Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Цейтлин, Квантование $N = 2$ суперсимметричной иерархии КдФ, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 2, 303–314

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1965>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 13:41:40

© 2006 г.

А. М. Цейтлин*

КВАНТОВАНИЕ $N = 2$ СУПЕРСИММЕТРИЧНОЙ ИЕРАРХИИ КдФ

Продолжено изучение процедуры квантования суперсимметричных интегрируемых иерархий КдФ. Рассмотрена $N = 2$ суперсимметричная система КдФ, базирующаяся на аффинной супералгебре $sl^{(1)}(2|1)$ с новой алгебраической конструкцией L -оператора, отличной от стандартной редукции Дринфельда–Соколова. Построена квантовая матрица монодромии, удовлетворяющая специальной версии уравнения отражения и показано, что в классическом пределе этот объект дает в точности матрицу монодромии $N = 2$ суперсимметричной системы КдФ. Показано, что как на квантовом, так и на классическом уровне след матрицы монодромии (трансфер-матрица) инвариантен относительно двух суперпреобразований и нулевой моды соответствующего $U(1)$ -тока.

Ключевые слова: суперконформная теория поля, квантовые супералгебры, суперсимметричное уравнение КдФ, интегрируемые суперсимметричные системы, квантование.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих работах [1]–[3] мы рассматривали квантование иерархий Дринфельда–Соколова, связанных с аффинными алгебрами, в соответствии с подходом, предложенным в [4] для обычной $\widehat{sl}(2)$ -модели КдФ. В этой статье мы расширяем этот подход для нестандартных иерархий КдФ, связанных с аффинными супералгебрами $sl^{(1)}(m+1|m)$. Мы подробно рассматриваем $N = 2$ суперсимметричную модель КдФ ($N = 2$ СУСИ-КдФ-модель), построенную с помощью супералгебры $sl^{(1)}(2|1)$, при этом все конструкции прямо обобщаются на случай старшего ранга. Интерес к таким интегрируемым моделям вызван тем, что процедура квантования становится более содержательной по сравнению со стандартными иерархиями Дринфельда–Соколова.

Для того чтобы приступить к квантованию данной модели, мы начинаем с соответствующей классической теории (см. раздел 2). Классическая версия ассоциированной матрицы монодромии представлена посредством известной Р-экспоненты, но ее показатель состоит не только из генераторов, соответствующих простым корням и их квадратичным комбинациям, но также из генераторов, соответствующих

*Санкт-Петербургское отделение математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: zam@math.ipme.ru

более сложным составным корням. Мы доказываем, что, как в “стандартном” случае, все члены, соответствующие составным корням, исчезают из первой итерации квантового обобщения Р-экспоненты; кроме того, мы показываем, что эта квантовая Р-экспонента совпадает с редуцированной универсальной R -матрицей, связанной с квантовой супералгеброй $\widehat{sl}_q(2|1)$ (см. разделы 3, 4). Мы также доказываем, что суперследа квантовой версии матрицы монодромии, так называемые трансформатрицы (по очевидной аналогии с решеточным случаем), коммутируют с генераторами суперсимметрии. Следовательно, эти генераторы могут быть включены в семейство интегралов движения как на классическом, так и на квантовом уровне (см. раздел 5). В разделе 5 мы обсуждаем связь $N = 2$ СУСИ-КдФ-модели с топологическими теориями и их интегрируемыми возмущениями.

2. НЕСТАНДАРТНАЯ ФОРМА ИЕРАРХИИ $N = 2$ СУСИ-КдФ-МОДЕЛИ

Матричный L -оператор для $N = 2$ СУСИ-КдФ-модели имеет следующий явный вид [5]:

$$\mathcal{L}_F = D - \begin{pmatrix} D\Phi_1 & 1 & 0 \\ \lambda & D\Phi_1 - D\Phi_2 & 1 \\ \lambda D(\Phi_1 - \Phi_2) & \lambda & -D\Phi_2 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $D = \partial_\theta + \theta \partial_u$, u – переменная на цилиндре с окружностью 2π , θ – грассманово число, а $\Phi_j(u, \theta) = \phi_j(u) - (i/\sqrt{2})\theta\xi_j(u)$, $j = 1, 2$, являются суперполями со следующими скобками Пуассона:

$$\begin{aligned} \{D_{u_1, \theta_1} \Phi_j(u_1, \theta_1), D_{u_2, \theta_2} \Phi_j(u_2, \theta_2)\} &= 0, \quad j = 1, 2, \\ \{D_{u_1, \theta_1} \Phi_1(u_1, \theta_1), D_{u_2, \theta_2} \Phi_2(u_2, \theta_2)\} &= -D_{u_1, \theta_1}(\delta(u_1 - u_2)(\theta_1 - \theta_2)). \end{aligned} \quad (2)$$

Оператор (1) есть нечетный L -оператор, связанный с аффинной супералгеброй $sl^{(1)}(2|1)$ (элементы в столбце вектора представления градуированы сверху вниз в следующем порядке: четный, нечетный, четный). Существует еще один (канонический) L -оператор, также соответствующий $N = 2$ СУСИ-КдФ-модели, связанный с супералгеброй $sl^{(1)}(2|2)$ [6]. Квантование этой реализации, соответствующей более высокому рангу, может быть осуществлено посредством процедуры, намеченной в [2], [3], и ничего нового по сравнению с [1]–[3] не добавляет, более того, теория представлений соответствующей супералгебры $sl^{(1)}(2|2)$ достаточно сложна как в классическом, так и в квантовом случае.

Предъявленная форма L -оператора, соответствующая более низкому рангу, позволяет работать с более простой теорией представлений супералгебры $sl^{(1)}(2|1)$ и, кроме того, дает возможность увидеть новые интересные аспекты формализма квантования.

Для построения скалярного L -оператора, связанного с матричным, рассмотрим линейную задачу $\mathcal{L}\Psi = 0$ и выразим второй и третий элементы в векторе Ψ в терминах первого (верхнего). Линейное уравнение для этого элемента имеет следующий вид:

$$((D + D\Phi_1)(D - D(\Phi_1 - \Phi_2))(D - D\Phi_2) + 2\lambda D)\Psi_1 = 0. \quad (3)$$

Таким образом, мы получаем скалярный L -оператор

$$L = D^3 + (\mathcal{V} + 2\lambda)D + \mathcal{U}, \quad (4)$$

где преобразование Миуры задано следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} \mathcal{V} &= -D\Phi_2 D\Phi_1 + \partial\Phi_2 - \partial\Phi_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\theta(\alpha^+ - \alpha^-) + V, \\ \mathcal{U} &= -\partial\Phi_2 D\Phi_1 - D\partial\Phi_1 = \theta U + \frac{i}{\sqrt{2}}\alpha^+, \\ U &= -\phi'_1\phi'_2 - \frac{1}{2}\xi_1\xi'_2 - \phi''_1, \quad V = \phi'_2 - \phi'_1 + \frac{1}{2}\xi_2\xi_1, \\ \alpha^+ &= \xi_1\phi'_2 + \xi'_1, \quad \alpha^- = \xi_2\phi'_1 + \xi'_2, \end{aligned} \quad (5)$$

причем $U, V, \alpha^\pm$ удовлетворяют $N = 2$ суперконформной алгебре со скобками Пуассона

$$\begin{aligned} \{U(u), \alpha^+(v)\} &= -\alpha'^+(u)\delta(u-v) - 2\alpha^+(u)\delta'(u-v), \\ \{U(u), \alpha^-(v)\} &= -\alpha^-(u)\delta'(u-v), \\ \{\alpha^+(u), \alpha^-(v)\} &= -2U(u)\delta(u-v) - 2V(u)\delta'(u-v) - 2\delta''(u-v), \\ \{V(u), \alpha^+(v)\} &= -\alpha^+(u)\delta(u-v), \quad \{V(u), \alpha^-(v)\} = \alpha^-(u)\delta(u-v), \\ \{U(u), V(v)\} &= -V(u)\delta'(u-v), \quad \{V(u), V(v)\} = -2\delta'(u-v), \\ \{U(u), U(v)\} &= -U'(u)\delta(u-v) - 2U(u)\delta'(u-v). \end{aligned} \quad (6)$$

Теперь перепишем матричный L -оператор в алгебраической форме

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F &= D - (h_{\alpha_1}D\Phi_1 + h_{\alpha_2}D\Phi_2 + e_{\alpha_1} + e_{\alpha_2} + [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] + \\ &+ [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] + D(\Phi_1 - \Phi_2)e_{\alpha_0}), \end{aligned} \quad (7)$$

где $h_{\alpha_i}, e_{\alpha_i}$ – генераторы верхней подалгебры Бореля $sl^{(1)}(2|1)$ со следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned} [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] &= \delta_{i,j}h_{\alpha_i}, \quad i, j = 0, 1, 2; \\ [h_{\alpha_j}, e_{\pm\alpha_i}] &= \pm e_{\pm\alpha_i}, \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j; \\ [h_{\alpha_i}, e_{\pm\alpha_0}] &= \mp e_{\pm\alpha_0}, \quad [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha_i}] = \mp e_{\pm\alpha_i}, \quad i = 1, 2; \\ [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha_0}] &= \pm 2e_{\pm\alpha_0}; \quad [h_{\alpha_i}, e_{\pm\alpha_i}] = 0, \quad i = 1, 2; \\ \text{ad}_{e_{\pm\alpha_i}}^2 e_{\pm\alpha_j} &\equiv [e_{\pm\alpha_i}, [e_{\pm\alpha_i}, e_{\pm\alpha_j}]] = 0, \quad i, j = 0, 1, 2; \\ [e_{\pm\alpha_k}, e_{\pm\alpha_k}] &= 0, \quad k = 1, 2. \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь $e_{\pm\alpha_i}$ – нечетные генераторы для $i = 1, 2$ и четные генераторы для $i = 0$, а $[\cdot, \cdot]$ обозначает суперкоммутатор.

Симметризованная матрица Картана с элементами $b_{ij} = (\alpha_i, \alpha_j)$, соответствующая данной алгебре, имеет следующий вид:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

В этой работе мы будем использовать только так называемые “evaluation”-представления, т.е. представления, в которых центральный заряд соответствующей аффинной алгебры равен нулю.

Для того чтобы записать матрицу монодромии, мы должны рассмотреть эквивалентный бозонный L -оператор. Представляя линейную задачу, связанную с оператором (4), следующим образом:

$$\mathcal{L}\Psi = (\partial_\theta + \theta\partial_u + N_1 + \theta N_0)(\Psi_0 + \theta\Psi_1),$$

легко переписать ее как бозонную линейную задачу на Ψ_0 :

$$\mathcal{L}_B\Psi_0 \equiv (\partial_u + N_1^2 + N_0)\Psi_0 = 0,$$

при этом $\Psi_1 = -N_1\Psi_0$, где

$$N_1 = \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_1 h_{\alpha_1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_2 h_{\alpha_2} - e_{\alpha_1} - e_{\alpha_2} - [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] - [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] + \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2)e_{\alpha_0},$$

$$N_0 = -\phi'_1 h_{\alpha_1} - \phi'_2 h_{\alpha_2} - (\phi'_1 - \phi'_2)e_{\alpha_0}.$$

Таким образом,

$$\mathcal{L}_B = \partial_u + \left(\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_1 h_{\alpha_1} + \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_2 h_{\alpha_2} - [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] - [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] - \right. \\ \left. - e_{\alpha_1} - e_{\alpha_2} + \frac{i}{\sqrt{2}}(\xi_1 - \xi_2)e_{\alpha_0} \right)^2 - (\phi'_1 - \phi'_2)e_{\alpha_0} - \phi'_1 h_{\alpha_1} - \phi'_2 h_{\alpha_2}. \quad (10)$$

Рассматривая соответствующую линейную задачу, можно записать решение в таком виде:

$$\chi(u) = e^{\sum_{i=1,2} \phi_i(u) h_{\alpha_i}} \text{Pexp} \int_0^u du' \left(\sum_{k=0,1,2} W_{\alpha_k}(u') e_{\alpha_k} + K(u') \right), \quad (11)$$

где

$$W_{\alpha_j} = \int d\theta e^{-\Phi_j}, \quad j = 1, 2; \quad W_{\alpha_0} = \int d\theta (D\Phi_1 - D\Phi_2) e^{\Phi_1 + \Phi_2};$$

$$K(u) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_2 [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] e^{\phi_2} - \frac{i}{\sqrt{2}}\xi_1 [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] e^{\phi_1} - [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] e^{-\phi_1 - \phi_2} - \\ - [[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}], [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]] e^{\phi_1 + \phi_2} - [e_{\alpha_2}, [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]] - [e_{\alpha_1}, [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]]. \quad (12)$$

Мы можем определить матрицу монодромии на интервале $[0, 2\pi]$ с квазипериодическими граничными условиями

$$\phi_j(u + 2\pi) = \phi_j(u) + 2\pi i p_j, \quad \xi_j(u + 2\pi) = \pm \xi_j(u)$$

следующим образом:

$$\mathbf{M} = e^{\sum_{i=1,2} 2\pi p_i h_{\alpha_i}} \text{Pexp} \int_0^{2\pi} du \left(\sum_{k=0,1,2} W_{\alpha_k}(u) e_{\alpha_k} + K(u) \right). \quad (13)$$

Причина разделения подынтегрального выражения на K -член и ковариантную часть, выраженную через суперполя, состоит в том, что в квантовом случае (см. ниже) нековариантный K -член пропадает из выражения для квантовой матрицы монодромии.

Как и в случае стандартных моделей КДФ, определим вспомогательные $\mathbf{L}$ -операторы:

$$\mathbf{L} = e^{-\sum_{i=1,2} i\pi p_i h_{\alpha_i}} \mathbf{M}, \quad (14)$$

которые удовлетворяют квадратичному $\mathbf{r}$ -матричному соотношению [7]

$$\{\mathbf{L}(\lambda), \otimes \mathbf{L}(\mu)\} = [\mathbf{r}(\lambda\mu^{-1}), \mathbf{L}(\lambda) \otimes \mathbf{L}(\mu)] \quad (15)$$

с восстановленной зависимостью от спектральных параметров λ, μ , соответствующих каким-то заданным “evaluation”-представлениям. Здесь $\mathbf{r}(\lambda\mu^{-1})$ – это классическая тригонометрическая $\mathbf{r}$ -матрица, ассоциированная с $sl^{(1)}(2|1)$ [8]. Как обычно, это дает соотношение, приводящее к классической интегрируемости:

$$\{\mathbf{t}(\lambda), \mathbf{t}(\mu)\} = 0, \quad (16)$$

где $\mathbf{t}(\lambda) = \text{str } \mathbf{M}(\lambda)$, и суперслед взят в одном из представлений $sl^{(1)}(2|1)$.

3. КВАНТОВАЯ R -МАТРИЦА И БАЗИС КАРТАНА–ВЕЙЛЯ ДЛЯ $SL_Q^{(1)}(2|1)$

Квантовая алгебра $sl_q^{(1)}(2|1)$ имеет следующие коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [e_{\alpha_i}, e_{-\alpha_j}] &= \delta_{i,j} [h_{\alpha_i}], & i, j &= 0, 1, 2; \\ [h_{\alpha_j}, e_{\pm\alpha_i}] &= \pm e_{\pm\alpha_i}, & i, j &= 1, 2, \quad i \neq j; \\ [h_{\alpha_i}, e_{\pm\alpha_0}] &= \mp e_{\pm\alpha_0}, & [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha_i}] &= \mp e_{\pm\alpha_i}, & i &= 1, 2; \\ [h_{\alpha_i}, e_{\pm\alpha_i}] &= 0, & i &= 1, 2; \\ [h_{\alpha_0}, e_{\pm\alpha_0}] &= \pm 2e_{\pm\alpha_0}; & [e_{\pm\alpha_i}, [e_{\pm\alpha_i}, e_{\pm\alpha_j}]_q]_q &= 0, & i, j &= 0, 1, 2; \\ e_{\alpha_k}^2 &= 0, & k &= 1, 2. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $[x] = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$, а квантовый суперкоммутатор определен следующим образом:

$$[e_\alpha, e_\beta]_q = e_\alpha e_\beta - (-1)^{p(\alpha)p(\beta)} q^{(\alpha, \beta)} e_\beta e_\alpha.$$

Универсальная квантовая R -матрица для квантовых аффинных супералгебр имеет вид [9]

$$R = K \bar{R} = K \left(\prod_{\alpha \in \Delta_+}^{\rightarrow} R_\alpha \right), \quad (18)$$

где $\bar{R}$ – редуцированная R -матрица, и R_α заданы следующими формулами:

$$R_\alpha = \exp_{q_\alpha^{-1}} \{ (-1)^{p(\alpha)} (q - q^{-1}) (a(\alpha))^{-1} (e_\alpha \otimes e_{-\alpha}) \} \quad (19)$$

для вещественных корней и

$$R_{n\delta} = \exp \left\{ (q - q^{-1}) \sum_{i,j}^{\text{mult}} c_{ij}(n) e_{n\delta}^{(i)} \otimes e_{-n\delta}^{(j)} \right\} \quad (20)$$

для чисто мнимых корней. Здесь Δ_+ – это редуцированная положительная система корней (мы исключаем бозонные корни, являющиеся удвоенными фермионными), а q -экспонента определяется, как обычно:

$$\exp_q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n)_q!}, \quad (n)_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Генераторы, соответствующие составным корням, а также упорядочение в (18), задаются в соответствии с конструкцией базиса Картана–Вейля [9]. Картановский фактор в случае $sl_q^{(1)}(1|2)$ равен $K = q^{h_{\alpha_1} \otimes h_{\alpha_2} + h_{\alpha_2} \otimes h_{\alpha_1}}$. Коэффициенты $a(\alpha)$, $c_{ij}(n)$, $d_{ij}(n)$ определяется при помощи следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [e_\gamma, e_{-\gamma}] &= a(\gamma) \frac{k_\gamma - k_\gamma^{-1}}{q - q^{-1}}, \\ [e_{n\delta}^{(i)}, e_{-n\delta}^{(j)}] &= d_{ij}(n) \frac{q^{nh_\delta} - q^{-nh_\delta}}{q - q^{-1}}, \end{aligned}$$

а $c_{ij}(n)$ является обратной матрицей к $d_{ij}(n)$. Первые несколько генераторов, соответствующие составным корням и построенные согласно указанной процедуре, имеют вид

$$\begin{aligned} e_{\alpha_1 + \alpha_2} &= [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}]_{q^{-1}}, \\ e_{\delta - \alpha_1} &\equiv e_{\alpha_0 + \alpha_2} = [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_2}]_{q^{-1}}, & e_{\delta - \alpha_2} &\equiv e_{\alpha_0 + \alpha_1} = [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_0}]_{q^{-1}}, \\ e_{\delta}^{(1)} &= [[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_2}]_{q^{-1}}, e_{\alpha_1}], & e_{\delta}^{(2)} &= [[e_{\alpha_1}, e_{\alpha_0}]_{q^{-1}}, e_{\alpha_2}], \\ e_{2\delta - \alpha_1 - \alpha_2} &= [e_{\delta - \alpha_2}, e_{\delta - \alpha_1}]_{q^{-1}}, & e_{-\alpha_1 - \alpha_2} &= [e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_1}]_q, \\ e_{-\delta + \alpha_1} &\equiv e_{-\alpha_0 - \alpha_2} = [e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_0}]_q, & e_{-\delta + \alpha_2} &\equiv e_{-\alpha_0 - \alpha_1} = [e_{-\alpha_0}, e_{-\alpha_1}]_q, \\ e_{-\delta}^{(1)} &= [[e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_0}]_q, e_{-\alpha_1}], & e_{-\delta}^{(2)} &= [[e_{-\alpha_0}, e_{-\alpha_1}]_q, e_{-\alpha_2}], \\ e_{-2\delta + \alpha_1 + \alpha_2} &= [e_{-\delta + \alpha_1}, e_{-\delta + \alpha_2}]_q. \end{aligned} \quad (21)$$

4. ПОСТРОЕНИЕ КВАНТОВОЙ МАТРИЦЫ МОНОДРОМИИ

В этом разделе построен квантовый аналог матрицы монодромии, введенный в разделе 2. Показано, что в классическом пределе получается матрица (13).

Вначале рассмотрим квантовые версии экспонент свободных полей (вершинных операторов):

$$\begin{aligned} W_{\alpha_j} &= \int d\theta :e^{-\Phi_j}: \equiv \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_i :e^{-\phi_j}:, \quad j = 1, 2; \\ W_{\alpha_0} &= \int d\theta : (D\Phi_1 - D\Phi_2) e^{\Phi_1 + \Phi_2} : \equiv :e^{\phi_1 + \phi_2} (\phi'_1 - \phi'_2 + \xi_1 \xi_2):. \end{aligned} \quad (22)$$

Представим суперполя следующим образом: $\Phi_1 = (i\phi_+ + \phi_-)/\sqrt{2}$, $\Phi_2 = (i\phi_+ - \phi_-)/\sqrt{2}$, где

$$\begin{aligned} \phi_{\pm}(u) &= iQ^{\pm} + iP^{\pm}u + \sum_n \frac{a_{-n}^{\pm}}{n} e^{inu}, & \xi_{\pm}(u) &= i^{-1/2} \sum_n \xi_n^{\pm} e^{-inu}, \\ [Q^{\pm}, P^{\pm}] &= \frac{i\beta^2}{2}, & [a_n^{\pm}, a_m^{\pm}] &= \frac{\beta^2}{2} n\delta_{n+m,0}, & \{\xi_n^{\pm}, \xi_m^{\pm}\} &= \beta^2 \delta_{n+m,0}, \end{aligned} \quad (23)$$

а нормальное упорядочение в (22) определяется так:

$$:e^{c\phi_{\pm}(u)}: = \exp\left(c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}^{\pm}}{n} e^{inu}\right) \exp(ci(Q^{\pm} + P^{\pm}u)) \exp\left(-c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^{\pm}}{n} e^{-inu}\right).$$

Здесь операторы $a_n^{\pm}$ с отрицательным n передвинуты налево, а с положительным n — направо. Вершинные операторы (22), проинтегрированные от u_1 до u_2 , удовлетворяют квантовым соотношениям Серра и так называемым “нестандартным” соотношениям Серра для нижней подалгебры Бореля, где $q = e^{i\pi\beta^2/2}$.

Доказательство данного факта нетривиально, т.к. обычное доказательство соотношений Серра, приведенное в работах [10] для бозонного случая, основывающееся на сведении произведений проинтегрированных вертекс-операторов к упорядоченным интегралам не проходит из-за сингулярностей, образованных фермионными полями в соответствующих операторных произведениях. Однако существует другой метод доказательства, использующий обычную в конформной теории поля технику контурного интегрирования и аналитического продолжения операторных произведений нелокальных вертекс-операторов [11]. Это доказательство годится также для случая квантовой аффинной супералгебры и соответствующих вертекс-операторов, поскольку данный метод позволяет выделить расходимости в каждом из произведений вертекс-операторов и затем их сократить в “стандартных” и “нестандартных” соотношениях Серра. Этот вопрос для произвольной квантовой аффинной супералгебры будет рассмотрен в отдельной работе.

Следствием того, что операторы $(q - q^{-1})^{-1} \int_{u_1}^{u_2} du W_{\alpha_i}$ удовлетворяют соотношениям Серра, является возможность представления нижней борелевской алгебры с помощью соответствия

$$e_{-\alpha_i} \rightarrow (q - q^{-1})^{-1} \int_{u_1}^{u_2} du W_{\alpha_i}.$$

В работе [12] было показано, что соответствующим образом представленная редуцированная R -матрица $\bar{R}$, которую мы обозначим $\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_2, u_1)$, обладает свойством R -экспоненты, удовлетворяя следующему функциональному соотношению:

$$\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_3, u_1) = \bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_3, u_2) \bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_2, u_1). \quad (24)$$

Однако в суперсимметричном случае, когда появляются фермионные поля, связанные с ними сингулярности в операторных произведениях не позволяют выразить

$\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_2, u_1)$ стандартным образом, т.е. в терминах упорядоченных интегралов. Поэтому мы называли ее “квантовой” R -экспонентой, и в нашем случае она может быть записана как

$$\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(u_2, u_1) = \text{Pexp}^{(q)} \int_{u_1}^{u_2} du \sum_{k=0,1,2} W_{\alpha_k}(u) e_{\alpha_k}. \quad (25)$$

Можно показать, что операторы $e^{\sum_{i=1,2} \pi i p_i h_{\alpha_i}} \bar{\mathbf{L}}^{(q)}(2\pi, 0) = \mathbf{L}^{(q)}$ удовлетворяют RTT -соотношению [13]

$$\mathbf{R}(\lambda\mu^{-1})(\mathbf{L}^{(q)}(\lambda) \otimes \mathbf{I})(\mathbf{I} \otimes \mathbf{L}^{(q)}(\mu)) = (\mathbf{I} \otimes \mathbf{L}^{(q)}(\mu))(\mathbf{L}^{(q)}(\lambda) \otimes \mathbf{I})\mathbf{R}(\lambda\mu^{-1}), \quad (26)$$

где зависимость от λ, μ означает, что мы рассматриваем операторы $\mathbf{L}^{(q)}$ в соответствующих “evaluation”-представлениях $sl_q^{(1)}(2|1)$. Отметим также, что

$$\mathbf{M}^{(q)} = e^{\sum_{i=1,2} 2\pi i p_i h_{\alpha_i}} \bar{\mathbf{L}}^{(q)}$$

удовлетворяют уравнению отражения [14]

$$\tilde{\mathbf{R}}_{12}(\lambda\mu^{-1})\mathbf{M}_1^{(q)}(\lambda)F_{12}^{-1}\mathbf{M}_2^{(q)}(\mu) = \mathbf{M}_2^{(q)}(\mu)F_{12}^{-1}\mathbf{M}_1^{(q)}(\lambda)\mathbf{R}_{12}(\lambda\mu^{-1}), \quad (27)$$

где $F = K^{-1}$ есть обратный картановский фактор из универсальной R -матрицы,

$$\tilde{\mathbf{R}}_{12}(\lambda\mu^{-1}) = F_{12}^{-1}\mathbf{R}_{12}(\lambda\mu^{-1})F_{12},$$

а индексы 1, 2 обозначают расположение множителей в тензорном произведении. Это приводит к квантовому соотношению интегрируемости:

$$[\mathbf{t}^{(q)}(\lambda), \mathbf{t}^{(q)}(\mu)] = 0, \quad (28)$$

где $\mathbf{t}^{(q)}(\lambda) = \text{str } \mathbf{M}^{(q)}(\lambda)$.

Покажем, что $\mathbf{L}^{(q)}, \mathbf{M}^{(q)}$ в классическом пределе $q \rightarrow 1$ переходят во вспомогательную $\mathbf{L}$ -матрицу и матрицу монодромии, соответственно. Отметим также, что как обычно, квантовая универсальная R -матрица при $q \rightarrow 1$ стремится к классической r -матрице, следовательно, классический предел оператора $\mathbf{L}^{(q)}$ реализует классическую r -матрицу с помощью классических аналогов соответствующих вертекс-операторов.

Для нахождения классического предела разложим $\bar{\mathbf{L}}^{(q)}$ следующим образом [2]:

$$\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(2\pi, 0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{m=1}^N \bar{\mathbf{L}}^{(q)}(x_m, x_{m-1}), \quad (29)$$

где мы разделили интервал $[0, 2\pi]$ на инфинитезимальные интервалы $[x_m, x_{m+1}]$, $x_{m+1} - x_m = \epsilon = 2\pi/N$. Теперь найдем члены, дающие вклад первого порядка по

ϵ в $\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(x_m, x_{m-1})$. Для этого нам будут необходимы операторные разложения вершинных операторов. Нетривиальные члены возникают в следующих разложениях:

$$\begin{aligned}\xi_1(u)\xi_2(u') &= \frac{i\beta^2}{(iu - iu')} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k(u)(iu - iu')^k, \\ :e^{a\phi_1(u)}: :e^{b\phi_2(u')}: &= (iu - iu')^{-\frac{ab\beta^2}{2}} \left(:e^{(a\phi_1(u)+b\phi_2(u'))}: + \sum_{k=1}^{\infty} d_k(u)(iu - iu')^k \right), \\ \phi'_1(u):e^{b\phi_2(u')}: &= \frac{-ib\beta^2:e^{b\phi_2(u)}:}{2(iu - iu')} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u)(iu - iu')^k, \\ \phi'_2(u):e^{b\phi_1(u')}: &= \frac{-ib\beta^2:e^{b\phi_1(u)}:}{2(iu - iu')} + \sum_{k=0}^{\infty} f_k(u)(iu - iu')^k.\end{aligned}\tag{30}$$

В случаях, рассмотренных в работе [2], только два типа членов давали вклад порядка ϵ в $\bar{\mathbf{L}}^{(q)}(x_{m-1}, x_m)$ при $q \rightarrow 1$. К членам первого типа относятся операторы первого порядка по W_{α_i} , а второй тип образован операторами, квадратичными по W_{α_i} , которые дают вклад порядка $\epsilon^{1\pm\beta^2}$ в силу своего операторного разложения. Вклады второго типа соответствуют составным корням, являющимся суммой двух простых.

В данной работе мы покажем, что имеются вклады составных корней, равные сумме трех и даже четырех корней, которые обеспечивают необходимые члены в классических выражениях (12), (13). Сначала рассмотрим квадратичные члены, соответствующие отрицательным корням $-\alpha_1 - \alpha_2$, $-\delta + \alpha_2$, $-\delta + \alpha_1$. Коммутационные соотношения между вершинными операторами на окружности устроены таким образом, что при $u > u'$

$$\begin{aligned}W_{\alpha_i}(u)W_{\alpha_j}(u') &= -q^{-1}W_{\alpha_j}(u')W_{\alpha_i}(u), \quad i, j = 1, 2 \quad i \neq j; \\ W_{\alpha_i}(u)W_{\alpha_0}(u') &= qW_{\alpha_0}(u')W_{\alpha_i}(u); \\ W_{\alpha_0}(u)W_{\alpha_i}(u') &= qW_{\alpha_i}(u')W_{\alpha_0}(u), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{31}$$

Это позволяет нам записать генераторы, соответствующие отрицательным составным корням $-\delta + \alpha_2$, $-\delta + \alpha_1$, в следующем виде:

$$\begin{aligned}[e_{-\alpha_0}, e_{-\alpha_1}]_q &= \frac{1}{q - q^{-1}} \int_{x_{m-1}}^{x_m} du W_{\alpha_1}(u) \int_{x_{m-1}}^u du' W_{\alpha_0}(u'), \\ [e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_0}]_q &= \frac{1}{q - q^{-1}} \int_{x_{m-1}}^{x_m} du W_{\alpha_0}(u) \int_{x_{m-1}}^u du' W_{\alpha_2}(u').\end{aligned}\tag{32}$$

Показатели соответствующих q -экспонент в квантовой R -матрице (18) равны

$$\begin{aligned}\int_{x_{m-1}}^{x_m} du W_{\alpha_1}(u) \int_{x_{m-1}}^u du' W_{\alpha_0}(u') [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_0}]_{q^{-1}}, \\ \int_{x_{m-1}}^{x_m} du W_{\alpha_0}(u) \int_{x_{m-1}}^u du' W_{\alpha_2}(u') [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_2}]_{q^{-1}}.\end{aligned}\tag{33}$$

В классическом пределе ($\beta^2 \rightarrow 0$) их вклад, вычисленный с помощью соответствующих операторных разложений (аналогично работе [1]), имеет вид

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} du \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \xi_2 e^{\phi_2} [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] - \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_1 e^{\phi_1} [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] \right). \quad (34)$$

Вклад корня $-\alpha_1 - \alpha_2$ равен

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} du (-e^{-\phi_1 - \phi_2} [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}]). \quad (35)$$

В этом случае коммутатор проинтегрированных вершинных операторов не может быть переписан в терминах упорядоченных интегралов, как это было проделано выше. Используем тот факт, что проинтегрированные вершинные операторы должны быть радиально упорядочены, т.е., например, произведение $e_{-\alpha_k} e_{-\alpha_j}$ должно быть записано как

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} du W_{\alpha_k}(u - i0) \int_{x_{m-1}}^{x_m} du' W_{\alpha_j}(u' + i0),$$

а также учтем известное соотношение

$$\frac{1}{x + i0} - \frac{1}{x - i0} = -2i\pi\delta(x). \quad (36)$$

В результате, проведя вычисления, обобщающие результаты работы [2], мы получим формулу (35). Таким образом, на “квадратичном” уровне имеется полное согласие с классическим выражением.

Теперь рассмотрим вклад, соответствующий составным корням $e_{\delta}^{(i)}$ и $2\delta - \alpha_1 - \alpha_2$. Сначала мы рассмотрим чисто мнимые корни

$$e_{-\delta}^{(1)} = [[e_{-\alpha_2}, e_{-\alpha_0}]_q, e_{-\alpha_1}], \quad e_{-\delta}^{(2)} = [[e_{-\alpha_0}, e_{-\alpha_1}]_q, e_{-\alpha_2}].$$

Чтобы вычислить их вклад в классическом пределе, мы должны учесть члены порядка $\epsilon^{1+\beta^2}$, пропорциональные $\int du d\theta e^{\Phi_2}$ и $\int du d\theta e^{\Phi_1}$, в $[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]_q$ и $[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]_q$, соответственно. Затем мы рассмотрим их суперкоммутаторы с e_{α_1} и e_{α_2} . Перепиывая эти суперкоммутаторы в терминах упорядоченных интегралов, как это было выше, мы находим, следуя вычислениям из [1], что вклад соответствующего показателя q -экспоненты имеет следующий вид:

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} du (-[e_{\alpha_2}, [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]] - [e_{\alpha_1}, [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]]). \quad (37)$$

Генератор $e_{2\delta - \alpha_1 - \alpha_2}$ выражается аналогично в терминах q -коммутатора $[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]_q$ и $[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]_q$. Учитывая члены порядка $\epsilon^{1+\beta^2}$ и используя формулу (36), как было указано выше, мы получаем, что вклад порядка ϵ в классическое выражение есть

$$\int_{x_{m-1}}^{x_m} du (-[[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}], [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]] e^{\phi_1 + \phi_2}). \quad (38)$$

Следовательно, с учетом всех имеющихся членов, первая итерация $\bar{\mathbf{L}}$ -оператора в классическом пределе имеет вид

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1} \bar{\mathbf{L}}^{(q)}(x_m, x_{m-1}) = & 1 + \int_{x_{m-1}}^{x_m} du \left(\sum_{k=0,1,2} W_{\alpha_k}(u) e_{\alpha_k} - \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_2[e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}] e^{\phi_2} - \right. \\ & - \frac{i}{\sqrt{2}} \xi_1[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}] e^{\phi_1} - [e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}] e^{-\phi_1 - \phi_2} - [[e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}], [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]] e^{\phi_1 + \phi_2} - \\ & \left. - [e_{\alpha_2}, [e_{\alpha_0}, e_{\alpha_1}]] - [e_{\alpha_1}, [e_{\alpha_2}, e_{\alpha_0}]] \right) + O(\epsilon^2). \end{aligned} \quad (39)$$

Собирая все инфинитезимальные $\bar{\mathbf{L}}$ -операторы и умножая на соответствующий картановский фактор, мы получаем искомое классическое выражение для $\mathbf{L}$ -операторов и матрицы монодромии.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Матрица монодромии, предъявленная в предыдущем разделе, построена на основании метода, предложенного в работах [1]–[4], [12]. Другими словами, нами показано, что квантовый аналог вспомогательной $\mathbf{L}$ -матрицы совпадает с универсальной R -матрицей, в которой нижняя подалгебра Бореля представлена подходящими вершинными операторами. Эта конструкция также позволяет показать, что генераторы суперсимметрии коммутируют с суперследом матрицы монодромии, т.е. они могут быть включены в семейство интегралов движения. Действительно, коммутаторы генераторов суперсимметрии

$$G_0^+ = \beta^{-2} \sqrt{2} i^{-1/2} \int_0^{2\pi} du \phi'_1(u) \xi_2(u), \quad G_0^- = \beta^{-2} \sqrt{2} i^{-1/2} \int_0^{2\pi} du \phi'_2(u) \xi_1(u)$$

с вершинными операторами редуцируются к полным производным; дальнейшие рассуждения полностью повторяют аргументацию работы [3] (см. часть 4), где в случае стандартных иерархий Дринфельда–Соколова было показано (следуя [12]), что оператор суперсимметрии коммутирует со следом матрицы монодромии, если система простых корней является чисто фермионной (при этом условие нечетности системы простых корней гарантирует, что коммутаторы генератора суперсимметрии с соответствующими вертекс-операторами являются полными производными). Аналогично можно показать, что трансфер-матрицы коммутируют с нулевой модой $U(1)$ -тока (квантового аналога поля V из (6)), присутствующего в $N = 2$ суперконформной алгебре.

Этот результат имеет важные следствия. Если сделать твист-преобразование [15] в $N = 2$ суперконформной алгебре, мы получим, что один из генераторов $G_0^\pm$ становится БРСТ-оператором, т.е. трансфер-матрицы становятся БРСТ-точными, генерируя бесконечное семейство “физических” интегралов движения (с нулевым духовым числом, как показывают коммутационные соотношения с нулевой модой $U(1)$ -тока). Это дает нам возможность изучать двумерные топологические модели и их интегрируемые возмущения с помощью методов интегрируемых теорий, например, с помощью хорошо известного квантового метода обратной задачи [13].

Благодарности. Автор благодарен рецензенту за ценные замечания и фондам “Династия”, CRDF (грант N RUMI-2622-ST-04) и РФФИ (грант N 05-01-00922) за поддержку его работы. Автор особенно признателен Н. Ю. Решетихину, М. А. Семёнову–Тян-Шанскому и А. А. Цейтлину за поддержку.

Список литературы

- [1] P. P. Kulish, A. M. Zeitlin, *Phys. Lett. B*, **581** (2004), 125; [hep-th/0312159](#); П. П. Кулиш, А. М. Цейтлин, *ТМФ*, **142** (2005), 252; [hep-th/0501018](#).
- [2] P. P. Kulish, A. M. Zeitlin, *Phys. Lett. B*, **597** (2004), 229; [hep-th/0407154](#); *Nucl. Phys. B*, **709** (2005), 578; [hep-th/0501019](#).
- [3] P. P. Kulish, A. M. Zeitlin, *Nucl. Phys. B*, **720** (2005), 289; [hep-th/0506027](#).
- [4] V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov, *Commun. Math. Phys.*, **177** (1996), 381; **190** (1997), 247; **200** (1999), 297.
- [5] F. Delduc, L. Gallot, *Supersymmetric Drinfeld–Sokolov reduction*, [solv-int/9802013](#).
- [6] T. Inami, H. Kanno, *Nucl. Phys. B*, **359** (1991), 201.
- [7] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [8] В. В. Бажанов, А. Г. Шадриков, *ТМФ*, **73** (1988), 402.
- [9] S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, *Twisting of quantum (super)algebras. Connection of Drinfeld’s and Cartan–Weyl realizations for quantum affine algebras*, [hep-th/9404036](#).
- [10] B. Feigin, E. Frenkel, “Integrals of motion and quantum groups”, *Integrable Systems and Quantum Groups (Montecatini Terme, Italy, June 14–22, 1993)*, *Lect. Notes Math.*, **1620**, eds. M. Francaviglia, S. Greco, Springer, Berlin, 1996, 349; P. Bouwknegt, J. McCarthy, K. Pilch, [hep-th/9110007](#).
- [11] S. Klevtsov, *On vertex operator construction of quantum affine algebras*, [hep-th/0110148](#).
- [12] V. V. Bazhanov, A. N. Hibberd, S. M. Khoroshkin, *Nucl. Phys. B*, **622** (2002), 475.
- [13] L. D. Faddeev, “How the algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Quantum symmetries/Symétries quantiques. Proc. of the Les Houches Summer School, Session LXIV (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995)*, eds. A. Connes, K. Gawedzki, J. Zinn-Justin, Elsevier, Amsterdam, 1998, 149; [hep-th/9605187](#); P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, “Quantum spectral transform method: recent development”, *Integrable Quantum Field Theories. Lect. Notes Phys.*, **151**, eds. J. Hietarinta, C. Montonen, Springer, Berlin, 1982, 61.
- [14] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin, *J. Phys. A*, **25** (1992), 5963; P. P. Kulish, R. Sasaki, *Prog. Theor. Phys.*, **89** (1993), 741.
- [15] W. Lerche, C. Vafa, N. P. Warner, *Nucl. Phys. B*, **324** (1989), 427.

Поступила в редакцию 19.IX.2005 г.,
после доработки 16.XI.2005 г.