Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Ерёмин, А. А. Мельдианов, q -Деформированный гармонический осциллятор, когерентные состояния и соотношение неопределенностей, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 2, 315–322

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1966>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 11:42:07

© 2006 г.

В. В. Еремин*, А. А. Мельдианов*

q -ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР, КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ И СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

Для q -деформированного гармонического осциллятора найдены явные координатные представления операторов рождения и уничтожения, собственных функций, когерентных состояний. Последние определены как собственные состояния оператора уничтожения. Рассчитано произведение неопределенностей “координата–импульс” в собственных состояниях q -осциллятора и когерентных состояниях. Для осциллятора оно минимально в основном состоянии и равно $1/2$, как в обычной квантовой механике. У когерентных состояний q -деформация ведет к нарушению стандартного соотношения неопределенностей; произведение неопределенностей операторов координаты и импульса всегда меньше $1/2$. Состояниям с наименьшей неопределенностью, стремящейся к нулю, отвечают значения λ вблизи границ круга сходимости q -экспоненты.

Ключевые слова: q -деформация, гармонический осциллятор, операторы рождения и уничтожения, когерентные состояния, соотношение неопределенностей.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие квантовые группы и q -деформированные алгебры служат объектом интенсивных исследований. После первых работ, в которых было введено понятие q -деформированного гармонического осциллятора [1]–[3], квантовые группы и q -деформации нашли применение в самых разнообразных областях физики и химии. В частности, они были использованы для описания электронной проводимости в разупорядоченных металлах и допированных полупроводниках [4], анализа фононного спектра в ^4He [5], характеристики колебательно-вращательных спектров двухатомных [6] и многоатомных молекул [7].

Одним из естественных приложений квантовых групп стала q -деформированная квантовая механика [8], [9], которая является обобщением обычной квантовой механики, основанной на коммутационном соотношении Гейзенберга (алгебре Гейзенберга). Многие основные понятия и модели квантовой механики – фазовое пространство [10], соотношение неопределенностей [11], [12], матрица плотности [13],

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: vadim@educ.chem.msu.ru; meld@mail.ru

гармонический осциллятор [1], [2], [10] и атом водорода [14], операторы рождения и уничтожения, когерентные состояния [1], [2], [15], динамика [16] – нашли в рамках квантового q -формализма свои аналоги, которые при $q \rightarrow 1$ сводятся к стандартным квантовым понятиям и моделям. Оказалось, что некоторые из обобщенных q -величин заметно отличаются по свойствам от обычных квантово-механических аналогов. Так, например, q -осциллятор имеет сильно нелинейный спектр, а произведение неопределенностей может при определенных условиях быть меньше $1/2$ [11].

Свойства квантовых групп – q -аналогов стандартных групп, используемых в квантовой механике, – изучены на абстрактном уровне довольно подробно, и на основе соответствующих коммутационных соотношений получено большое число операторных тождеств. Вместе с тем координатным реализациям операторов и волновых функций уделялось намного меньше внимания: насколько нам известно, только в пионерской работе [1] есть указания на явный вид волновых функций q -осциллятора. В данной работе мы получили явные координатные представления для операторов рождения и уничтожения, волновых функций и когерентных состояний q -деформированного гармонического осциллятора и исследовали их зависимость от параметра деформации q . Для когерентных состояний мы рассчитали в явном виде произведение неопределенностей “координата–импульс” и показали, что оно может принимать сколь угодно близкие к нулю значения.

2. Q -ДЕФОРМИРОВАННЫЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

q -Деформированный гармонический осциллятор (далее просто q -осциллятор) описывается гамильтонианом

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}(aa^+ + a^+a), \quad (1)$$

где ω – частота осциллятора, a^+ и a – операторы рождения и уничтожения, удовлетворяющие коммутационному соотношению

$$[a, a^+]_q = aa^+ - qa^+a = 1 \quad (2)$$

с параметром деформации q , который принимает значения в интервале $(0, 1)$. Далее мы используем систему единиц, в которой $\hbar = 1$.

В пространстве собственных векторов $|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, \dots$, гамильтониана (1)

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle \quad (3)$$

операторы a и a^+ действуют в качестве лестничных операторов:

$$a|n\rangle = \sqrt{[n]}|n-1\rangle, \quad (4)$$

$$a^+|n\rangle = \sqrt{[n+1]}|n+1\rangle, \quad (5)$$

где $[n] = (1 - q^n)/(1 - q)$ – q -число [14]. Спектр гамильтониана (1) имеет вид

$$E_n = \omega \left([n] + \frac{q^n}{2} \right) = \omega \frac{[n] + [n+1]}{2} \quad (6)$$

и ограничен сверху значением

$$E_{\infty} = \frac{\omega}{1-q}. \quad (7)$$

При $q = 1$ он превращается в спектр обычного гармонического осциллятора:

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} \right). \quad (8)$$

При малых отклонениях от единицы ($q = 1 - \varepsilon$) спектр становится квадратичным:

$$E_n = \omega \left(n + \frac{1}{2} - \frac{n^2}{2} \varepsilon + O(\varepsilon^2) \right), \quad (9)$$

что обуславливает возможность использования q -осциллятора для описания колебательно-вращательных уровней двухатомных [6] и многоатомных [7] молекул с параметром ангармоничности ε .

Собственные векторы гамильтониана (1) находятся, как и для обычного гармонического осциллятора, путем последовательного применения оператора рождения a^+ к вектору вакуумного состояния:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{[n]}} a^+ |n-1\rangle = \dots = \frac{1}{\sqrt{[n]!}} (a^+)^n |0\rangle. \quad (10)$$

Построенные таким образом векторы ортонормированны и образуют полную систему.

Уровни энергии (6) определяются только видом гамильтониана (1) и коммутационным соотношением (2). Для нахождения явного вида собственных векторов необходимо задать координатное представление для операторов рождения и уничтожения. В качестве такового мы предлагаем следующие выражения:

$$a = \frac{e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha d/dx} e^{-i\alpha x}}{-i\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}}, \quad (11)$$

$$a^+ = \frac{e^{2i\alpha x} - e^{i\alpha x} e^{i\alpha d/dx}}{i\sqrt{1 - e^{-2\alpha^2}}}, \quad (12)$$

где $\alpha = \sqrt{-\ln q/2}$, $0 < \alpha < \infty$. Это представление удовлетворяет соотношению (2), а в пределе $q \rightarrow 1$ ($\alpha \rightarrow 0$) дает стандартные выражения для гармонического осциллятора.

Соответствующие операторы координаты и импульса в q -деформированной квантовой механике имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{a + a^+}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{1 - e^{-2\alpha^2}}} \left(\sin(2\alpha x) - e^{\alpha^2/2} \sin\left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} i\right) e^{i\alpha d/dx} \right), \\ \hat{p} &= \frac{a - a^+}{i\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{2}{1 - e^{-2\alpha^2}}} \left(\cos(2\alpha x) - e^{\alpha^2/2} \cos\left(\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} i\right) e^{i\alpha d/dx} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Используя предложенное координатное представление, найдем в первую очередь волновую функцию вакуумного состояния. Нормированное решение уравнения $a|0\rangle = 0$, т.е.

$$[e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha d/dx} e^{-i\alpha x}] \Psi_0(x) = 0, \quad (14)$$

выглядит следующим образом:

$$\Psi_0(x) = \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2 + 3i\alpha x/2}. \quad (15)$$

Плотность вероятности вакуумного состояния $|\Psi_0(x)|^2$ имеет гауссову форму и не зависит от параметра деформации q .

Подставляя соотношения (12) и (15) в формулу (10), получим явное координатное выражение для нормированных волновых функций q -осциллятора:

$$|n\rangle = \Psi_n(x) = \frac{e^{-x^2/2 + 3i\alpha x/2}}{\pi^{1/4} i^n (1 - e^{-2\alpha^2})^{n/2} \sqrt{[n]!}} \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k [n]!}{[k]! [n-k]!} e^{(n-k)2i\alpha x - k\alpha^2}, \quad (16)$$

где $[n]! = [1][2]\dots[n]$. При $q \rightarrow 1$ ($\alpha \rightarrow 0$) волновые функции (16) сходятся к волновым функциям гармонического осциллятора:

$$\Psi_n(x) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{1}{\pi^{1/4} 2^{n/2} \sqrt{n!}} H_n(x) e^{-x^2/2}, \quad (17)$$

а при $q \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) они “вырождаются” – плотность вероятности при любом n стремится к плотности вероятности основного состояния:

$$\Psi_n(x) \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/4} i^n} e^{-x^2/2 + (2n+3/2)i\alpha x}, \quad (18)$$

$$|\Psi_n(x)|^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/2}} e^{-x^2}. \quad (19)$$

Представляет интерес оценка соотношения неопределенностей “координата–импульс” для собственных состояний q -осциллятора. Используя лестничные соотношения (4), (5), находим средние значения операторов координаты и импульса:

$$\langle x \rangle = \langle p \rangle = 0, \quad \langle x^2 \rangle = \langle p^2 \rangle = \frac{E_n}{\omega}. \quad (20)$$

Отсюда следует, что произведение неопределенностей координаты и импульса для чистого n -го состояния q -осциллятора равно энергии этого состояния в единицах ω :

$$\Delta x \Delta p = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2} (\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2)^{1/2} = \frac{E_n}{\omega} \leq n + \frac{1}{2}. \quad (21)$$

Оно меньше аналогичного значения для обычного гармонического осциллятора при всех n , кроме $n = 0$. При $n = 0$ произведение неопределенностей минимально и составляет $1/2$.

Идея о том, что деформированные коммутационные соотношения могут привести к изменению соотношения неопределенностей, высказывалась еще в работе [17]. Первые оценки, показывающие, что для q -аналога алгебры Гейзенберга произведение неопределенностей координаты и импульса может быть меньше $1/2$, сделаны в работах [9], [11]. В поисках минимального значения произведения неопределенностей обратимся к q -аналогу когерентных состояний гармонического осциллятора.

3. КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ

В квантовой механике минимально возможное произведение неопределенностей характерно для когерентных состояний, одно из определений которых связано с оператором уничтожения для гармонического осциллятора [18]. Рассмотрим обобщение этого понятия на случай q -деформации и рассчитаем неопределенности координаты и импульса в когерентном состоянии.

Определим когерентное состояние как собственное состояние оператора уничтожения:

$$a|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle, \quad (22)$$

где λ – комплексное число, ограничение на которое будет получено ниже. С учетом выражения (4) можно показать, что это определение эквивалентно следующему разложению по собственным функциям q -осциллятора:

$$|\lambda\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{\sqrt{[n]!}} |n\rangle, \quad (23)$$

или действию оператора сдвига на вакуумное состояние:

$$|\lambda\rangle = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda a^+)^n}{[n]!} |n\rangle = c_0 e_q^{\lambda a^+} |0\rangle, \quad (24)$$

где e_q – q -экспонента [19]. Константа c_0 находится из условия нормировки $\langle \lambda | \lambda \rangle = 1$:

$$|c_0|^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\lambda|^{2n}}{[n]!} \right)^{-1} = (e_q^{|\lambda|^2})^{-1}. \quad (25)$$

Наличие круга сходимости q -экспоненты налагает ограничение на когерентные состояния:

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{1-q}}, \quad (26)$$

в отличие от обычной квантовой механики, где λ может принимать любые значения.

Для расчета средних значений координаты и импульса нам понадобится энергия когерентного состояния:

$$\langle \lambda | H | \lambda \rangle = \left\langle \lambda \left| \frac{1}{2} + \frac{1+q}{2} a^+ a \right| \lambda \right\rangle = \frac{1}{2} + \frac{1+q}{2} |\lambda|^2. \quad (27)$$

Из соотношений (26) и (27) следует, что энергия q -когерентных состояний ограничена:

$$\langle \lambda | H | \lambda \rangle < \frac{1}{1-q}. \quad (28)$$

Расчет остальных средних значений основан непосредственно на определении когерентных состояний (22):

$$\begin{aligned}
 \langle x \rangle &= \left\langle \lambda \left| \frac{a + a^+}{\sqrt{2}} \right| \lambda \right\rangle = \frac{\lambda + \lambda^*}{\sqrt{2}}, \\
 \langle p \rangle &= \left\langle \lambda \left| \frac{a - a^+}{i\sqrt{2}} \right| \lambda \right\rangle = \frac{\lambda - \lambda^*}{i\sqrt{2}}, \\
 \langle x^2 \rangle &= \left\langle \lambda \left| \left(\frac{a + a^+}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| \lambda \right\rangle = \frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{*2}) + \langle \lambda | H | \lambda \rangle, \\
 \langle p^2 \rangle &= \left\langle \lambda \left| - \left(\frac{a - a^+}{\sqrt{2}} \right)^2 \right| \lambda \right\rangle = -\frac{1}{2}(\lambda^2 + \lambda^{*2}) + \langle \lambda | H | \lambda \rangle.
 \end{aligned} \tag{29}$$

Из выражений (22) и (29) находим, с учетом (27), произведение неопределенностей координаты и импульса для когерентного состояния $|\lambda\rangle$:

$$\Delta x \Delta p = \langle \lambda | H | \lambda \rangle - |\lambda|^2 = \frac{1}{2} - \frac{1-q}{2} |\lambda|^2. \tag{30}$$

При любых $q < 1$ и допустимых λ это произведение меньше стандартного квантово-механического значения $1/2$. Более того, при увеличении λ оно может быть сделано сколь угодно малым. Таким образом, если в обычной квантовой механике когерентные состояния определяются как состояния с наименьшей неопределенностью, то в q -деформированной квантовой механике такое определение не работает: минимальное значение $\Delta x \Delta p$, равное в случае q -деформации нулю (см. (30)), недостижимо, так как при соответствующих значениях λ ($|\lambda| = (1-q)^{1/2}$) ряд q -экспоненты не сходится.

Для определения явного вида волновых функций когерентных состояний решим уравнение (22) с оператором уничтожения (11):

$$\left(\frac{e^{-2i\alpha x} - e^{i\alpha d/dx} e^{-i\alpha x}}{-i\sqrt{1-q} e^{-2\alpha^2}} - \lambda \right) \Psi_\lambda(x) = 0. \tag{31}$$

Будем искать решение в виде

$$\Psi_\lambda(x) = f(e^{2i\alpha x}) \Psi_0(x), \tag{32}$$

где нулевое когерентное состояние имеет вид (15). Подставляя выражение (32) в (31), после некоторых преобразований получим

$$\frac{f(A) - f(qA)}{A(1-q)} = \frac{\lambda}{i\sqrt{1-q}} f(A), \tag{33}$$

где $A \equiv e^{2i\alpha x}$. Уравнение (33) представляет собой q -аналог обычного дифференциального уравнения для экспоненты [19] и имеет решение

$$f(A) = e^{\lambda A / (i\sqrt{1-q})}. \tag{34}$$

Подставляя это решение в (32) и учитывая условия нормировки, находим явный вид когерентных состояний:

$$\Psi_{\lambda}(x) = \frac{1}{\pi^{1/4} [e_q^{|\lambda|^2}]^{1/2}} e_q^{i\lambda\sqrt{q}/\sqrt{1-q}} e_q^{\lambda e^{2i\alpha x}/(i\sqrt{1-q})} e^{-x^2/2+3i\alpha x/2}. \quad (35)$$

При $q \rightarrow 1$ это выражение сводится к когерентным состояниям обычного квантового осциллятора:

$$\Psi_{\lambda}(x) \xrightarrow{q \rightarrow 1} \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-(x-\lambda\sqrt{2})^2/2}. \quad (36)$$

Можно показать, что выражение (35) эквивалентно разложению (23) по собственным функциям q -осциллятора.

Плотности вероятности когерентных состояний представляют собой деформированные гауссовы кривые, амплитуда которых растет с уменьшением q , т.е. с увеличением деформации. Наиболее интересная структура кривых проявляется в случае предельных деформаций ($q \ll 1$) и больших λ , т.е. для состояний с малой неопределенностью (30). При увеличении λ от нуля до предельного значения $1/\sqrt{1-q}$ исходная гауссова кривая (15) деформируется в несколько локализованных узких пиков. Для объяснения этого факта рассмотрим предельное поведение когерентных состояний при $q \rightarrow 0$. Из формулы (35) и свойств q -экспоненты [19] следует, что

$$|\Psi_{\lambda}(x)|^2 \xrightarrow{q \rightarrow 0} \frac{1}{\pi^{1/2}} \frac{1 - |\lambda|^2}{1 + |\lambda|^2 - 2 \operatorname{Im}(\lambda e^{2i\alpha x})} e^{-x^2}. \quad (37)$$

При $q \rightarrow 0$ ($\alpha \rightarrow \infty$) быстроосциллирующее слагаемое в знаменателе вырезает из гауссовой функции отдельные пики.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

К основным результатам данной работы относятся явные координатные представления операторов уничтожения и рождения (11), (12), собственных функций (16) и когерентных состояний (35) q -деформированного осциллятора. Другой важный результат состоит в том, что когерентные состояния q -осциллятора минимизируют соотношение неопределенностей “координата–импульс” (30), которое в отличие от обычной квантовой механики не ограничено значением $1/2$, а может принимать сколь угодно малые положительные значения, зависящие от параметра деформации q и собственного значения когерентного состояния λ . Состояниям с наименьшей неопределенностью, стремящейся к нулю, отвечают значения λ вблизи границ круга сходимости q -экспоненты: $|\lambda| \rightarrow 1/\sqrt{1-q}$.

В заключение остановимся на физическом смысле параметра деформации q , имея в виду возможные приложения наших результатов. Структура квантовых групп естественным образом связана с некоторыми точно решаемыми моделями статистической механики и теории поля [1], однако смысл деформации стандартных соотношений квантовой механики пока не ясен. Высказывались предположения о том, что эта деформация может наблюдаться на планковских расстояниях (меньше 10^{-17} см. [2], [9]), однако эти предположения пока невозможно подтвердить экспериментально.

В то же время параметру деформации в молекулярной физике и квантовой химии можно придать менее фундаментальный смысл, основываясь на нелинейных свойствах q -осциллятора. Еще Манько с соавторами [20] обратили внимание на то, что q -осциллятор можно рассматривать как обычный нелинейный осциллятор со специфической зависимостью частоты от амплитуды колебаний. Позже было обнаружено, что квантовая динамика q -осциллятора изоморфна динамике обычного нелинейного осциллятора с квадратичной ангармоничностью [16]. Поэтому весьма обоснованной кажется интерпретация параметра q как меры ангармоничности молекулярных колебаний. На это же указывает нелинейность спектра q -осциллятора (см. (9)), которая при малых деформациях имеет квадратичный характер, так же как и колебательные спектры электронных состояний многих молекул. Поэтому мы надеемся, что результаты данной работы, в частности явный вид волновых функций q -осциллятора, могут быть использованы в теории молекулярных спектров, например для расчета интенсивностей линий, которые определяются интегралами перекрывания волновых функций.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 03-03-32521).

Список литературы

- [1] A. J. Macfarlane, *J. Phys. A*, **22** (1989), 4581.
- [2] L. S. Biedenharn, *J. Phys. A*, **22** (1989), L873.
- [3] P. P. Kulish, E. V. Damaskinsky, *J. Phys. A*, **23** (1990), L415.
- [4] S. A. Alavi, S. Rouhani, *Phys. Lett. A*, **320** (2004), 327.
- [5] M. R. Monteiro, L. M. C. S. Rodrigues, L. Wulck, *Phys. Rev. Lett.*, **76** (1996), 1098.
- [6] R. S. Johal, R. K. Gupta, *Int. J. Mod. Phys. E*, **7** (1998), 553; Z. Chang, H. Yan, *Phys. Rev. A*, **44** (1991), 7405.
- [7] D. Bonatsos, C. Daskaloyannis, P. Kolokotronis, *J. Chem. Phys.*, **106** (1997), 605; M. Xie, X.-W. Hou, Z.-Q. Ma, *Chem. Phys. Lett.*, **262** (1996), 1.
- [8] S. Chaturvedi, V. Srinivasan, *Phys. Rev. A*, **44** (1991), 8020.
- [9] J. Zhang, *Phys. Lett. B*, **440** (1998), 66.
- [10] A. Lorek, A. Ruffing, J. Wess, *Z. Phys. C*, **74** (1997), 369.
- [11] J. Zhang, *Phys. Lett. A*, **262** (1999), 125.
- [12] R. J. Finkelstein, *Int. J. Mod. Phys. A*, **13** (1998), 1795.
- [13] R. Parthasarathy, R. Sridhar, *Phys. Lett. A*, **305** (2002), 105.
- [14] R. J. Finkelstein, *Lett. Math. Phys.*, **49** (1999), 105.
- [15] X.-M. Liu, C. Quesne, *Phys. Lett. A*, **317** (2003), 210; J.-S. Wang, B.-Y. Wang, C.-Y. Sun, *Phys. Lett. A*, **246** (1998), 464.
- [16] J. L. Gruver, *Phys. Lett. A*, **254** (1999), 1.
- [17] A. Kempf, *J. Math. Phys.*, **35** (1994), 4483.
- [18] R. J. Glauber, *Phys. Rev. Lett.*, **131** (1963), 2766; P. Carruthers, M. M. Nieto, *Rev. Mod. Phys.*, **40** (1968), 411.
- [19] H. Maassen, H. van Leeuwen, *J. Math. Phys.*, **36** (1995), 725.
- [20] V. I. Man'ko, G. Marmo, S. Solimeno, F. Zaccaria, *Phys. Lett. A*, **176** (1993), 173.

Поступила в редакцию 4.VII.2005 г.,
после доработки 27.IX.2005 г.