 1)$ величины $V_{\text{ВЗ}}^{++}$ содержат стандартные члены с генераторами суперсимметрии (4.8), дополненные композитными калибровочными преобразованиями

$$(\hat{\delta}_\epsilon + \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}) \star V_{\text{ВЗ}}^{++} = -(Q_\epsilon + \bar{Q}_{\bar{\epsilon}}) V_{\text{ВЗ}}^{++} - D^{++}(\Lambda_\epsilon + \Lambda_{\bar{\epsilon}}) - [V^{++}, (\Lambda_\epsilon + \Lambda_{\bar{\epsilon}})]_\star, \quad (4.34)$$

где генераторы $N = (1, 1)$ суперсимметрии рассматриваются в аналитических координатах:

$$\begin{aligned} Q_\alpha^k &= -u^{+k} \partial_{+\alpha} - u^{-k} \partial_{-\alpha} + 2iu^{-k} \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \\ \bar{Q}_{\dot{\alpha}k} &= u_k^+ \bar{\partial}_{+\dot{\alpha}} + u_k^- \bar{\partial}_{-\dot{\alpha}} + 2iu_k^- \theta^{+\alpha} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Композитные параметры $N = (1, 1)$ преобразований в ВЗ-калибровке имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \Lambda_\epsilon &= 2\epsilon^{-\alpha} [\theta_\alpha^+ \bar{\phi} + \bar{\theta}^{+\dot{\alpha}} A_{\alpha\dot{\alpha}} + u_l^- (\bar{\theta}^+)^2 \Psi_\alpha^l + 2u_l^- \theta_\alpha^+ \bar{\theta}_\alpha^+ \bar{\Psi}^{\dot{\alpha}l} + u_l^- u_j^- \bar{\theta}_\alpha^+ (\bar{\theta}^+)^2 D^{lj}], \\ \Lambda_{\bar{\epsilon}} &= 2\bar{\epsilon}^{-\dot{\alpha}} [\bar{\theta}_\alpha^+ \phi + \theta^{+\alpha} A_{\alpha\dot{\alpha}} + u_l^- (\theta^+)^2 \bar{\Psi}_\alpha^{\dot{l}} + 2u_l^- \bar{\theta}_\alpha^+ \theta^{+\alpha} \Psi_\alpha^l + u_l^- u_j^- \bar{\theta}_\alpha^+ (\theta^+)^2 D^{lj}], \end{aligned} \quad (4.36)$$

где $\epsilon^{-\alpha} = \epsilon^{\alpha k} u_k^-$ и $\bar{\epsilon}^{-\dot{\alpha}} = \bar{\epsilon}^{\dot{\alpha} k} u_k^-$. Деформированные преобразования компонент векторного мультиплета определяются из грассманова разложения преобразования $V_{\text{ВЗ}}^{++}$ (4.34). Эти преобразования содержат нелинейные калибровочные члены. Преобразования $SUSY_t(1, 1)$ для гипермультиплетов в ВЗ-калибровке согласованы с преобразованием $V_{\text{ВЗ}}^{++}$:

$$(\hat{\delta}_\epsilon + \hat{\delta}_{\bar{\epsilon}}) \star q^+ = -(Q_\epsilon + \bar{Q}_{\bar{\epsilon}}) q^+ + [q^+, (\Lambda_\epsilon + \Lambda_{\bar{\epsilon}})]_\star. \quad (4.37)$$

Дополнительные члены с Λ_ϵ и $\Lambda_{\bar{\epsilon}}$ не нарушают $SUSY_t(1,1)$ -инвариантности действия в силу калибровочной симметрии.

Синглетная D -деформация $N = (1, 1)$ суперсимметрии рассматривалась в работах [10], [11]. Эта деформация соответствует альтернативному синглетному оператору твиста, построенному с помощью спинорных производных D_α^k :

$$(A \star B)_D = \mu \circ e^{\mathcal{P}_D} A \otimes B, \quad \mathcal{P}_D = -JD_\alpha^k \otimes D_k^\alpha, \quad (4.38)$$

где J – некоторая константа. Теперь правила Лейбница для некоммутативного произведения деформированы для оператора $\bar{D}_{\dot{\alpha}k}$:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{\dot{\alpha}k}(A \star B)_D &= (\bar{D}_{\dot{\alpha}k}A \star B)_D + (-1)^{p(A)}(A \star \bar{D}_{\dot{\alpha}k}B)_D - \\ &\quad - 2iJ(-1)^{p(A)}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}A \star D_k^\alpha B - 2iJD_k^\alpha A \star \partial_{\alpha\dot{\alpha}}B, \end{aligned} \quad (4.39)$$

и для генератора $O(1, 1)$, однако для остальных генераторов $SUSY(1, 1)$ и спинорной производной D_α^k эта деформация исчезает.

Синглетный оператор $\mathcal{P}_D$ (4.38) не сохраняет киральности, но сохраняет антикиральность и грассманову аналитичность. D -деформация интересна для общих суперполевых объектов суперполевой геометрии в $N = (1, 1)$ калибровочной теории [11].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нами проведен анализ t -деформаций евклидовых $N = (1/2, 1/2)$ и $N = (1, 1)$ суперсимметрий с использованием операторов твиста, зависящих от левых генераторов суперсимметрии. В этом подходе деформируется копроизведение в универсальной обертывающей алгебре суперсимметрии, а супералгебра Ли остается недеформированной. В псевдолокальном представлении деформированная суперсимметрия ковариантно реализована на некоммутативных $\star$ -произведениях примарных суперполей, тогда как преобразования t -суперсимметрии на суперкоммутативном произведении суперполей зависят от параметров деформации. Построено отображение дифференциальных операторов в обычном суперпространстве в дифференциальные операторы в произвольном представлении деформированных некоммутативных суперполей. В этом представлении часть генераторов t -суперсимметрии реализована дифференциальными операторами второго порядка, поэтому становится очевидным, что соответствующие преобразования $\star$ -произведения не удовлетворяют обычному правилу Лейбница.

Ковариантность $\star$ -произведения и инвариантность суперполевого действия, использующего это произведение, являются главными принципами суперполевого формализма t -деформированных теорий. Билинейные свободные члены деформированного действия инвариантны также относительно обычной суперсимметрии. Константы деформации неантикоммутативных суперполевых теорий нарушают некоторые исходные (супер)симметрии, однако эти константы совместны с деформированными суперсимметриями. При исследовании перенормируемости деформированных суперсимметричных теорий необходимо использовать инвариантность суперполевого формализма по отношению к t -суперсимметрии. Формализм деформаций

может рассматриваться как интересный аналог механизма спонтанного нарушения (супер)симметрии, если деформация не разрушает хороших квантовых свойств суперсимметричных полевых теорий.

Благодарности. Автор признателен П.П. Кулишу за стимулирующие обсуждения деформаций симметрий в некоммутативной теории поля. Эта работа частично поддержана DFG (грант 436 RUS 113/669-2), РФФИ (гранты № 03-02-17440 и № 04-02-04002), НАТО (грант PST.GLG.980302) и Программами Гейзенберг–Ландау и Вотруба–Блохинцев.

Список литературы

- [1] M. R. Douglas, N. A. Nekrasov, *Rev. Mod. Phys.*, **73** (2001), 977; R. J. Szabo, *Phys. Rep.*, **378** (2003), 207; N. Seiberg, E. Witten, *JHEP*, **9909** (1999), 032.
- [2] R. Oeckl, *Nucl. Phys. B*, **581** (2000), 559.
- [3] M. Chaichian, P. P. Kulish, K. Nishijima, A. Tureanu, *Phys. Lett. B*, **604** (2004), 98; M. Chaichian, P. Presnajder, A. Tureanu, *Phys. Rev. Lett.*, **94** (2005), 151602.
- [4] J. Wess, *Deformed coordinate spaces; derivatives*, [hep-th/0408080](#); P. Aschieri, C. Blohmann, M. Dimitrijevic, F. Meyer, P. Schupp, J. Wess, *Class. Q. Grav.*, **22** (2005), 3511.
- [5] P. Kosiński, P. Maślanka, *Lorentz-invariant interpretation of noncommutative space-time – global version*, [hep-th/0408100](#).
- [6] P. Podleś, S. L. Woronowicz, *Commun. Math. Phys.*, **178** (1996), 61; O. Ogievetsky, W. B. Schmidke, J. Wess, B. Zumino, *Commun. Math. Phys.*, **150** (1992), 495; J. Lukierski, H. Ruegg, V. N. Tolstoy, A. Nowicki, *J. Phys. A*, **27** (1994), 2389.
- [7] В. Г. Дринфельд, *Алгебра и анализ*, **1:6** (1989), 114.
- [8] S. Ferrara, M. A. Lledó, *JHEP*, **0005** (2000), 008; D. Klemm, S. Penati, L. Tamassia, *Class. Q. Grav.*, **20** (2003), 2905.
- [9] N. Seiberg, *JHEP*, **0306** (2003), 010.
- [10] E. Ivanov, O. Lechtenfeld, B. Zupnik, *JHEP*, **0402** (2004), 012.
- [11] S. Ferrara, E. Sokatchev, *Phys. Lett. B*, **579** (2004), 226.
- [12] S. Ferrara, E. Ivanov, O. Lechtenfeld, E. Sokatchev, B. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **704** (2005), 154.
- [13] E. Ivanov, O. Lechtenfeld, B. Zupnik, *Nucl. Phys. B*, **707** (2005), 69.
- [14] Y. Kobayashi, S. Sasaki, *Int. J. Mod. Phys. A*, **20** (2005), 7175; [hep-th/0410164](#).
- [15] P. Kosinski, J. Lukierski, P. Maslanka, J. Sobczyk, *J. Phys. A*, **27** (1994), 6827; *J. Math. Phys.*, **37** (1996), 3041.
- [16] B. M. Zupnik, *Phys. Lett. B*, **627** (2005), 208; [hep-th/0506043](#).
- [17] P. P. Kulish, “Noncommutative geometry and quantum field theory”, *Noncommutative geometry in mathematical physics*, *Contemp. Math.*, **391**, 213; M. Ihl, C. Sämann, *JHEP*, **0601** (2006), 065; [hep-th/0506057](#).
- [18] Е. А. Иванов, Б. М. Зупник, *ТМФ*, **142** (2005), 235.

Поступила в редакцию 2.IX.2005 г.