Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, М. Э. Муминов, Существенный и дискретный спектр трехчастичного оператора Шредингера на решетке, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 478–503

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf197>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 13:49:55

СУЩЕСТВЕННЫЙ И ДИСКРЕТНЫЙ СПЕКТР ТРЕХЧАСТИЧНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА НА РЕШЕТКЕ

На трехмерной решетке рассматривается система трех квантовых частиц (две из них бозоны, а третья – произвольная), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Описан существенный спектр, доказано существование эффекта Ефимова в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные подсистемы системы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае трехчастичного существенного спектра при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$), а также показана конечность числа связанных состояний при малых значениях полного квазиимпульса ($K \neq 0$).

Ключевые слова: существенный спектр, виртуальный уровень, каналный оператор, дискретный спектр, неравенство Вейля, оператор Гильберта–Шмидта.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из замечательных результатов спектрального анализа трехчастичного непрерывного оператора Шредингера является так называемый эффект Ефимова: если в системе трех частиц, взаимодействующих с помощью парных короткодействующих потенциалов, ни одна из трех двухчастичных подсистем не имеет связанных состояний с отрицательной энергией, но по меньшей мере две из них имеют резонанс с энергией в нуле, то у этой трехчастичной системы существует бесконечное число трехчастичных связанных состояний с отрицательной энергией, накапливающихся к нулю. Этот эффект впервые был обнаружен Ефимовым [1]. С тех пор эта задача изучалась во многих работах [2], [3]. Строгое математическое доказательство существования эффекта Ефимова было проведено впервые в работе [4], а затем в работах [5]–[7]. Яфаев [4] доказал существование эффекта Ефимова, используя метод интегральных уравнений Фаддеева. С другой стороны, Овчинников и Сигал [5] интересным вариационным методом установили эффект Ефимова для системы трех частиц, из которых две тяжелые (2H) и одна легкая (1L), в предположении, что только H–L-подсистемы, взаимодействующие с помощью сферически-симметричных парных потенциалов, имеют резонанс с энергией в нуле.

*Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан.
E-mail: samgu@sam.silk.glas.apc.org

Далее, Тамура [6] доказал существование эффекта Ефимова, используя вариационный метод работы [5] без ограничения на массы частиц, взаимодействующих с помощью парных потенциалов (не обязательно сферически симметричных), в случае, когда все двухчастичные подсистемы имеют резонанс с энергией в нуле.

В моделях физики твердого тела [7], [8], а также решетчатой теории поля [9] возникают так называемые дискретные операторы Шредингера, являющиеся решетчатым аналогом обычного трехчастичного оператора Шредингера в непрерывном пространстве. Для таких операторов также естественно ожидать появления эффекта Ефимова, поскольку, как показывает тщательный анализ этого эффекта [4], за него ответственна “длинноволновая часть” спектра оператора Шредингера, одинаковая в обоих случаях – решетчатом и непрерывном. На физическом уровне это было показано в работах [7], [8].

В работе [10] сформулирован результат относительно эффекта Ефимова для системы трех произвольных квантовых частиц, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения при фиксированном значении полного квазиимпульса системы, и приведен лишь набросок его доказательства. В статье [11] на трехмерной решетке рассматривалась система трех одинаковых квантовых частиц (бозонов), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, и было доказано существование эффекта Ефимова, когда все три двухчастичные подсистемы имеют виртуальный уровень на левом крае трехчастичного существенного спектра. Кроме того, была исследована зависимость этого явления от квазиимпульса системы, точнее, описано множество значений полного квазиимпульса, для которых может иметь место эффект Ефимова.

Хотя оператор энергии системы трех частиц на решетке ограничен и возмущение в парной задаче – компактный оператор, эффект Ефимова для такой системы имеет более сложный характер по сравнению с непрерывным случаем.

В последнем случае из полного гамильтониана можно выделить энергию движения центра масс так, что трехчастичные “связанные состояния” суть собственные векторы оператора энергии с отделенным полным импульсом (при этом такой оператор фактически не зависит от значений полного импульса). Поэтому эффект Ефимова имеет или же не имеет места одновременно для всех значений полного импульса. На решетке “выделению центра масс” системы отвечает реализация гамильтониана как “расслоенного оператора”, т.е. “прямого интеграла” семейства операторов $H(K)$, зависящих от значений полного квазиимпульса $K \in T^3$ (T^3 – трехмерный тор). При этом “связанное состояние” есть собственный вектор оператора $H(K)$ для некоторого $K \in T^3$, в типичном случае непрерывно меняющийся при изменении K . Поэтому эффект Ефимова может иметь место только при тех значениях квазиимпульса K , которые лежат на некотором многообразии M коразмерности не меньше 1.

В настоящей работе на трехмерной решетке рассматривается система трех квантовых частиц (две из них бозоны, а третья – произвольная), взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Описан существенный спектр, доказано существование эффекта Ефимова в случаях, когда либо две, либо три двухчастичные подсистемы системы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае трехчас-

тичного существенного спектра при нулевом значении полного квазиимпульса ($K = 0$), а также показана конечность числа связанных состояний при малых значениях полного квазиимпульса ($K \neq 0$).

2. ОПИСАНИЕ ТРЕХЧАСТИЧНЫХ И КАНАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^3$. Обозначим через $\ell_{12}^{\text{sym}}((\mathbb{Z}^3)^3) \subset \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ подпространство, состоящее из функций $\psi \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$, симметричных относительно перестановки первых двух переменных, т.е. $\psi(n_1, n_2, n_3) = \psi(n_2, n_1, n_3)$. В координатном представлении гамильтониан системы трех частиц (два бозона, третья – произвольная) на трехмерной решетке действует в пространстве $\ell_{12}^{\text{sym}}((\mathbb{Z}^3)^3)$ по формуле

$$\hat{H} = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1 - \mu_2 \hat{V}_2 - \mu_3 \hat{V}_3,$$

где

$$\begin{aligned} (\hat{H}_0 \psi)(n_1, n_2, n_3) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^3} (\hat{\varepsilon}_1(s) \psi(n_1 + s, n_2, n_3) + \\ &\quad + \hat{\varepsilon}_2(s) \psi(n_1, n_2 + s, n_3) + \hat{\varepsilon}_3(s) \psi(n_1, n_2, n_3 + s)), \\ (\hat{V}_\alpha \psi)(n_1, n_2, n_3) &= \delta_{n_\beta n_\gamma} \psi(n_1, n_2, n_3), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \\ \hat{\varepsilon}_\alpha(s) &= \begin{cases} 3l_\alpha & \text{при } s = 0, \\ -\frac{l_\alpha}{2} & \text{при } |s| = 1, \\ 0 & \text{при } |s| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Здесь $\mu_1 > 0$ – энергия взаимодействия бозона с третьей частицей, $\mu_3 > 0$ – энергия взаимодействия двух бозонов, δ_{nm} – символ Кронекера, $m_\alpha = 1/l_\alpha$ – масса частицы.

Пусть $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_3$ – гамильтонианы каналов подсистем $\{1\}\{2, 3\}$ и $\{1, 2\}\{3\}$ системы $\{1, 2, 3\}$. Гамильтониан $\hat{H}_\alpha$ описывает систему трех частиц, в которой взаимодействуют только частицы β и γ , а третья частица (α) свободна.

В координатном представлении гамильтонианы $\hat{H}_1$ и $\hat{H}_3$ действуют соответственно в пространствах $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ и $\ell_{12}^{\text{sym}}((\mathbb{Z}^3)^3)$ по формулам

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_0 - \mu_1 \hat{V}_1, \quad \hat{H}_3 = \hat{H}_0 - \mu_3 \hat{V}_3.$$

Пусть T^3 – трехмерный тор, $L_2((T^3)^n)$, $n = 1, 2, 3$, – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(T^3)^n$, и $L_2^{\text{sym}}((T^3)^2) \subset L_2((T^3)^2)$ ($L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3) \subset L_2((T^3)^3)$) – подпространство, состоящее из функций, симметричных относительно перестановки переменных (первых двух).

В дальнейшем интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всему тору T^3 . Предположим, что на торе выбрана единичная мера, т.е. $\int_{T^3} ds = 1$.

Переход из координатного представления гамильтониана в импульсное осуществляется при помощи преобразования Фурье:

$$\mathcal{F}_n: L_2((T^3)^n) \rightarrow \ell_2((\mathbb{Z}^3)^n).$$

Обозначим через $H = \mathcal{F}_3^{-1} \hat{H} \mathcal{F}_3$ импульсное представление гамильтониана системы трех частиц. Оператор H действует в $L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3)$ по формуле

$$H = H_0 - V, \quad V = \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + \mu_3 V_3,$$

где

$$\begin{aligned} (H_0 f)(k_1, k_2, k_3) &= (\varepsilon_1(k_1) + \varepsilon_1(k_2) + \varepsilon_3(k_3)) f(k_1, k_2, k_3), \quad f \in L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3), \\ (V_\alpha f)(k_1, k_2, k_3) &= \int_{(T^3)^3} \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3, \\ f &\in L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3), \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

$\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака,

$$\varepsilon_\alpha(p) = l_\alpha \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}).$$

В импульсном представлении гамильтонианы каналов трех частиц $H_1 = \mathcal{F}_3^{-1} \hat{H}_1 \mathcal{F}_3$ и $H_3 = \mathcal{F}_3^{-1} \hat{H}_3 \mathcal{F}_3$ действуют соответственно в пространствах $L_2((T^3)^3)$ и $L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3)$ по формулам

$$H_1 = H_0 - \mu_1 V_1, \quad H_3 = H_0 - \mu_3 V_3.$$

Пусть $K = k_1 + k_2 + k_3$ – полный квазиимпульс системы трех частиц. Шестимерное многообразие $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (T^3)^3: k_1 + k_2 + k_3 = K\}$ изоморфно к множеству $(T^3)^2$. Изоморфизм осуществляется с помощью отображения

$$\Sigma_K: F_K \rightarrow (T^3)^2, \quad \Sigma_K((p, q, K - p - q)) = (p, q).$$

Определим ограниченные самосопряженные операторы

$$H_1(K)f = H_0(K)f - \mu_1 V_1 f, \quad f \in L_2((T^3)^2), \quad (2.1)$$

$$H_3(K)f = H_0(K)f - \mu_3 V_3 f, \quad f \in L_2^{\text{sym}}((T^3)^2), \quad (2.2)$$

$$H(K)f = H_0(K)f - \mu_1 V_1 f - \mu_2 V_2 f - \mu_3 V_3 f, \quad f \in L_2^{\text{sym}}((T^3)^2), \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} (H_0(K)f)(p, q) &= \varepsilon_K(p, q) f(p, q), \\ \varepsilon_K(p, q) &= \varepsilon_1(p) + \varepsilon_1(q) + \varepsilon_3(K - p - q), \\ (V_1 f)(p, q) &= \int f(p, k) dk, \quad (V_2 f)(p, q) = \int f(k, q) dk, \\ (V_3 f)(p, q) &= \int f(p + q - k, k) dk. \end{aligned}$$

Обозначим через $L^{\text{sym}}(F_K) \subset L_2(F_K)$ подпространство гильбертова пространства всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на F_K , удовлетворяющих условию $f(k_1, k_2, K - k_1 - k_2) = f(k_2, k_1, K - k_1 - k_2) = f(k_1, k_2, k_3)$.

Пространства $L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3)$ и $L_2((T^3)^3)$ представимы в виде прямых интегралов

$$L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3) = \int \bigoplus L^{\text{sym}}(F_K) dK, \quad L_2((T^3)^3) = \int \bigoplus L_2(F_K) dK.$$

Операторы H и H_i , $i = 1, 3$, коммутируют с группой операторов $\{U_s, s \in \mathbb{Z}^3\}$, где U_s действует в $L_2((T^3)^3)$ по формуле

$$(U_s f)(k_1, k_2, k_3) = e^{i(k_1 + k_2 + k_3, s)} f(k_1, k_2, k_3).$$

Поэтому операторы H и H_i , $i = 1, 3$, можно разложить в прямые интегралы

$$\begin{aligned} H &= \int \bigoplus \tilde{H}(K) dK \quad \text{в} \quad L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3) = \int \bigoplus L^{\text{sym}}(F_K) dK, \\ H_1 &= \int \bigoplus \tilde{H}_1(K) dK \quad \text{в} \quad L_2((T^3)^3) = \int \bigoplus L_2(F_K) dK, \\ H_3 &= \int \bigoplus \tilde{H}_3(K) dK \quad \text{в} \quad L_{12}^{\text{sym}}((T^3)^3) = \int \bigoplus L^{\text{sym}}(F_K) dK, \end{aligned}$$

где $\tilde{H}_i(K)$, $i = 1, 3$, и $\tilde{H}(K)$ – ограниченные самосопряженные операторы, унитарно-эквивалентные операторам $H(K)$ и $H_i(K)$, $i = 1, 3$, $K \in T^3$, определенным формулами (2.1)–(2.3). Унитарная эквивалентность этих операторов осуществляется с помощью унитарного оператора

$$U_K: L_2(F_K) \rightarrow L_2((T^3)^2), \quad U_K f = f \circ \Sigma_K^{-1}, \quad K \in T^3,$$

т.е.

$$H(K) = U_K \tilde{H}(K) U_K^{-1}, \quad H_i(K) = U_K \tilde{H}_i(K) U_K^{-1}, \quad i = 1, 3.$$

Пусть $L(k) \subset L_2(T^3)$ – подпространство функций $f \in L_2(T^3)$, удовлетворяющих условию $f(k - p) = f(p)$.

Операторы $H_1(K)$ и $H_3(K)$ коммутируют с группой $\{U_s^{(1)}, s \in \mathbb{Z}^3\}$ и $\{U_s^{(3)}, s \in \mathbb{Z}^3\}$, соответственно. Операторы $U_s^{(1)}$ и $U_s^{(3)}$ действуют в $L_2((T^3)^2)$ по формулам

$$(U_s^{(1)} f)(p, q) = e^{i(s, p)} f(p, q), \quad (U_s^{(3)} f)(p, q) = e^{i(s, p+q)} f(p, q).$$

Поэтому операторы $H_1(K)$ и $H_3(K)$ можно разложить в прямые интегралы

$$H_1(K) = \int \bigoplus \tilde{H}_1(K, p) dp \quad \text{в} \quad L_2((T^3)^2) = \int \bigoplus L_2(T^3) dp, \quad (2.4)$$

$$H_3(K) = \int \bigoplus \tilde{H}_3(K, p) dk \quad \text{в} \quad L_2^{\text{sym}}((T^3)^2) = \int \bigoplus L(p) dp, \quad (2.5)$$

где $\tilde{H}_1(K, p)$ и $\tilde{H}_3(K, p)$ действуют в $L_2(T^3)$ и $L(p)$ по формулам

$$\begin{aligned}(\tilde{H}_1(K, p)f)(q) &= \varepsilon_1(K, p; q)f(q) - \mu_1 \int f(k) dk, \\(\tilde{H}_3(K, p)f)(q) &= \varepsilon_3(K, p; q)f(q) - \mu_3 \int f(k) dk,\end{aligned}\quad (2.6)$$

где $\varepsilon_1(K, p; q) = \varepsilon_1(p) + \varepsilon_1(q) + \varepsilon_3(K - p - q)$, $\varepsilon_3(K, p; q) = \varepsilon_1(q) + \varepsilon_1(p - q) + \varepsilon_3(K - p)$. Заметим, что оператор $\tilde{H}_3(K, p)$ унитарно-эквивалентен оператору $H_3(K, p)$, $K, p \in T^3$, действующему в $L_2^{\text{ч}}(T^3) \subset L_2(T^3)$ – подпространстве четных функций – по формуле

$$(H_3(K, p)f)(q) = \varepsilon_3(K, p; q)f(q) - \mu_3 \int f(k) dk, \quad (2.7)$$

где $\varepsilon_3(K, p; q) = \varepsilon_1(p/2 + q) + \varepsilon_1(p/2 - q) + \varepsilon_3(K - p)$.

Пусть $C(T^3)$ – пространство непрерывных функций, определенных на T^3 , $\mu_i v = H_i(K, p) - H_i^0(K, p)$, $R_0^{(i)}(K, p; z) = (H_i^0(K, p) - z)^{-1}$ – резольвента оператора $H_i^0(K, p)$ (оператора умножения на функцию $\varepsilon_i(K; p, q)$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Если уравнение $\varphi = \mu_i v R_0^{(i)}(0, 0; 0)\varphi$ имеет единственное нетривиальное решение φ , $\varphi(0) \neq 0$, в пространстве $C(T^3)$, то говорят, что оператор $H_i(0, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра (см. также [4]).

Пусть

$$\begin{aligned}\mu_{\min}^{(i)}(K) &= \min_p \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_i(K; p, q) - m_K} \right)^{-1}, \\ \mu_{\max}^{(i)}(K) &= \max_p \left(\int \frac{dq}{\varepsilon_i(K; p, q) - m_K} \right)^{-1}.\end{aligned}$$

Обозначим $U'_\delta(0) \subset T^3$ выколотую δ -окрестность точки $p = 0$ и $\mu_\alpha^0 = \mu_{\min}^{(\alpha)}(0)$, $\alpha = 1, 3$.

Теперь сформулируем основные результаты данной работы.

ТЕОРЕМА 1. 1. Для всех $K \in T^3$ существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ оператора $H(K)$ состоит из объединения спектров операторов каналов $H_1(K)$ и $H_3(K)$, т.е.

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K)).$$

2. Спектр оператора $H(K)$, $K \in T^3$, содержится в интервале $(-\infty, M_K]$, т.е. $\sigma(H(K)) \cap (M_K, \infty) = \emptyset$, где

$$m_K = \min_{p, q} \varepsilon_K(p, q) \quad \text{и} \quad M_K = \max_{p, q} \varepsilon_K(p, q).$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) оператор $H_1(0, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра, т.е. $\mu_1 = \mu_1^0$ и $\mu_3 \in [0, \mu_3^0]$;

2) операторы $H_1(0, 0)$ и $H_3(0, 0)$ имеют виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра, т.е. $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 3$.

Тогда оператор $H(0)$ имеет бесконечное число отрицательных собственных значений $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$; при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} E_n = 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В теореме 2 утверждается, что если хотя бы две двухчастичные подсистемы системы трех частиц имеют виртуальные уровни на левом крае существенного спектра, то трехчастичная система имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к левому краю “трехчастичного” существенного спектра.

ТЕОРЕМА 3. 1. Пусть оператор $H_3(0, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра, т.е. $\mu_3 = \mu_3^0$. Тогда для любого $\mu_1 \in (0, \mu_1^0)$ оператор $H(0)$ может иметь лишь конечное число собственных значений.

2. Пусть $\mu_1 \in [0, \mu_1^0]$ и $\mu_3 \in [0, \mu_3^0]$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что для любого $K \in U'_\delta(0)$ оператор $H(K)$ может иметь лишь конечное число собственных значений.

3. СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ КАНАЛОВ

В этом параграфе мы изучим некоторые спектральные свойства самосопряженных операторов канала $H_i(K)$, $K \in T^3$, $i = 1, 3$, определенных формулами (2.1) и (2.2).

Из (2.4) и (2.5) следует, что

$$\sigma(H_\alpha(K)) = \bigcup_{p \in T^3} \sigma(H_\alpha(K, p)), \quad \alpha = 1, 3. \quad (3.1)$$

Здесь операторы $H_1(K, p)$ и $H_3(K, p)$ действуют по формулам (2.6) и (2.7).

Обозначим

$$\begin{aligned} \Delta_\mu^{(i)}(K, p; z) &= 1 - \mu \int \frac{dq}{\varepsilon_i(K; p, q) - z}, \\ z &\in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(i)}(K, p), \varepsilon_{\max}^{(i)}(K, p)], \quad i = 1, 3, \\ \varepsilon_{\min}^{(i)}(K, p) &= \min_{q \in T^3} \varepsilon_i(K; p, q), \quad \varepsilon_{\max}^{(i)}(K, p) = \max_{q \in T^3} \varepsilon_i(K; p, q), \quad i = 1, 3. \end{aligned}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество

$$\sigma_{\text{two}}(H_i(K)) = \bigcup_{p \in T^3} \{z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(i)}(K, p), \varepsilon_{\max}^{(i)}(K, p)] : \Delta_\mu^{(i)}(K, p; z) = 0\}$$

называется “двухчастичной ветвью” существенного спектра оператора $H(K)$.

ЛЕММА 1. *Имеет место соотношение*

$$\sigma(H_i(K)) = [m_K, M_K] \cup \sigma_{\text{two}}(H_i(K)).$$

ЛЕММА 2. 1. *Для любого $\mu \in (0, \mu_{\min}^{(\alpha)}(K))$ верно соотношение $\sigma_{\text{two}}(H_\mu^{(\alpha)}(K)) \subset [m_K, M_K]$.*

2. *При $\mu = \mu_{\min}^{(\alpha)}(K)$ левый край двухчастичной ветви существенного спектра $\sigma_{\text{two}}(H_\mu^{(\alpha)}(K))$ совпадает с m_K .*

3. *При $\mu > \mu_{\max}^{(\alpha)}(K)$ спектр $\sigma(H_\mu^{(\alpha)}(K))$ оператора $H_\mu^{(\alpha)}(K)$ состоит из двух непересекающихся отрезков $\sigma_{\text{two}}(H_\mu^{(\alpha)}(K))$ и $[m_K, M_K]$.*

Заметим, что оператор $\mu_\alpha v$ является компактным; в силу теоремы Вейля о существенном спектре [12] существенный спектр $\sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K, p))$, $\alpha = 1, 3$, оператора $H_\alpha(K, p)$ не зависит от $\mu_\alpha v$ и совпадает со спектром оператора $H_\alpha^0(K, p)$, т.е.

$$[\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(K, p)] = \sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K, p)), \quad \alpha = 1, 3.$$

ЛЕММА 3. *Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H_\alpha^0(K, p))$ является собственным значением оператора $H_\alpha(K, p)$ тогда и только тогда, когда $\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p; z) = 0$.*

Аналогичная лемма доказана в работе [11].

Заметим, что функции

$$\varepsilon_1\left(\frac{p}{2} - q\right) + \varepsilon_1\left(\frac{p}{2} + q\right), \quad \varepsilon_1(q) + \varepsilon_3(p - q)$$

представимы в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_1\left(\frac{p}{2} - q\right) + \varepsilon_1\left(\frac{p}{2} + q\right) &= 2l_1 \sum_{i=1}^3 \left(1 - \cos \frac{p_i}{2} \cos q_i\right), \\ \varepsilon_1(q) + \varepsilon_3(p - q) &= \sum_{i=1}^3 \left(l_1 + l_3 - \sqrt{l_3^2 + 2l_3l_1 \cos p_i + l_1^2 \cos(q_i - \varphi(p_i))}\right), \end{aligned}$$

где

$$\varphi(p_i) = \arccos \frac{l_3 + l_1 \cos p_i}{\sqrt{l_3^2 + 2l_3l_1 \cos p_i + l_1^2}}.$$

Поэтому функции $\varepsilon_1(K, p; q)$ и $\varepsilon_3(K, p; q)$ принимают минимальные значения соответственно в точках $p = (0, 0, 0)$ и $q = (\varphi(K_1 - p_1), \varphi(K_2 - p_2), \varphi(K_3 - p_3))$ и

$$\varepsilon_{\min}^{(1)}(K, p) = \varepsilon_1(p) + \sum_{i=1}^3 \left(l_1 + l_3 - \sqrt{l_3^2 + 2l_3l_1 \cos(k_i - p_i) + l_1^2}\right), \quad (3.2)$$

$$\varepsilon_{\min}^{(3)}(K, p) = \varepsilon_3(K - p) + 2l_1 \sum_{i=1}^3 \left(1 - \cos \frac{p_i}{2}\right). \quad (3.3)$$

Так как минимум функции $\varepsilon_i(K, p, \cdot)$, $i = 1, 3$, невырожденный, то существует интеграл

$$\int \frac{dq}{\varepsilon_i(K, p, q) - \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)}.$$

Введем следующее обозначение:

$$\hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p) = \left[\int \frac{dq}{\varepsilon_i(K, p, q) - \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)} \right]^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 4. Пусть $K, p \in T^3$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Если $\mu \in (0, \hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)]$, то оператор $H_\alpha(K, p)$ не имеет собственных значений ниже непрерывного спектра.

2. Если $\mu > \hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)$, то оператор $H_\alpha(K, p)$ обладает единственным простым собственным значением, лежащим левее непрерывного спектра.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z)$ непрерывна по совокупности переменных и строго убывает по переменным μ и z соответственно при фиксированных $K, p \in T^3$, $z \in (-\infty, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p))$ и $K, p \in T^3$, $\mu \in (0, \hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)]$. Из определения $\hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)$ имеем $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z) > \Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)) > \Delta_{\hat{\mu}^{(\alpha)}}^{(\alpha)}(K, p; \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)) = 0$ при $\mu \leq \hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)$ и $z < \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)$. Применяя лемму 3, получим утверждение 1 теоремы 4.

Докажем утверждение 2. Из монотонности функции $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p))$ по μ следует, что

$$\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)) < 0$$

при $\mu > \hat{\mu}^{(\alpha)}(K, p)$.

Фиксируя μ , получим $\lim_{z \rightarrow -\infty} \Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z) = 1$. Следовательно, существует $z_1 < \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)$ такое, что $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z_1) > 0$. Так как непрерывная функция $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z)$ принимает на концах сегмента $[z_1, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)]$ значения разных знаков, то она обращается в нуль в некоторой точке $z^* \in (z_1, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p))$. В силу монотонности эта точка единственна. По лемме 3 число z^* является собственным значением оператора $H_\alpha(K, p)$. Теорема 4 доказана.

Доказательство лемм 1 и 2 вытекает из теоремы 4 и соотношения (3.1).

ЛЕММА 4. Пусть $\mu = \mu_\alpha(0) = \min_p \mu^{(\alpha)}(0, p)$. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Оператор $H_\alpha(0, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра, т.е. в точке $z = 0$.

2. При всех $K \neq p$ ($p \neq 0$) оператор $H_1(K, p)$ ($H_3(K, p)$) имеет единственное положительное собственное значение $E_\mu^{(1)}(K, p) = z_1(K - p) + \varepsilon_3(p)$ ($E_\mu^{(3)}(K, p) = z_3(p) + \varepsilon_1(K - p)$), лежащее в интервале $(0, \varepsilon_{\min}^{(1)}(K, p))$ ($(0, \varepsilon_{\min}^{(3)}(K, p))$), где аналитически в $T^3 \setminus \{0\}$ функции $z_\alpha(k)$, $\alpha = 1, 3$, являются решениями уравнения

$$D_\alpha(k, z) = 1 - \mu_\alpha \int \frac{dq}{\varepsilon_1(q) + \varepsilon_\alpha(k - q) - z} = 0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$\mu_\alpha(0) = \min_p \left[\int \frac{dq}{\varepsilon_\alpha(0; p, q) - 0} \right]^{-1} = \left[\int \frac{dq}{\varepsilon_1(q) + \varepsilon_\alpha(q)} \right]^{-1}.$$

Докажем утверждение 1. Пусть $\mu = \mu_\alpha(0)$. В этом случае уравнение

$$\varphi = \mu_\alpha v R_0^{(\alpha)}(0, 0; 0) \varphi$$

имеет нетривиальное решение $\varphi(p) \equiv 1$. Это означает, что оператор $H_\alpha(0, 0)$ имеет виртуальный уровень на левом крае непрерывного спектра.

Докажем утверждение 2. Из равенств (3.2) и (3.3) следует, что

$$\begin{aligned} \int \frac{dq}{\varepsilon_1(K; p, q) - \varepsilon_{\min}^{(1)}(K, p)} &= \int \frac{dq}{\sum_{i=1}^3 \sqrt{l_1^2 + 2l_3 l_1 \cos(K_i - p_i) + l_3^2 (1 - \cos q_i)}} > \\ &> \int \frac{dq}{(l_1 + l_3) \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q_i)} = \\ &= \int \frac{dq}{\varepsilon_1(q) + \varepsilon_3(q)} = \frac{1}{\mu_3(0)}, \quad K \neq p, \\ \int \frac{dq}{\varepsilon_3(K; p, q) - \varepsilon_{\min}^{(3)}(K, p)} &= \int \frac{dq}{2l_1 \sum_{i=1}^3 \cos(p_i/2)(1 - \cos q_i)} > \\ &> \int \frac{dq}{2l_1 \sum_{i=1}^3 (1 - \cos q_i)} = \int \frac{dq}{2\varepsilon_1(q)} = \frac{1}{\mu_1(0)}, \quad p \neq 0. \end{aligned}$$

Отсюда и по определению $\mu_\alpha(0)$ имеем

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p; \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)) < 0.$$

Аналогично можно показать, что $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p, 0) > 0$.

Функция $\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) = D_1(K - p; z - \varepsilon_1(p))$ ($\Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z) = D_3(p; z - \varepsilon_3(K - p))$) непрерывна по совокупности переменных и строго убывает по переменным z при фиксированных $K \neq p$, ($K, p \neq 0$). Так как непрерывная функция $\Delta_\mu^{(\alpha)}(K, p; z)$ принимает на концах сегмента $[0, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p)]$ значения разных знаков, то она обращается в нуль в некоторой точке $z^* \in (0, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(K, p))$. В силу монотонности эта точка единственна. По лемме 3 число $z^* = E_\mu^{(\alpha)}(K, p)$ является собственным значением оператора $H_\alpha(K, p)$. Далее аналитичность функции $z_\alpha(p)$ следует из теоремы о неявной функции.

4. СУЩЕСТВЕННЫЙ СПЕКТР ОПЕРАТОРА $H(K)$

Определим оператор $\mathbf{T}(K, z)$, $z \notin \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$, в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}(T^3) = L_2(T^3) \times L_2(T^3)$ формулой

$$\mathbf{T}(K, z) = \begin{pmatrix} \mu_1 T_{11}(K, z) & \sqrt{2\mu_1 \mu_3} T_{12}(K, z) \\ \sqrt{2\mu_1 \mu_3} T_{21}(K, z) & 0 \end{pmatrix},$$

где $T_{\alpha\beta}(K, z)$ – интегральный оператор, действующий в $L_2(T^3)$ и порожденный ядром $T_{\alpha\beta}(K, z; p, p')$:

$$\begin{aligned} T_{11}(K, z; p, p') &= \frac{(\varepsilon_K(p, p') - z)^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) \Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p'; z)}}, \\ T_{12}(K, z; p, p') &= \frac{(\varepsilon_K(p, p' - p) - z)^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) \Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p'; z)}}, \\ T_{21}(K, z; p, p') &= T_{12}(K, z; p', p). \end{aligned}$$

ЛЕММА 5. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$ является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 есть собственное значение оператора $\mathbf{T}(K, z)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала необходимость выполнения поставленного условия. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$ – собственное число, а $f \in L_2^{\text{sym}}((T^3)^2)$ – соответствующая собственная функция оператора $H(K)$, т.е. уравнение

$$\varepsilon_K(p, q)f(p, q) - \mu_1 \int f(p, s) ds - \mu_1 \int f(s, q) ds - \mu_3 \int f(p+q-s, s) ds = zf(p, q) \quad (4.1)$$

имеет ненулевое решение.

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi(p) &= \int f(p, p') dp', \\ \psi(p) &= \int f(p - p', p') dp'. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из равенства (4.1) получаем

$$f(p, q) = \frac{1}{\varepsilon_K(p, q) - z} [\mu_1 \varphi(p) + \mu_1 \varphi(q) + \mu_3 \psi(p+q)]. \quad (4.3)$$

Подставляя это выражение в (4.2), получим, что функции φ и ψ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \varphi(p) \left(1 - \mu_1 \int \frac{dp'}{\varepsilon_K(p, p') - z} \right) &= \mu_1 \int \frac{\varphi(p') dp'}{\varepsilon_K(p, p') - z} + \mu_3 \int \frac{\psi(p+p') dp'}{\varepsilon_K(p, p') - z}, \\ \psi(p) \left(1 - \mu_3 \int \frac{dp'}{\varepsilon_K(p-p', p') - z} \right) &= \mu_1 \int \frac{\varphi(p-p') dp'}{\varepsilon_K(p-p', p') - z} + \mu_1 \int \frac{\varphi(p') dp'}{\varepsilon_K(p-p', p') - z}. \end{aligned}$$

Произведя в этой системе уравнений замену переменных $p+p' = s'$ и $p-p' = s'$ в первых интегралах правой части равенств и пользуясь равенством $\varepsilon_K(p-s, s) = \varepsilon_K(s, p-s)$, убедимся, что ψ и φ удовлетворяют следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} \varphi(p) \Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) &= \mu_1 \int \frac{\varphi(s) ds}{\varepsilon_K(p, s) - z} + \mu_3 \int \frac{\psi(s') ds'}{\varepsilon_K(p, s' - p) - z}, \\ \psi(p) \Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z) &= 2\mu_1 \int \frac{\varphi(s) ds}{\varepsilon_K(p-s, s) - z}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Так как $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$, то $\Delta_{\mu_i}^{(i)}(K, p; z) \neq 0$, $i = 1, 3$, для любых $p \in T^3$. Следовательно, функции

$$\varphi(p) = \frac{\hat{\varphi}(p)}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z)}}, \quad \psi(p) = \frac{\hat{\psi}(p)}{\sqrt{\frac{2\mu_1}{\mu_3} \Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z)}}$$

принадлежат $L_2(T^3)$, а функции $\hat{\psi}, \hat{\varphi} \in L_2(T^3)$ удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(p) &= \mu_1 \int \frac{(\varepsilon_K(p, p') - z)^{-1} \hat{\varphi}(p') dp'}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) \Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p'; z)}} + \sqrt{2\mu_1 \mu_3} \int \frac{(\varepsilon_K(p, p' - p) - z)^{-1} \hat{\psi}(p') dp'}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) \Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p'; z)}}, \\ \hat{\psi}(p) &= \sqrt{2\mu_1 \mu_3} \int \frac{(\varepsilon_K(p - p', p) - z)^{-1} \hat{\varphi}(p') dp'}{\sqrt{\Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z) \Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p'; z)}}, \end{aligned} \quad (4.5)$$

т.е. число 1 есть собственное значение, а $(\hat{\varphi}, \hat{\psi}) \in L_2^{(2)}(T^3)$ является соответствующим собственным вектором оператора $\mathbf{T}(K, z)$.

Докажем теперь достаточность. Пусть число 1 есть собственное значение оператора $\mathbf{T}(K, z)$, $z \notin \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$, а $(\hat{\varphi}(p), \hat{\psi}(p)) \in L_2^{(2)}(T^3)$ — соответствующий собственный вектор, т.е. функции $\hat{\varphi}$ и $\hat{\psi}$ удовлетворяют системе интегральных уравнений (4.5). Ясно, что $\varphi(p) = \hat{\varphi}(p) / \sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z)}$ и $\psi(p) = \hat{\psi}(p) / \sqrt{(2\mu_1/\mu_3) \Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z)}$ принадлежат $L_2(T^3)$ и удовлетворяют системе интегральных уравнений (4.4). Определим функцию

$$f(p, q) = \frac{1}{\varepsilon_K(p, q) - z} [\mu_1 \varphi(p) + \mu_1 \varphi(q) + \mu_3 \psi(p + q)].$$

Легко проверить, что она удовлетворяет уравнению (4.1), т.е. число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$ является собственным значением, а $f(p, q)$ — соответствующим собственным вектором оператора $H(K)$.

Обозначим через $D(K, z)$ детерминант Фредгольма оператора $I - \mathbf{T}(K, z)$, где I — единичный оператор, действующий в $L_2^{(2)}(T^3)$. Из теоремы Фредгольма вытекает следующая лемма.

ЛЕММА 6. Число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$ есть собственное значение оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда $D(K, z) = 0$.

Теперь можно перейти к доказательству теоремы 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Учитывая (3.1), по определению существенного спектра имеем

$$\sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K)) \subset \sigma_{\text{ess}}(H(K)). \quad (4.6)$$

Обратно, так как функция $D(K, z)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))$ из леммы 6, получим

$$\sigma(H(K)) \setminus [\sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K))] \subset [\sigma_{\text{disc}}(H(K)) = \sigma(H(K))] \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K)),$$

поэтому

$$\sigma_{\text{ess}}(H(K)) \subset \sigma(H_1(K)) \cup \sigma(H_3(K)). \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) вытекает утверждение 1 теоремы 1.

Докажем утверждение 2. Заметим, что

$$\begin{aligned} \sup(H(K)f, f) &= \sup \left[\iint \varepsilon_K(p, q) f(p, q) \overline{f(p, q)} dp dq - 2\mu_1 \int \left| \int f(p, s) ds \right|^2 dp - \right. \\ &\quad \left. - \mu_3 \int \left| \int f(s, p-s) ds \right|^2 dp \right] \leq \\ &\leq \max_{p, q} \varepsilon_K(p, q) = M_K, \quad f \in L_2^{\text{sym}}((T^3)^2). \end{aligned}$$

Здесь верхняя грань берется по единичному шару пространства $L_2^{\text{sym}}((T^3)^2)$. Отсюда и в силу самосопряженности оператора $H(K)$ имеем

$$\sigma(H(K)) \cap (M_K, \infty) = \emptyset.$$

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО КОНЕЧНОСТИ ЧИСЛА СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА $H(K)$

В этом параграфе мы докажем конечность числа собственных значений оператора $H(K)$ в случае, когда обе двухчастичные подсистемы имеют виртуальные уровни при малых значениях квазиимпульса $K \in T^3$, отличных от нуля, либо при $K = 0$ только одна двухчастичная подсистема, состоящая из двух бозонов, имеет виртуальный уровень, а две подсистемы, состоящие из одного из бозонов и произвольной частицы, не имеют его.

Обозначим через $N(K; z)$, $z < \inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \tau(K)$, число собственных значений оператора $H(K)$, лежащих левее z . Пусть A – самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, и $\mathcal{H}_A(\lambda)$, $\lambda > \sup \sigma_{\text{ess}}(A)$, – подпространство, состоящее из векторов $f \in \mathcal{H}$, удовлетворяющих условию $(Af, f) > \lambda(f, f)$.

Положим

$$n(\lambda, A) = \sup_{\mathcal{H}_A(\lambda)} \dim \mathcal{H}_A(\lambda).$$

По определению $N(K, z) = n(-z, -H(K))$, $-z > -\tau(K)$.

ЛЕММА 7. Для каждого $z < \tau(K)$ выполняется равенство

$$N(K, z) = n(1, \mathbf{T}(K, z)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала докажем, что

$$N(K, z) = n(1, R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)), \quad V = V_1 + V_2 + V_3, \quad (5.1)$$

где $R_0(K; z)$ – резольвента оператора $H_0(K)$.

Предположим, что $u \in \mathcal{H}_{-H(K)}(-z)$, т.е. $((H(K) - z)u, u) < (Vu, u)$. Тогда

$$(y, y) < (R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z) y, y), \quad y = (H(K) - z)^{1/2} u.$$

Таким образом, $N(K, z) \leq n(1, R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z))$.

Рассуждая аналогично, получим обратное утверждение:

$$N(K, z) \geq n(1, R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)).$$

Отсюда следует равенство (5.1).

Рассмотрим теперь уравнение для собственных функций $f \in L_2((T^3)^2)$ оператора $R_0^{1/2}(K, z) V R_0^{1/2}(K, z)$:

$$\lambda f = R_0^{1/2}(K, z) [V_1 + V_2 + V_3] R_0^{1/2}(K, z) f, \quad \lambda \neq 0,$$

т.е. уравнение

$$\begin{aligned} \lambda f(p, q) = & \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_K(p, q) - z}} \left[\mu_1 \int \frac{f(p, s) ds}{\sqrt{\varepsilon_K(p, s) - z}} + \mu_1 \int \frac{f(s, q) ds}{\sqrt{\varepsilon_K(s, q) - z}} + \right. \\ & \left. + \mu_3 \int \frac{f(s, p + q - s) ds}{\sqrt{\varepsilon_K(s, p + q - s) - z}} \right]. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_1(p) &= \int \frac{f(p, s) ds}{\sqrt{\varepsilon_K(p, s) - z}}, \\ \varphi_2(p) &= \sqrt{\frac{\mu_3}{2\mu_1}} \int \frac{f(s, p + q - s) ds}{\sqrt{\varepsilon_K(s, p + q - s) - z}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из равенства (5.2) имеем

$$\lambda f(p, q) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_K(p, q) - z}} [\mu_1 \varphi_1(p) + \mu_1 \varphi_1(q) + \sqrt{2\mu_1 \mu_3} \varphi_2(p + q)].$$

Подставим это выражение в (5.3). Тогда функции φ_1 и φ_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений

$$\begin{aligned} \lambda \varphi_1(p) &= \mu_1 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} \varphi_1(p) + \mu_1 \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} + \sqrt{2\mu_1 \mu_3} \int \frac{\varphi_2(p + q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z}, \\ \lambda \varphi_2(p) &= \sqrt{\frac{\mu_3}{2\mu_1}} \left[\mu_1 \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(q, p - q) - z} + \mu_1 \int \frac{\varphi_1(p - q) dq}{\varepsilon_K(q, p - q) - z} \right] + \\ &+ \mu_3 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(q, p - q) - z} \varphi_2(p). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\begin{aligned}\int \frac{\varphi(p+q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} &= \int \frac{\varphi(q) dq}{\varepsilon_K(p, q-p) - z}, \\ \int \frac{\varphi(p-q) dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} &= \int \frac{\varphi(q) dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z},\end{aligned}$$

последнюю систему уравнений можно записать в виде

$$\lambda\varphi = \mathbf{L}(K, z)\varphi, \quad \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in L_2^{(2)}(T^3), \quad (5.4)$$

где $\mathbf{L}(K, z)$ – самосопряженный оператор в $L_2^{(2)}(T^3)$, определенный формулой

$$\mathbf{L}(K, z)\varphi = \begin{pmatrix} \mu_1 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} \varphi_1(p) + \mu_1 \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} + \sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_2(q) dq}{\varepsilon_K(p, q-p) - z} \\ \sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} + \mu_3 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} \varphi_2(p) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что уравнения (5.2) и (5.4) эквивалентны. Отсюда получаем, что $N(K, z) = n(1, \mathbf{L}(K, z))$.

Если мы докажем равенство

$$n(1, \mathbf{L}(K, z)) = n(1, \mathbf{T}(K, z)),$$

то лемма будет доказана.

Пусть $\varphi \in \mathcal{H}_{\mathbf{L}(K, z)}(1)$, т.е. $(\mathbf{L}(K, z)\varphi, \varphi) > (\varphi, \varphi)$ или

$$\begin{aligned}& \int \left[\mu_1 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} \varphi_1(p) + \mu_1 \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} + \right. \\ & \quad \left. + \sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_2(q) dq}{\varepsilon_K(p, q-p) - z} \right] \overline{\varphi_1(p)} dp + \\ & \quad + \int \left[\sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} + \mu_3 \int \frac{dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} \varphi_2(p) \right] \overline{\varphi_2(p)} dp > \\ & > \int \varphi_1(p) \overline{\varphi_1(p)} dp + \int \varphi_2(p) \overline{\varphi_2(p)} dp,\end{aligned}$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\begin{aligned}& \int \left[\mu_1 \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(p, q) - z} + \sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_2(q) dq}{\varepsilon_K(p, q-p) - z} \right] \overline{\varphi_1(p)} dp + \\ & \quad + \int \sqrt{2\mu_1\mu_3} \int \frac{\varphi_1(q) dq}{\varepsilon_K(q, p-q) - z} \overline{\varphi_2(p)} dp > \\ & > \int \Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z) \varphi_1(p) \overline{\varphi_1(p)} dp + \\ & \quad + \int \Delta_{\mu}^{(3)}(K, p; z) \varphi_2(p) \overline{\varphi_2(p)} dp.\end{aligned}$$

Введя обозначение $\hat{\varphi} = (\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2)$, где $\varphi_1(p) = \hat{\varphi}_1(p) / \sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K, p; z)}$, $\varphi_2(p) = \hat{\varphi}_2(p) / \sqrt{\Delta_{\mu_3}^{(3)}(K, p; z)}$, получим $(\mathbf{T}(K, z)\hat{\varphi}, \hat{\varphi}) > (\hat{\varphi}, \hat{\varphi})$, т.е.

$$n(1, \mathbf{L}(K, z)) \leq n(1, \mathbf{T}(K, z)).$$

Аналогично доказывается обратное утверждение:

$$n(1, \mathbf{L}(K, z)) \geq n(1, \mathbf{T}(K, z)).$$

Лемма 7 доказана.

ЛЕММА 8. Пусть $z_0 = \tau(K)$ и оператор $\mathbf{T}(K, z_0)$ компактен. Тогда оператор $H(K)$ может иметь лишь конечное число собственных значений, лежащих левее z_0 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать соотношение

$$\lim_{z \rightarrow z_0} N(K, z) = N_0 < \infty.$$

Так как для любого $z \leq z_0$ оператор $\mathbf{T}(K, z)$ компактен и является непрерывной операторнозначной функцией z , то существует число $\varepsilon > 0$ такое, что

$$n\left(\frac{1}{2}, \mathbf{T}(K, z) - \mathbf{T}(K, z_0)\right) = 0$$

для всех $z \in (z_0 - \varepsilon, z_0]$.

Далее в силу неравенства Вейля [13]

$$\begin{aligned} N(K, z) &= n(1, \mathbf{T}(K, z)) \leq n\left(\frac{1}{2}, \mathbf{T}(K, z) - \mathbf{T}(K, z_0)\right) + n\left(\frac{1}{2}, \mathbf{T}(K, z_0)\right) = \\ &= n\left(\frac{1}{2}, \mathbf{T}(K, z_0)\right) < \infty. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая монотонность $N(K, z)$, получим $\lim_{z \rightarrow z_0} N(K, z) = N_0 < \infty$.

Для удобства введем обозначения

$$\varepsilon_{11}(K; p, q) = \varepsilon_K(p, q), \quad \varepsilon_{13}(K; p, q) = \varepsilon_K(p - q, q).$$

Функция $\varepsilon_\alpha(p)$, $\alpha = 1, 3$, имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0$. Очевидно, что точка $(0, 0)$ является единственной невырожденной точкой минимума функции $\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q)$. Поэтому в силу аналитичности $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q)$ из теоремы о неявной функции следует, что существует аналитическая функция $P_\alpha(K)$, $\alpha = 1, 3$, определенная в некоторой окрестности $W_\delta(0)$ точки $K = 0$, и точка $(P_1(K), P_\alpha(K)) \in (\mathbf{T}^3)^2$ является точкой невырожденного минимума функции $\varepsilon_{1\alpha}(K; p, q)$, т.е.

$$m_K = \varepsilon_{1\alpha}(K; P_1(K), P_\alpha(K)), \quad K \in W_\delta(0).$$

Положим

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, P_\alpha^0(K); \tau_\alpha(K)) = \min_{p \in \mathbf{T}^3} \Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) = 0, \quad \alpha = 1, 3,$$

где $\tau_\alpha(K) = \inf \sigma_{\text{ess}}(H_\alpha(K))$.

Из утверждения 2 теоремы 4 следует, что $\tau_\alpha(K) \in (0, m_K)$ при $K \neq 0$.

В дальнейшем через C_1 , C_2 и C_3 будем обозначать различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

ЛЕММА 9. *Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства.*

1. $C_1(|p|^2 + |q|^2) \leq \varepsilon_{1\alpha}(0; p, q) \leq C_2(|p|^2 + |q|^2)$ при $p, q \in U_\delta(0)$, $\alpha = 1, 3$.
2. $\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q) \geq C_1$ при $(p, q) \notin U_\delta(p) \times U_\delta(p) = (U_\delta(p))^2$.
3. $C_1|p| \leq \Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(0, p; 0) \leq C_2|p|$ при $p \in U_\delta(0)$.
4. $\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(0, p; 0) > C_1$ при всех $p \in \mathbf{T}^3 \setminus U_\delta(0)$.
5. $\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(0, p; 0) > C_1$ при всех $p \in \mathbf{T}^3$ и $\mu_\alpha < \mu_\alpha^0$.

Аналогичная лемма доказана в работе [11].

ЛЕММА 10. *Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что выполняются следующие неравенства.*

1. $\varepsilon_{1\alpha}(K; p, q) - \tau_\alpha(K) > C_1 \geq \varepsilon_{1\alpha}(K; p, q) - m_K \geq 0$ при всех $p, q \in \mathbf{T}^3$.
2. $C_1|p - P_\alpha^0(K)|^2 \leq \Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) \leq C_2|p - P_\alpha^0(K)|^2$ при $p \in U_\delta(P_\alpha^0(K))$, $K \neq 0$, $\alpha = 1, 3$.
3. $\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) > C_1 \geq \Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) \geq 0$ при всех $p, K \in \mathbf{T}^3$ и $\mu_\alpha < \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение 1 вытекает из неравенства $\tau_\alpha(K) < m_K$, $K \neq 0$. Докажем утверждение 2. Заметим, что функция $\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, \cdot; \tau_\alpha(K))$ аналитична в T^3 при фиксированном $K \neq 0$. Поэтому

$$\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) = (E_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p) - \tau_\alpha(K)) \tilde{\Delta}_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) \quad (5.5)$$

при $p \in U_\delta(P_\alpha^0(K))$, где $\tilde{\Delta}_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K)) > 0$ при $p \in U_\delta(P_\alpha^0(K))$ и $E_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p)$ – собственное значение оператора $H_\alpha(K, p)$, $\alpha = 1, 3$. По определению

$$\tau_\alpha(K) = \min_{p \in \mathbf{T}^3} E_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p), \quad \alpha = 1, 3.$$

Напомним, что справедливы равенства $E_{\mu_1^0}^{(1)}(K, p) = z_1(K - p) + \varepsilon_1(p)$, $E_{\mu_3^0}^{(3)}(K, p) = z_3(p) + \varepsilon_3(K - p)$, где z_α , $\alpha = 1, 3$, – положительная аналитическая функция в $T^3 \setminus \{0\}$. Поэтому из невырожденности точки $p = 0$ функции $\varepsilon_\alpha(p)$ следует, что точка $P_\alpha^0(K)$ является точкой невырожденного минимума функции $E_{\mu_1^0}^{(1)}(K, p)$ при каждом K из некоторой $W'_\delta(0)$ – выколотой δ -окрестности точки $K = 0$. Отсюда и из представления (5.5) вытекает утверждение 2 леммы 10.

Так как $\Delta_{\mu_\alpha^0}^{(\alpha)}(K, p; \tau_\alpha(K))$ убывает по $\mu > 0$, то из определения μ_α^0 и $\tau_\alpha(K)$ следует, что для любого $\mu_\alpha < \mu_\alpha^0$ справедливо утверждение 3. Лемма 10 доказана.

Докажем теперь теорему 3.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3. Заметим, что при условиях утверждения 1 теоремы 3 $\inf \sigma_{\text{ess}}(H(0)) = 0$. Докажем компактность оператора $\mathbf{T}(0, 0)$. Для этого достаточно показать сходимость интегралов

$$\iint |T_{11}(0, 0; p, q)|^2 dp dq, \quad \iint |T_{12}(0, 0; p, q)|^2 dp dq, \quad (5.6)$$

где $T_{\alpha\beta}(K, z; p, q)$ – ядро оператора $T_{\alpha\beta}(K, z)$.

Пользуясь утверждением 5 леммы 9, для всех $p, q \in T^3$ получим оценку

$$|T_{11}(0, 0; p, q)| = \left| \frac{(\varepsilon_{11}(0; p, q))^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, q; 0)}} \right| \leq \frac{C}{\varepsilon_{11}(0; p, q)}.$$

Поэтому

$$\iint |T_{11}(0, 0; p, q)|^2 dp dq \leq \int_{(U_\delta(0))^2} \frac{C dp dq}{|\varepsilon_{11}(0; p, q)|^2} + \int_{(T^3)^2 \setminus (U_\delta(0))^2} \frac{C dp dq}{|\varepsilon_{11}(0; p, q)|^2}. \quad (5.7)$$

Сходимость интегралов правой части неравенства (5.7) следует из утверждений 1 и 3 леммы 9, соответственно.

Второй интеграл в (5.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \iint |T_{12}(0, 0; p, q)|^2 dp dq &= \int_{T^3} \int_{T^3 \setminus U_\delta(0)} \left| \frac{(\varepsilon_{13}(0; p, q))^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0)}} \right|^2 dp dq + \\ &+ \int_{T^3 \setminus U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \left| \frac{(\varepsilon_{13}(0; p, q))^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0)}} \right|^2 dp dq + \\ &+ \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \left| \frac{(\varepsilon_{13}(0; p, q))^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0)}} \right|^2 dp dq. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Пользуясь утверждениями 2, 4 и 5 леммы 9, получим, что $\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\varepsilon_{13}(0; p, q) \times \Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0) \geq C > 0$ для всех $p \in T^3$, $q \in T^3 \setminus U_\delta(0)$, а также $\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\varepsilon_{13}(0; p, q) \times \Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0) \geq C|q| > 0$ для всех $p \in T^3 \setminus U_\delta(0)$, $q \in U_\delta(0)$.

Отсюда вытекает сходимость первых двух интегралов правой части равенства (5.8). Из утверждений 1 и 3 леммы 9 имеем

$$\int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \left| \frac{(\varepsilon_{13}(0; p, q))^{-1}}{\sqrt{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; 0)\Delta_{\mu_3}^{(3)}(0, q; 0)}} \right| dp dq \leq \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{C dp dq}{(p^2 + q^2)^2 q} < \infty.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{T}(0, 0)$ является компактным. Отсюда и из леммы 8 получим утверждение 1 теоремы 3.

При условиях утверждения 2 теоремы 3 имеют место равенства

$$\inf \sigma_{\text{ess}}(H(K)) = \inf \{\tau_1(K), \tau_3(K)\} = \tau(K).$$

Пользуясь леммой 10 и рассуждая так же, как и выше, получаем компактность оператора $\mathbf{T}(K, \tau(K))$. Тогда в силу леммы 8 при малых $K \neq 0$ оператор $H(K)$ имеет конечное число собственных значений, лежащих левее $\tau(K)$.

6. БЕСКОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА $H(0)$

В этом параграфе мы докажем, что оператор $H(0)$ имеет бесконечное число собственных значений, накапливающихся к левому краю существенного спектра в случае, когда либо только две, либо все три двухчастичные подсистемы имеют виртуальные уровни на левом крае двухчастичного существенного спектра.

ЛЕММА 11. Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 3$. Тогда оператор $\mathbf{T}(0, z)$, $z \leq 0$, является ограниченным в пространстве $L_2^{(2)}(T^3)$ и сходится в сильной операторной топологии к оператору $\mathbf{T}(0, 0) = \mathbf{T}(0)$ при $z \rightarrow 0$. Норма оператора $\mathbf{T}(0, z)$ стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В дальнейшем $C > 0$ означает различные постоянные, а $\delta > 0$ — достаточно малое число. Сначала докажем ограниченность оператора $\mathbf{T}(0, z)$ при $z \leq 0$. Достаточно показать ограниченность $T_{11}(0, z)$ и $T_{12}(0, z)$ — матричных элементов оператора $\mathbf{T}(0, z)$. Для этого представим оператор $T_{11}(0, z)$ в виде суммы двух операторов:

$$\begin{aligned} T_{11}(0, z)\varphi(p) &= \int_{U_\delta} T_{11}(0, z; p, p')\varphi(p') dp' + \int_{T^3 \setminus U_\delta} T_{11}(0, z; p, p')\varphi(p') dp' = \\ &= T_{11}^0(z)\varphi(p) + T_{11}^1(z)\varphi(p), \end{aligned}$$

где $U_\delta = U_\delta(0)$ — малая окрестность точки $p = 0$.

Докажем ограниченность оператора $T_{11}^0(z)$, $z \leq 0$. Пусть $\psi(p) = T_{11}^0(z)\varphi(p)$. Тогда

$$\begin{aligned} \int_{T^3} |\psi(p)|^2 dp &= \int_{T^3 \setminus U_\delta} \frac{1}{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; z)} \left| \int_{U_\delta} \frac{[\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p'; z)]^{-1/2} \varphi(p') dp'}{\varepsilon_{13}(0; p, p') - z} \right|^2 dp + \\ &+ \int_{U_\delta} \frac{1}{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; z)} \left| \int_{U_\delta} \frac{[\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p'; z)]^{-1/2} \varphi(p') dp'}{\varepsilon_{13}(0; p, p') - z} \right|^2 dp. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Применяя к внутренним интегралам в правой части формулы (6.1) неравенство Шварца и пользуясь утверждениями 2–4 леммы 9, получаем

$$\begin{aligned} \int_{T^3} |\psi(p)|^2 dp &\leq C \|\varphi\|^2 + \int_{U_\delta} \frac{dp}{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p; z)} \int_{U_\delta} \frac{[\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, q; z)]^{-2}}{\varepsilon_{13}(0; p, q) - z} dq \times \\ &\times \int_{U_\delta} \frac{\Delta_{\mu_1}^{(1)}(0, p'; z) |\varphi(p')|^2 dp'}{\varepsilon_{13}(0; p, p') - z}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Из утверждений 1 и 3 леммы 9 следует, что второе слагаемое в правой части неравенства (6.2) оценивается следующей величиной:

$$C \int_{U_\delta} \frac{dp}{|p|} \int_{U_\delta} \frac{q^{-2} dq}{p^2 + q^2} \int_{U_\delta} \frac{|p'| |\varphi(p')|^2}{p^2 + p'^2} dp'.$$

Далее, оценивая внутренний интеграл и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} C \int_{U_\delta} \frac{dp}{|p|^2} \int_{U_\delta} \frac{|p'|}{p^2 + p'^2} |\varphi(p')|^2 dp' &= C \int_{U_\delta} |p'| |\varphi(p')|^2 dp' \int_{U_\delta} \frac{p^2}{p^2 + p'^2} dp \leq \\ &\leq C \int_{U_\delta} |\varphi(p')|^2 dp' \leq C \|\varphi\|^2. \end{aligned}$$

Таким образом, $\|T_{11}^0(z)\varphi\| \leq C\|\varphi\|$ при $z \leq 0$.

Аналогично доказывается ограниченность операторов $T_{11}^1(z)$ и $T_{12}(0, z)$ при $z \leq 0$. Сильная сходимость оператора $\mathbf{T}(0, z)$ к оператору $\mathbf{T}(0)$ при $z \rightarrow 0$ доказывается с помощью леммы 9. Ядро $T_{\alpha\beta}(0, z; p, p')$ интегрального оператора $T_{\alpha\beta}(0, z)$ при $z < 0$ — квадратично-интегрируемая функция, и интеграл от нее стремится к нулю при $z \rightarrow -\infty$. Поэтому $\|\mathbf{T}(0, z)\| \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$. Лемма 11 доказана.

В лемме 11 мы доказали, что $\mathbf{T}(0, 0) = \mathbf{T}(0)$ является интегральным оператором, где $\mathbf{T}(0)$ — оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2^{(2)}(T^3)$ и порожденный ядром $T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p')$.

Обозначим через $\chi_\rho(p)$ характеристическую функцию шара $B_\rho(0) \subset T^3$ для некоторого $\rho > 0$, а через $\mathbf{T}_\rho(0)$ — матричнозначный интегральный оператор, действующий в пространстве $L_2^{(2)}(T^3)$ и порожденный ядром

$$t_{\alpha\beta}(0; p, p') = \chi_\rho(p) T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p') \chi_\rho(p').$$

ЛЕММА 12. Оператор $\mathbf{T}_\rho(0) - \mathbf{T}(0)$ является оператором Гильберта–Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Q_{\alpha\beta}(0; p, p') = t_{\alpha\beta}(0; p, p') - T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p')$ — ядро оператора $\mathbf{T}_\rho(0) - \mathbf{T}(0)$. Тогда

$$Q_{\alpha\beta}(p, p') = \begin{cases} 0 & \text{при } p, p' \in B_\rho(0), \\ T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p') & \text{при всех остальных } p, p' \in T^3. \end{cases}$$

Достаточно показать квадратичную интегрируемость функции $Q_{\alpha\beta}(0; p, p')$. Это легко сделать, пользуясь оценками для функций $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\Delta_\mu^{(\alpha)}$ из леммы 9.

ЛЕММА 13. Пусть $\mu_\alpha = \mu_\alpha^0$, $\alpha = 1, 3$. Существует число $\delta > 0$ такое, что для любых $p \in U_\delta(0)$ функция $\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; 0)$ представима в виде

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; 0) = \mu_\alpha \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_3}}{(l_1 + l_\alpha)^2} 4\pi^2 |p| + O(|p|^2), \quad \alpha = 1, 3. \quad (6.3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению функцию $\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; 0)$ можно записать в виде

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; z) = 1 - \mu_\alpha \int \frac{dq}{\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q) - z} = 1 - \mu_\alpha \int \frac{dq}{\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q - \frac{l_\alpha}{l_1 + l_\alpha}p) - z}, \quad (6.4)$$

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, 0; 0) = 0, \quad \alpha = 1, 3.$$

Функцию $\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; 0)$ представим в виде

$$\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(0, p; 0) = I_1(p) + \mu_\alpha^0 I_0(p),$$

где

$$I_0(p) = \int_{U_\rho(0)} \left(\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q - \frac{l_\alpha}{l_1 + l_\alpha}p) \right)^{-1} dq,$$

$$I_1(p) = 1 - \mu_\alpha \int_{T^3 \setminus U_\rho(0)} \left(\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q - \frac{l_\alpha}{l_1 + l_\alpha}p) \right)^{-1} dq.$$

Заметим, что функция $I_1(p)$ аналитична в $U_{\delta_1}(0)$, $\delta_1 < \rho$. Из равенства $\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q) = \varepsilon_{1\alpha}(0; -p, -q)$ вытекает четность функции I_1 . Поэтому имеет место равенство

$$I_1(p) = \text{const} + O(|p|^2). \quad (6.5)$$

Функцию $\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q - (l_\alpha/(l_1 + l_\alpha))p)$ разлагаем в $U_\rho(0) \times U_\rho(0)$ — ρ -окрестности точки $(0, 0)$ — в ряд Тейлора:

$$\varepsilon_{1\alpha}(0; p, q - \frac{l_\alpha}{l_1 + l_\alpha}p) = \frac{l + l_\alpha}{2}q^2 + \frac{l_1^2 + 2l_1l_3}{2(l_1 + l_\alpha)}p^2 + h_\alpha(p, q), \quad \alpha = 1, 3,$$

$$h_\alpha(p, q) = \sum_{|l| + |m| \geq 4} C_{lm}^\alpha p^l q^m, \quad p^s = p_1^{s_1} p_2^{s_2} p_3^{s_3}, \quad |s| = s_1 + s_2 + s_3.$$

Функцию I_0 запишем в виде

$$I_0(p) = \int_{U_\rho(0)} \left(\frac{l + l_\alpha}{2}q^2 + \frac{l_1^2 + 2l_1l_3}{2(l_1 + l_\alpha)}p^2 + h_\alpha(p, q) \right)^{-1} dq.$$

Можно показать, что

$$I_0(p) = \text{const} + \int_{U_\rho(0)} \left(\frac{l + l_\alpha}{2}q^2 + \frac{l_1^2 + 2l_1l_3}{2(l_1 + l_\alpha)}p^2 \right)^{-1} dq + O(|p|^2). \quad (6.6)$$

Учитывая

$$\int_{U_\rho(0)} \left(\frac{l + l_\alpha}{2}q^2 + \frac{l_1^2 + 2l_1l_3}{2(l_1 + l_\alpha)}p^2 \right)^{-1} dq = \text{const} - 4\pi^2 \frac{\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_3}}{(l + l_\alpha)^2} |p| + O(|p|^2)$$

и соотношения (6.4)–(6.6), получим (6.3). Лемма 13 доказана.

Пространство всех векторов $(\varphi, \psi) \in L_2^{(2)}(T^3)$, носители компонент которых лежат в $B_\rho(0)$, является инвариантным подпространством оператора $\mathbf{T}_\rho(0)$. Пусть $\mathbf{T}^{(0)}(0)$ – сужение оператора $\mathbf{T}_\rho(0)$ на это подпространство, т.е. его ядро равно $T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p')$, $p, p' \in B_\rho(0)$.

Пусть $\mathbf{T}^{(1)}$ – интегральный оператор, действующий в $L_2^{(2)}(B_\rho(0))$, с ядром, определенным формулой

$$t_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p') = \frac{k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}}{2\pi^2} \frac{|p|^{-1/2} |p'|^{-1/2}}{r_{\alpha\beta} p^2 + s_{\alpha\beta} p p' + r_{\alpha\beta}^{-1} p'^2},$$

где

$$\begin{aligned} r_{11} &= 1, & r_{12} &= r_{21}^{-1} = \sqrt{\frac{l_1 + l_3}{2l_1}}, \\ s_{11} &= \frac{2l_3}{l_1 + l_3}, & s_{12} &= s_{21} = -\sqrt{\frac{2l_1}{l_1 + l_3}}, \\ u_{11} &= \frac{l_1 + l_3}{\sqrt{l_1^2 + 2l_1 l_3}}, & u_{12} &= u_{21} = 2\sqrt{\frac{l_1 + l_3}{l_1 + 2l_3}}, \\ k_{11} &= 1, & k_{22} &= 0, & k_{12} &= k_{21}, & k_{12}(\mu_3) &= \begin{cases} 1, & \mu_3 = \mu_3^0, \\ 0, & \mu_3 < \mu_3^0 \end{cases} \end{aligned}$$

ЛЕММА 14. Оператор $\mathbf{T}_\rho(0) - \mathbf{T}^{(1)}$ является оператором Гильберта–Шмидта.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно показать сходимость интеграла

$$\int_{B_\rho} \int_{U_\rho} |T_{\alpha\beta}(0, 0; p, p') - t_{\alpha\beta}^{(1)}(p, p')|^2 dp dp'. \quad (6.7)$$

Для функций ε_{11} и ε_{13} верны соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}(0; p, q) &= \frac{l_1^2 + l_3}{2} (r_{11} p^2 + s_{11} p q + r_{11}^{-1} q^2) + O(|p|^4) + O(|q|^4), \quad p, q \in U_\rho(0), \\ \varepsilon_{13}(0; p, q) &= \sqrt{\frac{l_1^2 + l_3 l_1}{2}} (r_{12} p^2 + s_{12} p q + r_{12}^{-1} p'^2) + O(|p|^4) + O(|q|^4), \quad p, q \in U_\rho(0). \end{aligned}$$

Пользуясь этими выражениями, утверждением 5 леммы 9 и леммой 13, получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} |T_{12}(0, 0; p, q)| &\leq C \frac{O(|p|^2)}{|p|^{1/2} (r_{12} p^2 + s_{12} p q + r_{12}^{-1} q^2)} \quad \text{при } \mu_3 < \mu_3^0, \\ |T_{12}(0, 0; p, q) - t_{12}(p, q)| &\leq C \frac{O(|p|^2) + O(|q|^2)}{|p|^{1/2} (p^2 + q^2) |q|^{1/2}} \quad \text{при } \mu_3 = \mu_3^0, \\ |T_{11}(0, 0; p, q) - t_{11}(p, q)| &\leq C \frac{O(|p|^2) + O(|q|^2)}{|p|^{1/2} (p^2 + q^2) |q|^{1/2}} \quad \text{при } \mu_1 = \mu_1^0. \end{aligned}$$

Отсюда получаем сходимость интеграла (6.7).

Обозначим через S интегральный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_2(\mathbb{R}_+ \times \mathbf{S})$ и порожденный ядром $S_{\alpha\beta}(x - x'; (\xi, \eta))$, $x, x' \in \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\xi, \eta \in \mathbf{S}$:

$$S_{\alpha\beta}(x; t) = \frac{k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}}{2\pi^2} \frac{1}{2 \operatorname{ch}(x + \ln r_{\alpha\beta}) + t},$$

где $\mathbf{S}$ — единичная сфера в $\mathbb{R}^3$, $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbf{S}$.

ЛЕММА 15. Оператор $T^{(2)}$ унитарно-эквивалентен оператору S .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность осуществляется с помощью унитарного оператора

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad M: L_2(B_\rho(0)) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^+ \otimes \mathbf{S}),$$

здесь $(Mf)(x, \xi) = e^{-3x/2} \rho^{3/2} f(\rho e^{-x} \xi)$, $x \in \mathbb{R}^+$, $\xi \in \mathbf{S}$, т.е. $S = \mathbf{M} T^{(2)} \mathbf{M}^{-1}$, где

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & M^{-1} \end{pmatrix}, \quad (M^{-1}g)(p) = |p|^{3/2} g\left(\ln \frac{\rho}{|p|}, \frac{p}{|p|}\right).$$

Далее пространство $L_2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbf{S})$ понимается в смысле $L_2(\mathbb{R}_+ \otimes \mathbf{S}) = L_2(\mathbb{R}_+) \otimes L_2(\mathbf{S})$ [14].

Обозначим через $L^{(l)}(\mathbf{S}) \subset L_2(\mathbf{S})$, $l = 1, 2, \dots$, подпространство функций с угловым моментом l , $\dim L^{(l)}(\mathbf{S}) = 2l + 1$ (см. [15]), $L_2(\mathbf{S}) = \sum_l \oplus L^{(l)}(\mathbf{S})$.

Пусть $\hat{P}_l: L_2(\mathbf{S}) \rightarrow L^{(l)}(\mathbf{S})$ — ортогональный проектор на $L^{(l)}(\mathbf{S})$. Ядро оператора $\hat{P}_l$ выражается через многочлен Лежандра $P_l(\cdot)$:

$$\hat{P}_l((\xi, \eta)) = \frac{2l+1}{4\pi} P_l((\xi, \eta)).$$

Ядро оператора S на сфере зависит только от скалярного произведения (ξ, η) , поэтому подпространство $\mathbb{C}^2 \otimes L^{(l)}(\mathbf{S})$ является инвариантным относительно оператора S (см. [14]) и

$$S = \sum_l \bigoplus (S^{(l)} \otimes \hat{P}_l),$$

где $S^{(l)}$ — интегральный оператор в $L_2^{(2)}(\mathbb{R}^+)$, порожденный ядром

$$S_{\alpha\beta}^{(l)}(x - x') = 2\pi \int_{-1}^1 P_l(t) S_{\alpha\beta}(x - x'; t) dt.$$

Следовательно,

$$S = \bigcup_{l=1} \sigma(S^{(l)} \otimes \hat{P}_l).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $L_2^{(2)}(\mathbb{R}_+)$ – гильбертово пространство двухкомпонентных вектор-функций $f(t) = \{f_\alpha(t)\}$, где $f_\alpha \in L_2(\mathbb{R}_+)$. Пусть S – оператор, действующий в $L_2^{(2)}(\mathbb{R}_+)$; равенство $f' = Sf$ означает, что

$$f_\alpha(t) = \sum_l^3 \int_0^\infty S_{\alpha\beta}(t-t') f_\beta(t') dt',$$

где $S_{\alpha\beta}(t) = \overline{S_{\beta\alpha}(t)}$ и $S_{\alpha\beta} \in L_1(-\infty, \infty)$.

Обозначим через $\hat{S}(\lambda)$ симметричную двухрядную матрицу, элементы $\hat{S}_{\alpha\beta}$ которой определяются соотношением

$$\hat{S}_{\alpha\beta}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} S_{\alpha\beta}(t) dt,$$

а через $\nu_\alpha(\lambda)$ – собственные числа матрицы $\hat{S}(\lambda)$. Тогда S является ограниченным самосопряженным оператором, спектр которого совпадает с множеством значений, принимаемых функциями $\nu_\alpha(\lambda)$ при вещественных λ .

Аналогичное утверждение доказано Гохбергом и Крейном в работе [16].

Далее будем искать спектр интегрального оператора $S^{(0)}$, действующего в $L_2^{(2)}(\mathbb{R}_+)$, с ядром

$$S_{\alpha\beta}^{(0)}(x-x') = \frac{k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{2 \operatorname{ch}(x-x' + \ln r_{\alpha\beta}) + s_{\alpha\beta} t},$$

$$S_{22}^{(0)}(x-x') = 0.$$

Для этого применим предложение 1. Вычислим интеграл

$$\begin{aligned} \hat{S}_{\alpha\beta}^{(0)}(\lambda) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda s} \frac{k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta}}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{dt}{2 \operatorname{ch}(s + \ln r_{\alpha\beta}) + s_{\alpha\beta} t} = \\ &= k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} e^{-i\lambda \ln r_{\alpha\beta}} \int_{-1}^1 dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\lambda w} dw}{\operatorname{ch}(w + \ln r_{\alpha\beta}) + \frac{s_{\alpha\beta}}{2} t}. \end{aligned}$$

Используя известное равенство (см., например, [17])

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin a e^{iwy}}{\operatorname{ch} w + \cos a} dw = \frac{\operatorname{sh} ay}{\operatorname{sh} \pi y} \quad \text{при } |a| < \pi,$$

имеем

$$\hat{S}_{\alpha\beta}^{(0)}(\lambda) = \frac{k_{\alpha\beta} u_{\alpha\beta} e^{-i\lambda \ln r_{\alpha\beta}}}{\operatorname{sh} \pi \lambda} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh}(\lambda \arccos \frac{s_{\alpha\beta}}{2} t)}{\sqrt{1 - (\frac{s_{\alpha\beta}}{2} t)^2}} dt.$$

Вычислим интеграл в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{sh}(\lambda \arccos(s_{\alpha\beta} t/2))}{\sqrt{1 - (s_{\alpha\beta} t/2)^2}} dt &= \frac{2}{s_{\alpha\beta}} \int_{\arccos(s_{\alpha\beta}/2)}^{\pi - \arccos(s_{\alpha\beta}/2)} \operatorname{sh} \lambda x dx = \\ &= \frac{2}{s_{\alpha\beta} \lambda} \left[\operatorname{ch} \left(\pi - \arccos \frac{s_{\alpha\beta}}{2} \right) - \operatorname{ch} \left(\pi - \arccos \frac{s_{\alpha\beta}}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая элементарные равенства $\operatorname{ch} a - \operatorname{ch} b = 2 \operatorname{sh}((a+b)/2) \operatorname{sh}((a-b)/2)$, $\operatorname{sh} a = 2 \operatorname{sh}(a/2) \operatorname{ch}(a/2)$ и $\pi - \arccos x = \arcsin x$ при $x \in [0, 1]$, получим

$$\begin{aligned}\widehat{S}_{\alpha\beta}^{(0)}(\lambda) &= \frac{2k_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}e^{-i\lambda \ln r_{\alpha\beta}}}{s_{\alpha\beta}} \frac{2 \operatorname{sh}(\pi\lambda/2) \operatorname{sh}[(\pi/2 - \arccos(s_{\alpha\beta}/2))\lambda]}{\lambda \operatorname{sh} \pi\lambda} = \\ &= \frac{2k_{\alpha\beta}u_{\alpha\beta}e^{-i\lambda \ln r_{\alpha\beta}}}{s_{\alpha\beta}} \frac{\operatorname{sh}(\lambda \arcsin(s_{\alpha\beta}/2))}{\lambda \operatorname{ch}(\pi\lambda/2)}.\end{aligned}$$

Очевидно, собственные значения матрицы

$$\widehat{S}^{(0)}(\lambda) = \begin{pmatrix} \widehat{S}_{11}^{(0)}(\lambda) & \widehat{S}_{12}^{(0)}(\lambda) \\ \widehat{S}_{21}^{(0)}(\lambda) & 0 \end{pmatrix}$$

имеют вид

$$z^{\pm}(\lambda) = \frac{\widehat{S}_{11}^{(0)}(\lambda) \pm \sqrt{|\widehat{S}_{11}^{(0)}(\lambda)|^2 + 4|\widehat{S}_{12}^{(0)}(\lambda)|^2}}{2}. \quad (6.8)$$

Согласно предложению 1 $\sigma(S^{(0)}) = \operatorname{Im} z^{-} \cup \operatorname{Im} z^{+}$, где $\operatorname{Im} z^{\pm}$ — множество значений функции $z^{\pm} = z^{\pm}(\lambda)$, $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Спектр $\sigma(S^{(0)})$ оператора $S^{(0)}$ содержит отрезок $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$ ($\underline{\lambda} < \bar{\lambda}$), лежащий правее точки 1.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что функция $z^{+} = z^{+}(\lambda)$ является непрерывной в $\mathbb{R}^1$. Для доказательства предложения достаточно показать, что $z^{+}(0) > 1$. Из представления (6.8) функции z^{+} имеем

$$\begin{aligned}z^{+}(0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} z^{+}(\lambda) > \widehat{S}_{11}^{(0)}(0) = \frac{2u_{11}}{s_{11}} \arcsin \frac{s_{11}}{2} = \\ &= \frac{2(l_1 + l_3)}{\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_3}} \frac{l_1 + l_3}{2l_3} \arcsin \frac{l_3}{l_1 + l_3}.\end{aligned}$$

Используя неравенство $\arcsin |x| > |x|$ при $x \in (-1, 1)$, получим

$$z^{+}(0) > \frac{l_1 + l_3}{\sqrt{l_1^2 + 2l_1l_3}} > 1.$$

Из теоремы Вейля [12] о сохранении существенного спектра при компактных возмущениях, лемм 12, 14 и 15 и предложения 2 следует, что непрерывный спектр оператора $\mathbf{T}(0)$ при $\mu_1 = \mu_1^0$ и $\mu_3 \leq \mu_3^0$ содержит отрезок, расположенный правее точки 1.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 2.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Пусть $N > 0$ – произвольное натуральное число. Покажем, что для некоторого $z < 0$ оператор $\mathbf{T}(0, z)$ имеет по крайней мере N собственных значений. Как было показано выше, существенный спектр оператора $\mathbf{T}(0)$ содержит отрезок $[\underline{\lambda}, \bar{\lambda}]$, лежащий правее точки 1. Пусть $\underline{\lambda} = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N < \lambda_{N+1} = \bar{\lambda}$ и $\lambda_{i+1} - \lambda_i = 2\eta$, $i = 1, \dots, N$. Так как λ_i , $i = 1, \dots, N$, – точки существенного спектра оператора $\mathbf{T}(0)$, то для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать такие элементы $\sigma^{(i)} = (\sigma_1^{(i)}, \sigma_2^{(i)}) \in L_2(T^3) \times L_2(T^3)$, что $\|\sigma^{(i)}\| = 1$, $\|\mathbf{T}(0, z)\sigma^{(i)} - \lambda_i\sigma^{(i)}\| < \varepsilon$. Согласно спектральной теореме это означает, что в каждом из N непересекающихся интервалов $(\lambda_i - \eta, \lambda_i + \eta)$ лежит по крайней мере одно собственное значение самосопряженного оператора $\mathbf{T}(0, z)$.

Таким образом, оператор $\mathbf{T}(0, z)$ имеет не менее N собственных значений, больших 1. Отсюда по лемме 7 оператор $H(0)$ имеет не менее N собственных значений, лежащих левее точки $z < 0$.

Благодарности. Авторы выражают глубокую благодарность Р. А. Минлосу и Г. М. Жислину за внимание к работе.

Список литературы

- [1] В. Н. Ефимов. ЯФ. 1970. Т. 12. № 5. С. 1080–1091.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [3] R. D. Amado, J. V. Noble. Phys. Rev. D. 1971. V. 5. № 8. P. 1992–2002.
- [4] Д. Р. Яфаев. Матем. сб. 1974. Т. 9(136). № 4(8). С. 567–592.
- [5] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal. Ann. Phys. 1989. V. 123. P. 274–295.
- [6] H. Tamura. J. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433–459.
- [7] D. C. Mattis. Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361–379.
- [8] A. I. Mogilner. The problem of a quasi-particles in solidstate physics. In: Application of Self-adjoint Extensions in Quantum Physics. Lect. Notes Phys. V. 324. Eds. P. Exner, P. Seba. Berlin: Springer, 1989. P. 160–173.
- [9] В. А. Малышев, Р. А. Минлос. Тр. Сем. Петровского. 1983. № 9. С. 63–80.
- [10] С. Н. Лакаев. ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 94–104.
- [11] С. Н. Лакаев. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 3. С. 15–28.
- [12] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.
- [13] M. Sh. Birman, M. Z. Solomyak. Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert Space. Dordrecht: D. Reidel P. C., 1987.
- [14] A. V. Sobolev. Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 127–168.
- [15] С. Альбеверьо, Ф. Гестези, Р. Хёгг-Крон, Х. Хольдоен. Решаемые модели в квантовой механике. М.: Мир, 1991.
- [16] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн. УМН. 1958. Т. 18. № 2(80). С. 3–78.
- [17] Г. А. Корн, Т. М. Корн. Справочник по математике. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 23.VII.2002 г.