Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, Матричные модели, комплексная геометрия и интегрируемые системы. II, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 3, 399–449

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1986>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 15:07:21

© 2006 г.

А. В. Маршаков*

МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ, КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ. II

Рассматриваются примеры применения общих методов, основанных на геометрии и интегрируемости матричных моделей, которые были описаны в первой части этой работы. В частности, изучаются нелинейные дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют квазиклассические тау-функции. Обсуждается также похожая квазиклассическая геометрическая картина, возникающая в контексте многомерных суперсимметричных калибровочных теорий и АдС/КТП-соответствия.

Ключевые слова: теория струн, матричные модели, комплексная геометрия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	400
2. Бездисперсионные уравнения Хироты.....	403
2.1. Геометрия бездисперсионных иерархий.....	403
2.2. Обобщенные уравнения Хироты для решения с многосвязным носителем.....	407
2.3. Уравнения ВДВВ.....	412
3. Матричные модели и (p, q) -теория струн.....	414
3.1. Решения бездисперсионной иерархии КП для (p, q) -критических точек.....	415
3.2. Чистая гравитация: $(p, q) = (2, 3)$	416
3.3. Модель Янга–Ли: $(p, q) = (2, 5)$	417
3.4. Задача Гуревича–Питаевского и матричная модель с логарифмическим потенциалом.....	419
4. Комплексная геометрия АдС/КТП-соответствия.....	425
4.1. Перенормировка и анзац Бете.....	426
4.2. Геометрия интегрируемых классических струн.....	432
4.3. За пределами $SU(2)$ -подсектора: перепараметризованные кривые.....	439

Статья написана по заказу Редколлегии по материалам нескольких лекций, прочитанных на школах по математической физике, а также докладов на конференции “Комплексная геометрия и теория струн” и семинаре памяти М. К. Поливанова.

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, mars@itep.ru

5. Заключение	440
Приложение 1. Тета-функции и тождества Фэя	441
Приложение 2. Корреляционные функции в минимальных струнных моделях $(p, q) = (2, 7)$ и $(p, q) = (3, 4)$	443
Приложение 3. Вычеты и уравнения для логарифмического потенциала	446

1. ВВЕДЕНИЕ

В первой части этой работы [1] мы обсуждали свойства простейших калибровочных теорий – матричных интегралов

$$Z = \int d\Phi e^{-\text{Tr } W(\Phi)/\hbar} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N (d\phi_i e^{-W(\phi_i)/\hbar}) \Delta^2(\phi) \quad (1.1)$$

и

$$Z = \int d\Phi d\Phi^\dagger e^{-V(\Phi, \Phi^\dagger)/\hbar} = \frac{1}{N!} \int \prod_{i=1}^N (d^2 z_i e^{-V(z_i, \bar{z}_i)/\hbar}) |\Delta(z)|^2 \quad (1.2)$$

или так называемых одноматричных и двуматричных моделей, где через

$$V(\Phi, \Phi^\dagger) = \Phi^\dagger \Phi - W(\Phi; t) - \widetilde{W}(\Phi^\dagger; \bar{t}) \quad (1.3)$$

и

$$W(\Phi) = \sum_{k>0} t_k \Phi^k \quad (1.4)$$

обозначаются соответствующие калибровочно-инвариантные односледовые потенциалы (последние обычно считаются некоторыми полиномами общего вида), а

$$\Delta(\phi) = \prod_{i<j} (\phi_i - \phi_j) = \det_{ij} \|\phi_i^{j-1}\| \quad (1.5)$$

означает определитель Вандермонда. В работе [1] мы напомнили, что матричные модели (1.1), (1.2) могут быть эффективно описаны на языке интегрируемых систем семейства Тоды, и продемонстрировали, что в планарном пределе $N \rightarrow \infty$ матриц бесконечного размера (или при $\hbar \rightarrow 0$ с фиксированным $\hbar N = t_0 = \text{const}$) эти интегрируемые системы обладают красивой геометрической интерпретацией.

Планарный предел отвечает выделению главного вклада в свободную энергию калибровочной теории (в частности, в моделях (1.1), (1.2))

$$Z_{\text{gauge}} = e^{F_{\text{string}}}, \quad (1.6)$$

которая является определенной производящей функцией в некоторой теории струн (см., например, [2]), дуальной к калибровочной теории. В частном случае матричных ансамблей (1.1) или (1.2), в рамках их $1/N$ -разложения [3]

$$F_{\text{string}} = \sum_{g=0}^{\infty} N^{2-2g} F_g(t, t_0) \quad (1.7)$$

свободные энергии $F_0 = \mathcal{F}$ планарных матричных моделей могут быть отождествлены с квазиклассическими тау-функциями [4], или препотенциалами одномерных комплексных многообразий Σ . Эти одномерные комплексные многообразия или комплексные кривые имеют вид

$$y^2 = W'(x)^2 + 4f(x) = \prod_{j=1}^{2n} (x - x_j) \quad (1.8)$$

для одноматричной модели (1.1) и

$$z^n \tilde{z}^n + a_n z^{n+1} + \tilde{a}_n \tilde{z}^{n+1} + \sum_{i,j \in (N.P.)_+} f_{ij} z^i \tilde{z}^j = 0 \quad (1.9)$$

в двуматричном случае (1.2). В последней формуле суммирование происходит по всем целым точкам строго внутри соответствующего многоугольника Ньютона (подробнее см. [1]). Для завершения геометрической формулировки эти кривые должны быть оснащены мероморфными производящими 1-формами

$$dS = \begin{cases} \frac{i}{4\pi} y dx & \text{для одноматричной модели,} \\ \frac{1}{2\pi i} \tilde{z} dz & \text{для двуматричной модели,} \end{cases} \quad (1.10)$$

а соответствующие препотенциалы определяются следующим образом:

$$\mathbf{S} = \oint_{\mathbf{A}} dS, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{S}} = 2\pi i \oint_{\mathbf{B}} dS, \quad (1.11)$$

т.е. являются функциями половины периодов производящей 1-формы (1.10) такими, что их градиенты определяются дуальными периодами относительно формы пересечений $A_\alpha \circ B_\beta = \delta_{\alpha\beta}$. Интегрируемость формул (1.11) гарантируется симметричностью

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial S_\alpha \partial S_\beta} = 2\pi i T_{\alpha\beta} \quad (1.12)$$

матрицы периодов $T_{\alpha\beta}(\Sigma)$, которая является частным случаем билинейных соотношений Римана.

В случае матричных моделей и их кривых (1.8), (1.9) периоды (1.11) имеют смысл чисел заполнения собственных значений, расположенных в определенной части их носителя. Полное число собственных значений

$$t_0 = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} |_{P_+} dS = -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} |_{P_-} dS, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_0} = 4\pi i \int_{P_-}^{P_+} dS \quad (1.13)$$

и параметры потенциалов (1.4), (1.3)

$$t_k = \frac{1}{2\pi i k} \operatorname{res} |_{P_0} \xi^{-k} dS, \quad k > 0, \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} |_{P_0} \xi^k dS, \quad k > 0, \quad (1.14)$$

можно рассматривать как обобщенные периоды или вычеты производящих 1-форм. В формулах (1.14) через ξ обозначена *обратная* локальная координата в отмеченной точке P_0 : $\xi(P_0) = \infty$. Аналогично (1.12) условие самосогласованности для (1.14) обеспечивается следующей формулой для вторых производных:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_n \partial t_k} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} |_{P_0} (\xi^k d\Omega_n), \quad (1.15)$$

в то время как третьи производные выражаются с помощью формулы вычетов:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial T_I \partial T_J \partial T_K} = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res} |_{dx=0} \left(\frac{dH_I dH_J dH_K}{dx dy} \right) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{x_a} \operatorname{res} |_{x_a} \left(\frac{\phi_I \phi_J \phi_K}{dx/dy} dy \right), \quad (1.16)$$

где набор 1-форм $\{dH_I\} = \{d\omega_\alpha, d\Omega_0, d\Omega_k\}$ отвечает взаимно однозначно набору параметров $\{T_I\} = \{S_\alpha, t_0, t_k\}$ посредством соотношений

$$\frac{\partial dS}{\partial S_\alpha} = d\omega_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, g, \quad (1.17)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial dS}{\partial t_0} &= d\Omega_0, \\ \frac{\partial dS}{\partial t_k} &= d\Omega_k, \quad k \geq 1. \end{aligned} \quad (1.18)$$

В формуле (1.16) для дальнейшего удобства введены мероморфные функции

$$\phi_I(x) = \frac{dH_I}{dy}. \quad (1.19)$$

Как функция своих параметров, являющихся (обобщенными) модулями комплексных многообразий (1.8), (1.9), квазиклассическая тау-функция определена только локально, но способом, согласованным с преобразованиями дуальности: $A \leftrightarrow B$, в смысле соответствующего преобразования Лежандра

$$\mathcal{F} \leftrightarrow \mathcal{F} + \sum_{\alpha} S_{\alpha} \Pi_{\alpha}.$$

При различных выборах базисных циклов функции $\mathcal{F}$ различаются практически только обозначениями, и мы не будем различать ниже эти функции, изучая дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют квазиклассические тау-функции матричных моделей.

В следующем разделе мы начнем с изучения нелинейных дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют препотенциалы или квазиклассические тау-функции и к которым относятся бездисперсионные уравнения Хироты и их аналоги для старших родов, а также уравнения ассоциативности, или уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ). После этого мы перейдем к физическим примерам дуальности калибровочных теорий и струн (1.6), для изучения которых можно применять описанные в работе [1] методы “геометрической интегрируемости”. Мы начнем с хорошо известной дуальности между матричными моделями и двумерной гравитацией, которая формулируется на языке бездисперсионных иерархий, а затем перейдем к геометрической картине АдС/КТП-соответствия.

2. БЕЗДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРОТЫ

В данном разделе рассматриваются дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют квазиклассические тау-функции. Сначала мы обсудим подробно рациональный случай, когда Σ представляет собой риманову сферу $\mathbb{P}^1$ и легко явно выписать соответствующие дифференциальные уравнения, оказывающиеся в результате бездисперсионным пределом уравнений Хироты для иерархий Кадомцева–Петвиашвили (КП) или Тоды. Затем мы рассмотрим аналоги бездисперсионных уравнений Хироты для кривых Σ старших родов, а также уравнения ВДВВ.

2.1. Геометрия бездисперсионных иерархий. Рассмотрим производящую функцию: абелев интеграл $S = \int^P y dx$, отвечающий производящей форме (1.10) одноматричной модели. Из формул (1.14) находим, что

$$y_{x \rightarrow \infty} = \sum_k \left(k t_k x^{k-1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} \frac{1}{x^{k+1}} \right) \quad (2.1)$$

представляет собой его разложение при $x(P) \rightarrow \infty$. Производные по временам (ср. с (1.18))

$$\Omega_k = \frac{\partial S}{\partial t_k} = x^k - \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_k \partial t_j} \frac{1}{j x^j} \quad (2.2)$$

образуют базис мероморфных функций с полюсами в точке $x = \infty$. Предположим теперь, что эти функции определены глобально на некоторой кривой Σ и несингулярны везде, кроме точки $x = \infty$ (случай единственной сингулярности в точности отвечает иерархии КП). Если Σ представляет собой сферу (или мы рассматриваем бездисперсионный предел иерархии КП), то этого достаточно, чтобы определить все производные Ω_k в терминах единственной “униформизирующей” функции $\Omega_1 = \lambda \in \mathbb{C}$. Действительно, степени λ^k обладают тем же сингулярным поведением, что и набор функций (2.2), т.е. эти два базиса связаны простым линейным преобразованием

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \lambda, \\ \Omega_2 &= \lambda^2 + 2 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2}, \\ \Omega_3 &= \lambda^3 + 3 \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} \lambda + \frac{3}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1 \partial t_2}, \quad \dots \end{aligned} \quad (2.3)$$

Эти уравнения следуют из сравнения сингулярных в точке $x = \infty$ частей их разложения по переменной x , следующего из (2.2). Из сравнения отрицательных “хвостов” разложения по x обеих частей равенств (2.3) можно получить производные $\partial^2 \mathcal{F} / \partial t_k \partial t_l$ (от Ω_k в левых частях равенств) в терминах таких же производных, но только при $k = 1$ (от $\lambda = \Omega_1$ в правых частях равенств). Эти соотношения называются бездисперсионными уравнениями Хироты для иерархии КП и отвечают геометрии рациональной кривой с единственной отмеченной точкой (или когда другие отмеченные точки просто “забыты”), и информация о них содержится в следующей производящей форме:

$$(x_1 - x_2)(1 - e^{D(x_1)D(x_2)\mathcal{F}}) = (D(x_1) - D(x_2))\partial_{t_1}\mathcal{F}, \quad (2.4)$$

где введены операторы

$$D(x) = \sum_{k \geq 1} \frac{x^{-k}}{k} \partial_{t_k}. \quad (2.5)$$

В случае бездисперсионной иерархии Тоды следует рассматривать сферу с двумя отмеченными точками и соответствующими локальными координатами $z = \infty$ и $\tilde{z} = \infty^1$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{z} \underset{z \rightarrow \infty}{=} \frac{t_0}{z} + \sum_k \left(k t_k z^{k-1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} \frac{1}{z^{k+1}} \right), \\ z \underset{\tilde{z} \rightarrow \infty}{=} \frac{t_0}{\tilde{z}} + \sum_k \left(k \tilde{t}_k \tilde{z}^{k-1} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tilde{t}_k} \frac{1}{\tilde{z}^{k+1}} \right). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Рассматривая теперь две производящие функции $S = \int^P \tilde{z} dz$ и $\tilde{S} = \int^P z d\tilde{z}$, а также, как и в (2.2), их производные по временам, получим

$$\begin{aligned} \Omega_k &= \frac{\partial S}{\partial t_k} = z^k - \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_k \partial t_j} \frac{1}{j z^j}, \quad k > 0, \\ \tilde{\Omega}_k &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_k} = \tilde{z}^k - \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{t}_k \partial \tilde{t}_j} \frac{1}{j \tilde{z}^j}, \quad k > 0, \end{aligned} \quad (2.7)$$

и

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{\partial S}{\partial t_0} = \ln z - \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0 \partial t_j} \frac{1}{j z^j}, \\ \tilde{\Omega}_0 &= \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \tilde{t}_0} = \ln \tilde{z} - \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_j} \frac{1}{j \tilde{z}^j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Предположим теперь, что (2.7) и (2.8) являются *глобально* определенными мероморфными функциями на сфере с двумя отмеченными точками. Тогда естественно ввести унифицирующую функцию $w \in \mathbb{C}^*$, используя дипольный дифференциал

$$\frac{dw}{w} = d\Omega_0 = -d\tilde{\Omega}_0, \quad (2.9)$$

так как сумма его вычетов должна обращаться в нуль. Это означает, что

$$\begin{aligned} w \underset{z \rightarrow \infty}{=} z \exp \left(- \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_0 \partial t_j} \frac{1}{j z^j} \right), \\ \frac{1}{w} \underset{\tilde{z} \rightarrow \infty}{=} \tilde{z} \exp \left(- \sum_j \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \tilde{t}_0 \partial \tilde{t}_j} \frac{1}{j \tilde{z}^j} \right), \end{aligned} \quad (2.10)$$

т.е. у функции w имеются простой полюс в точке $z = \infty$ и простой нуль при $\tilde{z} = \infty$. Уравнения Хироты для бездисперсионной иерархии Тоды вытекают теперь из простого наблюдения, что аналогично формулам (2.3)

$$\Omega_k = P_k(w), \quad \tilde{\Omega}_k = \tilde{P}_k \left(\frac{1}{w} \right), \quad k > 0, \quad (2.11)$$

¹⁾Мы следуем здесь принятым обозначениям для двухматричной модели (1.2), отвечающим независимому выбору параметров в окрестностях этих двух точек.

для некоторых полиномов P_k и $\tilde{P}_k$, некоторые из них явно приведены в работе [5]. Формулы (2.10) эквивалентны обратным конформным отображениям для односвязной области D , которые обсуждались в первой части данной работы [1].

Для двухматричной модели соотношения (1.15) могут быть объединены в следующее выражение (комбинация формул (6.21) и (6.3) из работы [1]):

$$\ln \left| \frac{w(z) - w(z')}{w(z)\overline{w(z')} - 1} \right|^2 = \ln \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \right|^2 + \nabla(z)\nabla(z')\mathcal{F}, \quad (2.12)$$

которое налагает бесконечную иерархию дифференциальных уравнений на функцию $\mathcal{F}$. В формуле (2.12) был использован оператор

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + \sum_{k \geq 1} \left(\frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k} + \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \partial_{\bar{t}_k} \right), \quad (2.13)$$

подробно обсуждавшийся в данном контексте в работе [1], голоморфная и антиголоморфная составляющие которого

$$D(z) = \sum_{k \geq 1} \frac{z^{-k}}{k} \partial_{t_k}, \quad \bar{D}(\bar{z}) = \sum_{k \geq 1} \frac{\bar{z}^{-k}}{k} \partial_{\bar{t}_k} \quad (2.14)$$

практически совпадают с оператором (2.5). Удобно нормировать функцию $w(z)$ с помощью условия $w(\infty) = \infty$ и вещественности $\partial_z w(\infty)$, т.е.

$$w(z) = \frac{z}{r} + O(1), \quad z \rightarrow \infty, \quad (2.15)$$

где (вещественное число) $r = \lim_{z \rightarrow \infty} dz/dw(z)$ обычно называется (внешним) конформным радиусом области D или носителя собственных значений двухматричной модели. Устремляя в (2.12) $z' \rightarrow \infty$, получаем

$$\ln |w(z)|^2 = \ln |z|^2 - \partial_{t_0} \nabla(z) \mathcal{F}. \quad (2.16)$$

При $z \rightarrow \infty$ это уравнение приводит к простой формуле для конформного радиуса

$$\ln r^2 = \partial_{t_0}^2 \mathcal{F}. \quad (2.17)$$

Переписывая далее формулу (2.12) в виде

$$\begin{aligned} \ln \frac{w(z) - w(z')}{w(z)\overline{w(z')} - 1} - \ln \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z'} \right) - \left(\frac{1}{2} \partial_{t_0} + D(z) \right) \nabla(z') \mathcal{F} = \\ = -\ln \frac{\overline{w(z)} - \overline{w(z')}}{w(z')\overline{w(z)} - 1} + \ln \left(\frac{1}{\bar{z}} - \frac{1}{\bar{z}'} \right) + \left(\frac{1}{2} \partial_{t_0} + \bar{D}(\bar{z}) \right) \nabla(z') \mathcal{F}, \end{aligned} \quad (2.18)$$

получаем равенство между голоморфной функцией переменной z (в левой части) и антиголоморфной функцией (в правой части равенства). Поэтому обе части равны не зависящей от z константе, значение которой определяется из предела $z \rightarrow \infty$. В результате получаем уравнение

$$\ln \frac{w(z) - w(z')}{w(z) - (w(z'))^{-1}} = \ln \left(1 - \frac{z'}{z} \right) + D(z) \nabla(z') \mathcal{F}, \quad (2.19)$$

которое при $z' \rightarrow \infty$ переходит в формулу для конформного отображения $w(z)$:

$$\ln w(z) = \ln z - \frac{1}{2} \partial_{t_0}^2 \mathcal{F} - \partial_{t_0} D(z) \mathcal{F}, \quad (2.20)$$

где также использовано равенство (2.17). Действуя аналогичным способом, можно переписать формулу (2.19) в раздельном виде для голоморфной и антиголоморфной частей по z' :

$$\begin{aligned} \ln \frac{w(z) - w(z')}{z - z'} &= -\frac{1}{2} \partial_{t_0}^2 \mathcal{F} + D(z) D(z') \mathcal{F}, \\ -\ln \left(1 - \frac{1}{w(z) \overline{w(z')}} \right) &= D(z) \overline{D(z')} \mathcal{F}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Выписывая уравнения (2.21) для пар точек (z_1, z_2) , (z_2, z_3) и (z_3, z_1) и суммируя экспоненты обеих частей каждого уравнения, приходим к соотношению

$$(z_1 - z_2) e^{D(z_1) D(z_2) \mathcal{F}} + (z_2 - z_3) e^{D(z_2) D(z_3) \mathcal{F}} + (z_3 - z_1) e^{D(z_3) D(z_1) \mathcal{F}} = 0, \quad (2.22)$$

которое представляет собой уравнение Хироты для бездисперсионной иерархии КП или части бездисперсионной иерархии двумеризованной решетки Тоды; легко заметить, что уравнение (2.22) является просто симметричной формой уравнения (2.4). Это уравнение можно рассматривать как вырожденный случай тождества тройной секущей Фэя [6] (см. формулу (П.5) из приложения 1 и обсуждение аналогичных вопросов в п. 2.2), и оно содержит в себе информацию об алгебраических соотношениях между вторыми производными функции $\mathcal{F}$. При $z_3 \rightarrow \infty$ эти соотношения возникают в более явном, но менее симметричном виде:

$$1 - e^{D(z_1) D(z_2) \mathcal{F}} = \frac{D(z_1) - D(z_2)}{z_1 - z_2} \partial_{t_1} \mathcal{F}, \quad (2.23)$$

который ясно говорит о том, что все вторые производные $\mathcal{F}_{ij} = \partial_{t_i} \partial_{t_j} \mathcal{F}$ выражаются через производные, у которых один из индексов положен равным единице.

Более общие уравнения бездисперсионной иерархии Тоды получаются аналогичным образом, путем комбинирования уравнений (2.20) и (2.21), содержащих производные по переменным t_0 и t_k :

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2) e^{D(z_1) D(z_2) \mathcal{F}} &= z_1 e^{-\partial_{t_0} D(z_1) \mathcal{F}} - z_2 e^{-\partial_{t_0} D(z_2) \mathcal{F}}, \\ 1 - e^{-D(z) \overline{D(z)} \mathcal{F}} &= \frac{1}{z \bar{z}} e^{\partial_{t_0} \nabla(z) \mathcal{F}}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Эти уравнения позволяют выразить производные $\partial_{t_m} \partial_{t_n} \mathcal{F}$, $\partial_{t_m} \partial_{\bar{t}_n} \mathcal{F}$, $m, n \geq 1$, через производные $\partial_{t_0} \partial_{t_k} \mathcal{F}$, $\partial_{t_0} \partial_{\bar{t}_k} \mathcal{F}$. В частности, бездисперсионное уравнение Тоды

$$\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \mathcal{F} = e^{\partial_{t_0}^2 \mathcal{F}}, \quad (2.25)$$

которое следует из второго равенства в (2.24) при $z \rightarrow \infty$, выражает $\partial_{t_1} \partial_{\bar{t}_1} \mathcal{F}$ через $\partial_{t_0}^2 \mathcal{F}$.

2.2. Обобщенные уравнения Хироты для решения с многосвязным носителем. Чтобы вывести уравнения на функцию $\mathcal{F}$, в п. 2.1 мы воспользовались представлением (2.20) для конформного отображения $w(z)$ в терминах производных $\mathcal{F}$ и уравнением (2.12), связывающим конформное отображение с функцией Грина, выражаемой через вторые производные $\mathcal{F}$ [7]. В многосвязном случае [8] стратегия действий остается практически без изменений, но в качестве аналога конформного отображения $w(z)$ (или, точнее, аналога $\ln w(z)$) выступает вложение области D^c в g -мерный комплексный тор **Яс**, или якобиан дубля Шоттки Σ (см. приложение 1).

Это вложение задается, с точностью до общего сдвига в **Яс**, отображением Абеля (П.1), в котором компоненты $\omega_\alpha(z) = \int_{\xi_0}^z d\omega_\alpha$ вектора (П.1) можно рассматривать как голоморфные части гармонической меры ϖ_α , которая обсуждалась в разделе 6 работы [1]. Отображение Абеля можно выразить (см. второе выражение в формуле (6.57) работы [1]) через вторые производные функции $\mathcal{F}$:

$$\omega_\alpha(z) - \omega_\alpha(\infty) = \int_{\infty}^z d\omega_\alpha = -\partial_\alpha D(z)\mathcal{F}, \quad (2.26)$$

а также²⁾

$$2 \operatorname{Re} \omega_\alpha(\infty) = \varpi_\alpha(\infty) = -\partial_{\tau_0} \partial_\alpha \mathcal{F}. \quad (2.27)$$

Функция Грина задачи Дирихле может быть записана в терминах главной формы (П.4) (см. приложение 1) на дубле Шоттки:

$$G(z, \zeta) = \ln \left| \frac{E(z, \zeta)}{E(z, \bar{\zeta})} \right|. \quad (2.28)$$

Здесь под $\bar{\zeta}$ подразумевается (голоморфная) координата “зеркальной” точки на дубле Шоттки, т.е. “отражение” точки ζ при антиголоморфной инволюции. Пары таких точек удовлетворяют условию $\omega_\alpha(\zeta) + \omega_\alpha(\bar{\zeta}) = 0$ в якобиане (т.е. сумма равна нулю по модулю решетки периодов). Главная форма³⁾ выписывается через тета-функции Римана и отображение Абеля следующим образом:

$$E(z, \zeta) = \frac{\theta_*(\omega(z) - \omega(\zeta))}{h(z)h(\zeta)}, \quad (2.29)$$

где обе точки находятся на верхнем листе, и

$$E(z, \bar{\zeta}) = \frac{\theta_*(\omega(z) + \overline{\omega(\zeta)})}{ih(z)\overline{h(\zeta)}}, \quad (2.30)$$

²⁾Следуя [8] и [1], мы используем здесь переменные τ_k , которые более строго определены в общей ситуации, как моменты относительно правильного базиса гармонических функций $a_k(z)$. Во всех простых случаях с конечным числом нетривиальных переменных эти параметры можно идентифицировать с временами решетки Тоды t_k (подробнее см. [1]).

³⁾На заданной римановой поверхности с локальными координатами $1/z$ и $1/\bar{z}$ можно триализовать расслоение $(-1/2)$ -дифференциалов и “переопределить” главную форму $E(z, \zeta) \rightarrow E(z, \zeta) (dz)^{1/2} (d\zeta)^{1/2}$ так, что она превратится в функцию. Однако для разных координатных карт (для верхнего и нижнего листов дубля Шоттки) получатся разные функции (см., например, формулы (2.29) и (2.30) ниже).

где точка z расположена на верхнем листе, а $\bar{\zeta}$ – на нижнем (для других случаев мы определим $E(\bar{z}, \bar{\zeta}) = \overline{E(z, \zeta)}$, $E(\bar{z}, \zeta) = \overline{E(z, \bar{\zeta})}$). В этих формулах $\theta_*(\omega) \equiv \theta_{\delta^*}(\omega|T)$ обозначает тета-функцию Римана (П.3) с матрицей периодов $T_{\alpha\beta} = 2\pi i \partial_\alpha \partial_\beta \mathcal{F}$ и любой из нечетных характеристик δ^* , а

$$h^2(z) = -z^2 \sum_{\alpha=1}^g \theta_{*,\alpha}(0) \partial_z \omega_\alpha(z) = z^2 \sum_{\alpha=1}^g \theta_{*,\alpha}(0) \sum_{k \geq 1} a'_k(z) \partial_\alpha \partial_{\tau_k} \mathcal{F}. \quad (2.31)$$

Заметим, что в левой части равенства (2.30) черта означает отражение на дубле, в то время как в правой части чертой обозначено комплексное сопряжение, эти обозначения согласованы, так как локальной координатой на нижнем листе является комплексно-сопряженная переменная. Однако следует помнить, что $E(z, \bar{\zeta})$ не получается из формулы (2.29) простой подстановкой комплексно-сопряженного аргумента, а определенные выше главные “формы” E на разных листах представляются разными функциями. В нашей нормировке (2.30) величина $iE(z, \bar{z})$ вещественна (см. также приложение 1) и

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \frac{E(z, \zeta)}{z^{-1} - \zeta^{-1}} = 1, \quad (2.32)$$

в частности $\lim_{z \rightarrow \infty} zE(z, \infty) = 1$.

В выражении (2.28) множители h в главных формах сокращаются, поэтому аналог формулы (2.12) имеет вид

$$\ln \left| \frac{\theta_*(\omega(z) - \omega(\zeta))}{\theta_*(\omega(z) + \overline{\omega(\zeta)})} \right|^2 = \ln \left| \frac{1}{z} - \frac{1}{\zeta} \right|^2 + \nabla(z) \nabla(\zeta) \mathcal{F}. \quad (2.33)$$

Уже это равенство поясняет утверждение, сделанное в начале данного раздела. Действительно, его правая часть представляет собой производящую функцию для производных $\mathcal{F}_{ik}$, в то время как левая часть выражается через производные только вида $\mathcal{F}_{\alpha k}$ и $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$, и разложение уравнения по степеням z, ζ позволяет выразить первые через последние.

Аналогами уравнений (2.16), (2.17) являются формулы

$$\ln \left| \frac{\theta_*(\omega(z) - \omega(\infty))}{\theta_*(\omega(z) + \overline{\omega(\infty)})} \right|^2 = -\ln |z|^2 + \partial_{\tau_0} \nabla(z) \mathcal{F} \quad (2.34)$$

и

$$\ln \left| \frac{h^2(\infty)}{\theta_*(\varpi(\infty))} \right|^2 = \partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}, \quad (2.35)$$

соответственно, здесь $\varpi(z) \equiv 2 \operatorname{Re} \omega(z) = (\varpi_1(z), \dots, \varpi_g(z))$, а

$$h^2(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} z \theta_* \left(\int_\infty^z d\omega \right) = - \sum_{\alpha=1}^g \theta_{*,\alpha}(0) \partial_\alpha \partial_{\tau_1} \mathcal{F}. \quad (2.36)$$

Простая проверка показывает, что левая часть равенства (2.35) может быть записана в виде $-2 \ln(iE(\infty, \overline{\infty}))$. Как видно из разложения $G(z, \infty) = -\ln |z| - \ln(iE(\infty, \overline{\infty})) +$

$O(z^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$, величина $(iE(\infty, \overline{\infty}))^{-1}$ представляет собой естественный аналог конформного радиуса, и формула (2.35) действительно превращается в односвязном случае в (2.17). Однако теперь это является нетривиальным соотношением на величины $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{F}_{\alpha i}$:

$$\left(\sum_{\alpha} \theta_{*,\alpha} \partial_{\alpha} \partial_{\tau_1} \mathcal{F} \right) \left(\sum_{\beta} \theta_{*,\beta} \partial_{\beta} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} \right) = \theta_*^2(\varpi(\infty)) e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}}, \quad (2.37)$$

так что “малое фазовое пространство” определено по модулю этого соотношения.

Разложим теперь эти равенства на голоморфную и антиголоморфную части, результат этого действия удобно записать в терминах главной формы. Аналогом формулы (2.19) является соотношение

$$\ln \frac{E(\zeta, z) E(\infty, \bar{\zeta})}{E(\zeta, \infty) E(z, \bar{\zeta})} = \ln \left(1 - \frac{\zeta}{z} \right) + D(z) \nabla(\zeta) \mathcal{F}, \quad (2.38)$$

из которого, устремляя $\zeta \rightarrow \infty$, получим

$$\ln \frac{E(z, \overline{\infty})}{E(z, \infty)} = \ln z + \ln E(\infty, \overline{\infty}) - \partial_{\tau_0} D(z) \mathcal{F}. \quad (2.39)$$

Выделяя голоморфную и антиголоморфную части (2.38) по ζ , получаем аналоги формул (2.21):

$$\ln \frac{E(z, \zeta)}{E(z, \infty) E(\infty, \zeta)} = \ln(z - \zeta) + D(z) D(\zeta) \mathcal{F}, \quad (2.40)$$

$$-\ln \frac{E(z, \bar{\zeta}) E(\infty, \overline{\infty})}{E(z, \overline{\infty}) E(\infty, \bar{\zeta})} = D(z) \overline{D}(\bar{\zeta}) \mathcal{F}. \quad (2.41)$$

Комбинируя эти равенства, можно получить следующее представление для самой главной формы:

$$\begin{aligned} E(z, \zeta) &= (z^{-1} - \zeta^{-1}) e^{-(D(z) - D(\zeta))^2 \mathcal{F}/2}, \\ iE(z, \bar{\zeta}) &= e^{-(\partial_{\tau_0} + D(z) + \overline{D}(\bar{\zeta}))^2 \mathcal{F}/2}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

а также изящную формулу

$$iE(z, \bar{z}) = e^{-\nabla^2(z) \mathcal{F}/2}. \quad (2.43)$$

Для римановых поверхностей старших родов не существует простых универсальных соотношений, связывающих значения главной формы в различных точках, которые с помощью формул (2.42) могли бы быть использованы, чтобы получить уравнения на $\mathcal{F}$. Наилучшим возможным кандидатом [6] является знаменитое тождество Фэя (П.5), и, хотя оно содержит не только главные формы, но и явно сами тета-функции Римана, оно представляет собой источник замкнутых уравнений на квазиклассическую тау-функцию $\mathcal{F}$, поскольку все входящие в него величины выражаются через вторые производные функции $\mathcal{F}$ по различным переменным.

Аналог уравнений Хироты для иерархии КП (2.22) на функцию $\mathcal{F}$ может быть получен подстановкой выражений (2.26) и (2.42) в тождество Фэя (II.5). В результате возникает замкнутое уравнение, которое содержит только вторые производные $\mathcal{F}$ (напомним, что матрица периодов в тета-функциях является матрицей вторых производных $\mathcal{F}_{\alpha\beta}$). Возможны несколько эквивалентных форм этого уравнения. Первую форму мы получим, сдвинув в (II.5) $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z} - \omega_3 + \omega_4$ и положив $z_4 = \infty$:

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)e^{D(z_1)D(z_2)\mathcal{F}} & \theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega + \int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right) \theta\left(\int_{\infty}^{z_3} d\omega - \mathbf{Z}\right) + \\ & + (z_2 - z_3)e^{D(z_2)D(z_3)\mathcal{F}} \theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega + \int_{\infty}^{z_3} d\omega - \mathbf{Z}\right) \theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right) + \\ & + (z_3 - z_1)e^{D(z_3)D(z_1)\mathcal{F}} \theta\left(\int_{\infty}^{z_3} d\omega + \int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right) \theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right) = 0, \quad (2.44) \end{aligned}$$

где вектор $\mathbf{Z}$ произволен, в частности его можно положить $\mathbf{Z} = 0$. Мы видим, что уравнение (2.22) “одевается” некоторыми тета-множителями, и каждый такой тета-множитель выражается в терминах $\mathcal{F}$, например

$$\theta\left(\int_{\infty}^z d\omega\right) = \sum_{n_{\alpha} \in \mathbb{Z}} \exp\left(-2\pi^2 \sum_{\alpha\beta} n_{\alpha} n_{\beta} \partial_{\alpha\beta}^2 \mathcal{F} - 2\pi i \sum_{\alpha} n_{\alpha} \partial_{\alpha} D(z) \mathcal{F}\right). \quad (2.45)$$

Другая форма этого уравнения, получаемая из (2.44) для конкретного выбора $\mathbf{Z}$, имеет вид

$$\begin{aligned} (z_1 - z_2)z_3^{-1} e^{(D(z_1)+D(z_2))^2 \mathcal{F}/2} h(z_3) \theta_* \times \\ \times \left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega + \int_{\infty}^{z_2} d\omega\right) + [\text{циклические перестановки по } z_1, z_2, z_3] = 0. \quad (2.46) \end{aligned}$$

Переходя в (2.44) к пределу $z_3 \rightarrow \infty$, получим аналог формулы (2.23):

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega + \int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right) \theta(\mathbf{Z})}{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right) \theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right)} e^{D(z_1)D(z_2)\mathcal{F}} = \\ = \frac{D(z_1) - D(z_2)}{z_1 - z_2} \partial_{\tau_1} \mathcal{F} + \frac{1}{z_1 - z_2} \sum_{\alpha=1}^g \frac{\partial}{\partial Z_{\alpha}} \ln \frac{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right)}{\theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right)} \partial_{\alpha} \partial_{\tau_1} \mathcal{F}, \quad (2.47) \end{aligned}$$

которая также следует из другого тождества Фэя (II.6).

Уравнения на функцию $\mathcal{F}$ с производными по $\bar{\tau}_k$ следуют из общего тождества Фэя (II.5), когда некоторые точки расположены на нижнем листе. Кроме того, комбинируя выведенные выше формулы и рассматривая их при частных значениях аргументов, можно получить много других уравнений. Все вместе они образуют бесконечную иерархию согласованных дифференциальных уравнений достаточно сложной структуры, которая нуждается в дальнейшем исследовании. Функции $\mathcal{F}$, отвечающие различному выбору независимых переменных (т.е. различному выбору базисных циклов в гомологиях дубля Шоттки), представляют собой различные решения данной иерархии.

Покажем теперь как простейшее уравнение иерархии, а именно бездисперсионное уравнение Тоды (2.25), модифицируется в многосвязном случае. Применяя $\partial_z \partial_{\bar{\zeta}}$ к обеим частям равенства (2.41) и полагая $\zeta = z$, получаем

$$(\partial D(z))(\bar{\partial} \bar{D}(\bar{z}))\mathcal{F} = -\partial_z \partial_{\bar{z}} \ln E(z, \bar{z}), \quad (2.48)$$

где $\partial D(z)$ – производная по z оператора $D(z)$: $\partial D(z) = \sum_k \mathbf{a}'_k(z) \partial_{\tau_k}$. Чтобы преобразовать правую часть, воспользуемся тождеством (II.7) из приложения 1 и применим его при конкретных выборах локальных координат на двух различных листах:

$$|z|^4 \partial_z \partial_{\bar{z}} \ln E(z, \bar{z}) = \frac{\theta(\varpi(z) + \mathbf{Z})\theta(\varpi(z) - \mathbf{Z})}{\theta^2(\mathbf{Z})E^2(z, \bar{z})} + |z|^4 \sum_{\alpha, \beta} (\ln \theta(\mathbf{Z}))_{, \alpha \beta} \partial_z \omega_\alpha(z) \partial_{\bar{z}} \overline{\omega_\beta(z)}, \quad (2.49)$$

где производная $(\ln \theta(\mathbf{Z}))_{, \alpha \beta}$ определена в (II.8). Устремляя $z \rightarrow \infty$, получаем семейство уравнений (параметризуемых произвольным вектором $\mathbf{Z}$), которые обобщают бездисперсионное уравнение Тоды на квазиклассическую тау-функцию:

$$\partial_{\tau_1} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} = \frac{\theta(\varpi(\infty) + \mathbf{Z})\theta(\varpi(\infty) - \mathbf{Z})}{\theta^2(\mathbf{Z})} e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}} - \sum_{\alpha, \beta=1}^g (\ln \theta(\mathbf{Z}))_{, \alpha \beta} (\partial_\alpha \partial_{\tau_1} \mathcal{F})(\partial_\beta \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F}) \quad (2.50)$$

(здесь мы воспользовались пределами $z \rightarrow \infty$ формул (2.26) и (2.43)). Два следующих уравнения отвечают специальным выборам вектора $\mathbf{Z}$:

$$\partial_{\tau_1} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} + \sum_{\alpha, \beta=1}^g (\ln \theta(0))_{, \alpha \beta} (\partial_\alpha \partial_{\tau_1} \mathcal{F})(\partial_\beta \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F}) = \frac{\theta^2(\varpi(\infty))}{\theta^2(0)} e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}}, \quad (2.51)$$

$$\partial_{\tau_1} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} = - \sum_{\alpha, \beta=1}^g [\ln \theta_*(\varpi(\infty))]_{, \alpha \beta} (\partial_\alpha \partial_{\tau_1} \mathcal{F})(\partial_\beta \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F}). \quad (2.52)$$

Наконец, выпишем явно уравнение (2.50) для случая рода $g = 1$, когда добавляется единственная переменная S , представляющая собой либо S_1 , либо Π_1 . Тета-функция Римана $\theta(\varpi(\infty) + \mathbf{Z})$ при этом замещается тета-функцией Якоби $\vartheta(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} - Z|T) \equiv \vartheta_3(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} - Z|T)$, в которой эллиптический модулярный параметр равен $T = 2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F}$, а вектор $Z \equiv \mathbf{Z}$ имеет единственную компоненту. Уравнение приобретает вид

$$\begin{aligned} \partial_{\tau_1} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} = & \frac{\vartheta_3(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} + Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F}) \vartheta_3(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} - Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})}{\vartheta_3^2(Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})} e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}} - \\ & - \partial_Z^2 \ln \vartheta_3(Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F}) (\partial_S \partial_{\tau_1} \mathcal{F})(\partial_S \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F}). \end{aligned} \quad (2.53)$$

Заметим также, что уравнение (2.37) принимает форму

$$(\partial_S \partial_{\tau_1} \mathcal{F})(\partial_S \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F}) = \left(\frac{\vartheta_1(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} | 2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})}{\vartheta'_1(0 | 2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})} \right)^2 e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}}, \quad (2.54)$$

где $\vartheta_* \equiv \vartheta_1$ представляет собой единственную нечетную тета-функцию Якоби. Комбинируя (2.53) и (2.54), можно также получить уравнение

$$\partial_{\tau_1} \partial_{\bar{\tau}_1} \mathcal{F} = \left[\frac{\vartheta_3(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} + Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F}) \vartheta_3(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} - Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})}{\vartheta_3^2(Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})} - \left(\frac{\vartheta_1(\partial_S \partial_{\tau_0} \mathcal{F} | 2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})}{\vartheta_1'(0|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F})} \right)^2 \partial_Z^2 \ln \vartheta_3(Z|2\pi i \partial_S^2 \mathcal{F}) \right] e^{\partial_{\tau_0}^2 \mathcal{F}}, \quad (2.55)$$

которое напоминает уравнение (2.25), хотя и отличается от него нетривиальным коэффициентом в квадратных скобках. В пределе $T \rightarrow i\infty$ тета-функция ϑ_3 стремится к единице, и мы воспроизводим бездисперсионное уравнение Тоды (2.25).

2.3. Уравнения ВДВВ. Перейдем, наконец, к краткому обсуждению уравнений ВДВВ [9] в контексте геометрии матричных моделей. В наиболее общем виде их можно записать как систему алгебраических соотношений [10]

$$\mathcal{F}_I \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_I \quad \forall I, J, K \quad (2.56)$$

на матрицы, составленные из третьих производных

$$\|\mathcal{F}_I\|_{JK} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial T_I \partial T_J \partial T_K} \equiv \mathcal{F}_{IJK} \quad (2.57)$$

квазиклассической тау-функции $\mathcal{F}(\mathbf{T})$. Появившись сначала в контексте топологических струнных теорий [9], эти уравнения были обнаружены позже в более широком классе физических теорий, где точные результаты могут быть выражены в терминах единственной голоморфной функции нескольких комплексных переменных, подобно тому, как это происходит в планарных матричных моделях.

При наличии формулы вычетов (1.16) для квазиклассической тау-функции доказательство выполнения уравнений ВДВВ (2.56) сводится к решению системы линейных уравнений [11], [12], которое требует выполнения лишь следующих двух условий:

1) условие согласования

$$\#(I) = \#(a); \quad (2.58)$$

2) условие невырожденности матрицы, построенной из (1.19),

$$\det_{I,a} \|\phi_I(x_a)\| \neq 0. \quad (2.59)$$

При выполнении этих условий структурные константы C_{IJ}^K ассоциативной алгебры

$$(C_I)_L^K (C_J)_M^L = (C_J)_L^K (C_I)_M^L, \quad (C_I)_J^K \equiv C_{IJ}^K, \quad (2.60)$$

порождающей уравнения ВДВВ, могут быть найдены из системы *линейных уравнений*

$$\phi_I(x_a) \phi_J(x_a) = \sum_K C_{IJ}^K \phi_K(x_a) \quad \forall x_a, \quad (2.61)$$

$$C_{IJ}^K = \sum_a \phi_I(x_a) \phi_J(x_a) (\phi_K(x_a))^{-1}. \quad (2.62)$$

Чтобы добиться максимальной общности, как в работе [10], можно рассмотреть изоморфную ассоциативную алгебру (снова $\forall x_a$)

$$\phi_I(x_a) \phi_J(x_a) = \sum_K C_{IJ}^K(\xi) \phi_K(x_a) \cdot \xi(x_a), \quad (2.63)$$

которая вместо (2.62) приводит к выражению

$$C_{IJ}^K(\xi) = \sum_a \frac{\phi_I(x_a) \phi_J(x_a)}{\xi(x_a)} (\phi_K(x_a))^{-1}. \quad (2.64)$$

Остается доказать согласованность этой алгебры с соотношением

$$\mathcal{F}_{IJK} = \sum_L C_{IJ}^L(\xi) \eta_{KL}(\xi) \quad (2.65)$$

при

$$\eta_{KL}(\xi) = \sum_A \xi_A \mathcal{F}_{KLA}, \quad (2.66)$$

выражающим структурные константы в терминах третьих производных свободной энергии и приводящим немедленно к уравнениям (2.56). Легко видеть, что соотношение (2.65) выполняется, если производные $\mathcal{F}_{KLA}$ представляются в виде формулы вычетов (1.16), которую можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial T_I \partial T_J \partial T_K} &= \frac{1}{2\pi i} \sum_a \text{res}_{|x_a} \left(\frac{dH_I dH_J dH_K}{dx dy} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_a \text{res}_{|x_a} \left(\frac{\phi_I \phi_J \phi_K}{dx/dy} dy \right) = \sum_a \Gamma_a^2 \phi_I(x_a) \phi_J(x_a) \phi_K(x_a), \end{aligned} \quad (2.67)$$

где $\Gamma_a = \sqrt{\prod_{b \neq a} (x_a - x_b)}$ (см. п. 4.5 работы [1]).

Действительно [12], достаточно потребовать лишь выполнения условия (2.58), чтобы получить

$$\sum_K C_{IJ}^K(\xi) \eta_{KL}(\xi) = \sum_{K,a,b} \frac{\phi_I(x_a) \phi_J(x_a)}{\xi(x_a)} \cdot (\phi_K(x_a))^{-1} \cdot \phi_K(x_b) \phi_L(x_b) \xi(x_b) \Gamma_b \quad (2.68)$$

и окончательно

$$\begin{aligned} \sum_K C_{IJ}^K(\xi) \eta_{KL}(\xi) &= \sum_a \frac{\phi_I(x_a) \phi_J(x_a)}{\xi(x_a)} \phi_L(x_a) \xi(x_a) \Gamma_a = \\ &= \sum_a \Gamma_a \phi_I(x_a) \phi_J(x_a) \phi_L(x_a) = \mathcal{F}_{IJL}. \end{aligned} \quad (2.69)$$

Таким образом, для доказательства выполнения уравнений (2.56) следует выбрать полное число параметров $\{T_I\}$ в соответствии с условием (2.58). Число критических точек для одноматричной модели равно $\#(a) = 2n$, поскольку $dx = 0$ в точках ветвления кривой (1.8), т.е. при $y^2 = R(x) = 0$. Тем самым следует ограничиться на подпространство единичной коразмерности в пространстве всех возможных параметров одноматричной модели, для этого естественно зафиксировать старший коэффициент потенциала (1.4). Тогда полное число параметров $\#(I)$, включающих периоды $\mathbf{S}$, вычет t_0 и оставшиеся коэффициенты потенциала, составляет $g + 1 + n = (n - 1) + 1 + n = 2n$, т.е. в точности равно числу критических точек $\#(a)$. В работе [13] приведена явная проверка уравнений ВДВВ для такого выбора параметров с использованием разложения свободной энергии одноматричной модели, вычисленного в [14]. Аналогично можно было бы поступить и для двухматричной модели (1.2) с негиперэллиптической кривой (1.9), где число критических точек в формуле вычетов $\#(a)$ легко извлекается из анализа работы [1], так как мы никоим образом не использовали специальные свойства одноматричного случая. Однако проблема заключается в том, что число критических точек для двухматричной модели $\#(a) = 2n^2 + n - 1$ (см., например, формулу (5.27) работы [1]) для достаточно большого n превышает наивное полное число параметров модели.

Другим важным моментом является то, что формула (2.67), выражающая третьи производные квазиклассической тау-функции $\mathcal{F}$ через величины $\phi_{I\alpha}$, определенные формулами (1.19), предлагает интерпретировать $\mathcal{F}$ как свободную энергию некоторой топологической теории струн с тремя пропагаторами $\phi_{I\alpha}$, приходящими в ту же самую тройную вершину:

Более того, следующий член F_1 разложения (1.7) можно ассоциировать с однопетлевой диаграммой в этой топологической теории, т.е. с детерминантом $\det_{I,a} \phi_I(x_a)$ [15]:

по формуле

$$F_1 = -\frac{1}{2} \ln \left(\Delta^{1/3}(x) \cdot \det_{i,j} \oint_{A_i} \frac{x^{j-1} dx}{y} \right) \sim \frac{1}{2} \ln (\det_{I,a} \phi_I(x_a)). \quad (2.70)$$

Таким образом, можно предположить, что существует некоторая диаграммная техника для вычисления вкладов старших родов в свободную энергию и в производящие функции для корреляторов матричных моделей.

3. МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ И (p, q) -ТЕОРИЯ СТРУН

Перейдем теперь к некоторым физическим приложениям геометрической картины, непосредственно связанной с интегрируемостью матричных моделей, которая

была представлена в первой части данной работы [1] и развита в предыдущих разделах. В качестве первого, но уже вполне нетривиального примера мы рассмотрим корреляционные функции в простейших, так называемых (p, q) -струнных моделях, которые непосредственно отвечают дуальному описанию двумерной гравитации в терминах матричных моделей [16].

3.1. Решения бездисперсионной иерархии КП для (p, q) -критических точек. Согласно существующей уже около пятнадцати лет и крайне популярной гипотезе (см., например, [17]) так называемые (p, q) -критические точки двумерной гравитации (отвечающие обобщенным минимальным конформным моделям материи [18], взаимодействующим с двумерной лиувилевской гравитацией [2]) наиболее эффективно могут быть описаны в терминах тау-функции иерархии КП, удовлетворяющей струнному уравнению (см. также п. 2.3 работы [1]). В частности, это означает, что корреляторы на мировых листах с топологией сферы (которые только и посчитаны частично на настоящий момент методами двумерной конформной теории поля) определяются квазиклассической тау-функцией бездисперсионной иерархии КП, являющейся частным случаем общей квазиклассической иерархии. Для каждой (p, q) -й точки следует рассматривать решение p -редуцированной бездисперсионной иерархии КП, а точнее его разложение в окрестности ненулевого времени $t_{p+q} = p/(p+q)$ и нулевых остальных времен, за исключением разве что $t_1 = x$ (так называемый конформный фон).

На геометрическом языке квазиклассических иерархий результат может быть сформулирован следующим образом.

1. Для любой (p, q) -й точки возьмем пару полиномов

$$X = \lambda^p + \dots, \quad Y = \lambda^q + \dots \quad (3.1)$$

степеней p и q , соответственно. Их удобно переписать в виде производящего дифференциала

$$dS = Y dX. \quad (3.2)$$

2. Параметры квазиклассической иерархии (“времена”) и соответствующие им одноточечные функции определяются формулами (1.14), где

$$\xi = X^{1/p} = \lambda \left(1 + \dots + \frac{X_0}{\lambda^p} \right)^{1/p} \quad (3.3)$$

представляет собой локальную координату в точке $\lambda(P_0) = \infty$. Дополнительное ограничение на то, что $\xi^p = \xi_+^p$ или $\xi_-^p = 0$ (т.е. ξ^p является полиномом по λ), означает, что мы имеем дело с конкретной p -редукцией бездисперсионной иерархии КП.

3. При масштабном преобразовании $X \rightarrow \Lambda^p X$, $Y \rightarrow \Lambda^q Y$ (индуцированном $\lambda \rightarrow \Lambda \lambda$, а значит, и $\xi \rightarrow \Lambda \xi$) времена (1.14) преобразуются как $t_k \rightarrow \Lambda^{p+q-k} t_k$. Тогда из второй формулы в (1.14) следует, что функция $\mathcal{F}$ преобразуется в $\mathcal{F} \rightarrow \Lambda^{2(p+q)} \mathcal{F}$, или, например, следующим образом:

$$\mathcal{F} \propto t_1^{2(p+q)/(p+q-1)} f(\tau_k), \quad (3.4)$$

где f предполагается масштабно-инвариантной функцией соответствующих безразмерных отношений времен $\tau_k = t_k/t_1^{(p+q-m)/(p+q-1)}$ (1.14). В простейшем случае $(p, q) = (2, 2K - 1)$ бездисперсионной иерархии Кортевега–де Фриза (КдФ) можно ожидать также другой естественный скейлинг вида

$$\mathcal{F} \propto t_{2K-3}^{K+1/2} f(t_l), \quad (3.5)$$

где $t_l = t_{2l-1}/t_{2K-3}^{(K-l+1)/2}$, с выделенным космологическим временем $t_{2K-3} \propto \Lambda^4$.

Отметим также, что тау-функции (p, q) - и (q, p) -теорий не совпадают, а связаны друг с другом некоторым преобразованием Лежандра [19], которое уже обсуждалось детально для препотенциалов общего вида в [1].

3.2. Чистая гравитация: $(p, q) = (2, 3)$. В данном случае имеются всего два нетривиальных параметра: t_1 и t_3 , и статсумма может быть вычислена явно. Времена (1.14) могут быть выражены как

$$t_5 = \frac{2}{5}, \quad t_3 = \frac{2}{3}Y_1 - X_0, \quad t_1 = \frac{3}{4}X_0^2 - X_0Y_1 \quad (3.6)$$

в терминах коэффициентов полиномов X и Y (остальные коэффициенты при $t_2 = t_4 = 0$ равны нулю),

$$X = \lambda^2 + X_0, \quad Y = \lambda^3 + Y_1\lambda, \quad (3.7)$$

и, несмотря на нелинейность, эти квадратные уравнения явно решаются относительно коэффициентов

$$X_0 = \frac{1}{3}\sqrt{9t_3^2 - 12t_1 - t_3}, \quad Y_1 = \frac{1}{2}\sqrt{9t_3^2 - 12t_1}. \quad (3.8)$$

Вычеты во второй формуле в (1.14) дают

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= \frac{1}{8}X_0^3 - \frac{1}{4}Y_1X_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_3} &= -\frac{1}{8}Y_1X_0^3 + \frac{3}{64}X_0^4. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Это приводит к следующей явной формуле для квазиклассической тау-функции:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{3240}(9t_3^2 - 12t_1)^{5/2} + \frac{1}{4}t_3^3t_1 - \frac{1}{4}t_3t_1^2 - \frac{3}{40}t_3^5. \quad (3.10)$$

При $t_3 \rightarrow \infty$ (разложение, отвечающее $t_1 \rightarrow 0$) формула (3.10) приводит к выражению

$$\mathcal{F} \underset{t_3 \rightarrow \infty}{=} -\frac{t_1^3}{18t_3} \left(1 + O\left(\frac{t_1}{t_3^2}\right) \right), \quad (3.11)$$

совпадающему со статсуммой модели Концевича [20], [21] (отождествляемой также с точкой $(p, q) = (2, 1)$ или топологической гравитацией). При $t_1 \rightarrow \infty$ тау-функция (3.10) ведет себя как $\mathcal{F} \propto t_1^{5/2}$ или как статсумма чистой двумерной гравитации [16]: разложение при $t_1 \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\mathcal{F} = (-3t_1)^{5/2} \left(\frac{4}{405} - \frac{1}{54} \frac{t_3^2}{t_1} + \frac{1}{96} \frac{t_3^4}{t_1^2} + O\left(\frac{t_3^6}{t_1^3}\right) \right) + \dots \quad (3.12)$$

с точностью до аналитических членов.

3.3. Модель Янга–Ли: $(p, q) = (2, 5)$. Вычисление времен по формулам (1.14) дает

$$\begin{aligned} t_1 &= -\frac{5}{8}X_0^3 + \frac{3}{4}Y_3X_0^2 - Y_1X_0, & t_3 &= \frac{5}{4}X_0^2 - Y_3X_0 + \frac{2}{3}Y_1, \\ t_5 &= \frac{2}{5}Y_3 - X_0, & t_7 &= \frac{2}{7} \end{aligned} \quad (3.13)$$

для полиномов

$$X = \lambda^2 + X_0, \quad Y = \lambda^5 + Y_3\lambda^3 + Y_1\lambda. \quad (3.14)$$

Легко видеть, что уравнения (3.13) легко разрешаются относительно

$$Y_1 = \frac{3}{2} \left(t_3 + \frac{5}{4}X_0^2 + \frac{5}{2}t_5X_0 \right), \quad Y_3 = \frac{5}{2}(X_0 + t_5), \quad (3.15)$$

а струнное уравнение для функции X_0 теперь имеет вид

$$t_1 = -\frac{5}{8}X_0^3 - \frac{3}{2}t_3X_0. \quad (3.16)$$

Одноточечные функции (1.14) определяются формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= -\frac{5}{64}X_0^4 - \frac{1}{4}Y_1X_0^2 + \frac{1}{8}Y_3X_0^3 = -\frac{15}{64}X_0^4 - \frac{3}{8}t_3X_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_3} &= -\frac{1}{8}Y_1X_0^3 - \frac{3}{128}X_0^5 + \frac{3}{64}Y_3X_0^4 = -\frac{9}{64}X_0^5 - \frac{3}{16}t_3X_0^3, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где в правые части равенств подставлены выражения для Y_j , полученные в результате решения (3.13). Из выражений (1.15) или дифференцируя (3.17) и используя (3.16), легко получить⁴⁾

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} &= \frac{X_0}{2}, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1 \partial t_3} &= \frac{3}{8}X_0^2 = \frac{3}{2} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} \right)^2, \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_3 \partial t_3} &= \frac{3}{8}X_0^3 = 3 \left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} \right)^3. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Однако нелинейное уравнение (3.16) нельзя решить явно эффективным образом, но решение легко получить разложением по t_3 . В “наивном” скейлинговом режиме (3.4) для статсуммы модели $(p, q) = (2, 5)$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= t_1^{7/3} f \left(\frac{t_3}{t_1^{2/3}} \right), \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= \frac{7}{3} t_1^{4/3} f - \frac{2}{3} t_3 t_1^{2/3} f', \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} &= \frac{28}{9} t_1^{1/3} f - 2 \frac{t_3}{t_1^{1/3}} f' + \frac{4}{9} \frac{t_3^2}{t_1} f''. \end{aligned} \quad (3.19)$$

⁴⁾ Второе из уравнений (3.18) имеет смысл бездисперсионного уравнения Хироты с дополнительной $(p = 2)$ редукцией КдФ.

Подставляя последнее выражение (с использованием (3.18)) в (3.16), для первых коэффициентов f получаем

$$f(\tau) = f_0 + f_1\tau + \frac{1}{2}f_2\tau^2 + \frac{1}{6}f_3\tau^3 + \frac{1}{24}f_4\tau^4 + \dots, \quad (3.20)$$

$$f_0 = -\frac{9}{140}5^{2/3}, \quad f_1 = \frac{9}{50}5^{1/3}, \quad f_3 = \frac{9}{25}5^{2/3}, \quad f_4 = \frac{18}{25}5^{1/3}, \quad \dots,$$

причем f_2 (коэффициент при аналитическом члене $t_1 t_3^2$ разложения функции $\mathcal{F}$, исчезающий из ее старших производных) остается неопределенным. Соответствующие масштабно-инвариантные величины равны, например,

$$\frac{f_1 f_3}{f_0 f_4} = \frac{7}{5}, \quad \frac{f_1^3}{f_0^2 f_3} = \frac{98}{125}, \quad \frac{f_1^4}{f_0^3 f_4} = \frac{686}{625}, \quad \frac{f_0 f_3^2}{f_1^2 f_4} = \frac{25}{14}, \quad \dots \quad (3.21)$$

Заметим, что эти масштабно-инвариантные комбинации являются простыми рациональными числами, в отличие от самих коэффициентов (3.20), которые существенным образом зависят от нормировки времен. В приложении 2 показано, что разложение (3.20) имеет отношение к модели Изинга $(p, q) = (3, 4)$ на флуктуирующей решетке.

Однако в неунитарном случае можно ожидать другой естественный скейлинг, при котором времена меняются ролями. Для конкретного случая модели $(p, q) = (2, 5)$ при этом подразумевается следующее поведение⁵⁾:

$$\mathcal{F} = t_3^{7/2} f\left(\frac{t_1}{t_3^{3/2}}\right) \equiv t_3^{7/2} f(t), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} = t_3^2 f', \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} = t_3^{1/2} f'', \quad \dots, \quad (3.22)$$

а струнное уравнение (3.16) принимает вид

$$t + 5(f'')^3 + 3f'' = 0. \quad (3.23)$$

Решение уравнения (3.23) немедленно дает значения старших коэффициентов разложения $f_n \equiv f^{(n)}|_{t=0}$ нормированной функции f :

$$f_3 = -\frac{1}{3(1+5f_2^2)}, \quad f_4 = -\frac{10f_2}{9(1+5f_2^2)^3}, \quad f_5 = -\frac{10(-1+25f_2^2)}{27(1+5f_2^2)^5}, \quad \dots, \quad (3.24)$$

которые выражаются через двухточечную функцию, удовлетворяющую кубическому уравнению

$$3f_2 + 5f_2^3 = 0, \quad (3.25)$$

в то время как “нормировка” f_0 и одноточечная функция f_1 не определяются непосредственно из струнного уравнения (3.23). Чтобы найти их, следует воспользоваться вторым уравнением из (3.17) совместно со второй формулой из (3.22), или

$$7f - 3tf' + 9(f'')^5 + 3(f'')^3 = 0, \quad (3.26)$$

⁵⁾Такой скейлинг предполагает также специальное поведение $F_A(t_1) = A^{-7/2} z(t_1 A^{3/2})$ преобразованной по Лапласу функции распределения

$$\mathcal{F}(t_1, t_3) = \int_0^\infty \frac{dA}{A} e^{-t_3 A} F_A(t_1)$$

с “фиксированной площадью” (ср. [22]).

что дает

$$f_0 = -\frac{9}{7}f_2^5 - \frac{3}{7}f_2^3, \quad f_1 = -\frac{9}{4}f_2^3f_3 - \frac{45}{4}f_2^4f_3. \quad (3.27)$$

В фазе с ненулевым f_2 это приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned} f_0 &= -\frac{36}{175}\sqrt{-\frac{3}{5}}, & f_1 &= -\frac{9}{20}, & f_2 &= \sqrt{-\frac{3}{5}}, \\ f_3 &= \frac{1}{6}, & f_4 &= \frac{1}{4}\sqrt{-\frac{5}{3}}, & f_5 &= -\frac{5}{27}, \quad \dots \end{aligned} \quad (3.28)$$

Наконец, легко вычислить инвариантные комбинации, которые не зависят от нормировки времен и свободной энергии, например ⁶⁾

$$\frac{f_0f_2}{f_1^2} = \frac{64}{105}, \quad \frac{f_4f_2}{f_3^2} = -3, \quad \frac{f_4f_3}{f_2f_5} = -\frac{1}{8}, \quad \dots \quad (3.29)$$

Аналогичные формулы для минимальной струнной теории $(p, q) = (2, 7)$, а также для $(p, q) = (3, 4)$ модели Изинга на флуктуирующей решетке приведены в приложении 2.

3.4. Задача Гуревича–Питаевского и матричная модель с логарифмическим потенциалом. Перейдем теперь к обсуждению задачи Гуревича–Питаевского (ГП) [23], возникшей изначально при изучении нелинейных волн, а позже связанной с задачами теории струн и непертурбативных калибровочных теорий (см., например, [24]) и проблемами лапласовского роста [25] (см. недавнюю работу [26]). Решение задачи ГП связывает различные фазы бездисперсионного решения квазиклассических иерархий, отвечающих рациональным кривым Σ сферической топологии, посредством их “сшивания” с решениями, задаваемыми кривыми старших родов, в некоторой промежуточной фазе. В частности, именно таким способом разрешаются сингулярности бездисперсионных решений. При этом параметры решений оказываются “модулированными” в соответствии с уравнениями квазиклассических иерархий.

Ниже мы рассмотрим сначала оригинальную задачу ГП для иерархии КдФ, геометрия которой совпадает с геометрией модели $(p, q) = (2, 5)$ из п. 3.3, а затем обратимся к конкретному примеру двухматричной модели (1.2) с неполиномиальным потенциалом. Основным геометрическим условием в задаче ГП является то, что конечнозонные решения нелинейных волновых уравнений для кривых различных родов, для того чтобы аккуратно сшиваться при обходе сингулярности, должны иметь одинаковое значение (вещественной части) периодов производящего дифференциала $\oint dS$ по нетривиальным циклам.

В одной из двух изначальных постановок задачи ГП изучались свойства кубического струнного уравнения (3.16) для модели $(p, q) = (2, 5)$. Соответствующее

⁶⁾ Величины (3.29) совпадают с недавно вычисленными из теории Лиувилля на мировом листе струны (см. [22]).

комплексное многообразие легко описать, если заметить, что полиномы (3.14) удовлетворяют уравнению (вырожденной) кривой для модели $(p, q) = (2, 5)$

$$\begin{aligned} Y^2 = & X^5 + (2Y_3 - 5X_0)X^4 + (Y_3^2 - 8Y_3X_0 + 2Y_1 + 10X_0^2)X^3 + \\ & + (2Y_3Y_1 - 3Y_3^2X_0 - 6Y_1X_0 - 10X_0^3 + 12Y_3X_0^2)X^2 + \\ & + (Y_1^2 + 5X_0^4 - 8Y_3X_0^3 + 3Y_3^2X_0^2 + 6Y_1X_0^2 - 4Y_3Y_1X_0)X + \\ & + 2Y_3Y_1X_0^2 + 2Y_3X_0^4 - X_0^5 - Y_3^2X_0^3 - 2Y_1X_0^3 - Y_1^2X_0 \equiv \\ \equiv & (X - X_0)(X - x_+)^2(X - x_-)^2, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$x_{\pm} = -\frac{X_0}{4} \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\frac{5}{4}X_0^2 - 6t_3} \quad (3.31)$$

и сумма всех корней, пропорциональная t_5 из (3.13), положена равной нулю. При разрешении всех сингулярностей кривая (3.30) имела бы род $g = 2$, а в случае частичного их разрешения ее можно представлять как эллиптическую кривую с дополнительной “двойной точкой”.

Критические значения параметров решения определяются обращением в нуль периодов производящего дифференциала $dS = Y dX$. Для рационального случая их легко вычислить, скажем, используя (3.14), что приводит к

$$\int_{\lambda_i}^{\lambda_j} Y dX = \frac{2}{7}\lambda^7 + \frac{2}{5}Y_3\lambda^5 + \frac{2}{3}Y_1\lambda^3 \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_j} = \frac{2}{7}\lambda^7 + X_0\lambda^5 + \left(t_3 + \frac{5}{4}X_0^2\right)\lambda^3 \Big|_{\lambda_i}^{\lambda_j}, \quad (3.32)$$

где критические точки $\{\lambda_i\}$ находятся из решения уравнения $Y = 0$. Вычисляя (3.32) с такими пределами, находим критические значения

$$\frac{t_1}{(-t_3)^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \frac{3\sqrt{6}}{\sqrt{5}}, \quad -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}. \quad (3.33)$$

Отношение двух последних величин равно $-\sqrt{2}/(\sqrt{10}/27)$, что было найдено численно Гуревичем и Питаевским [23], в то время как первое значение отвечает критическому показателю уравнения (3.16). Два других значения отвечают $x_+ = x_-$, а также нетривиальному случаю обращения в нуль интеграла $\int_{x_-}^{x_+} Y dX$. С точки зрения скейлинговой модели Янга–Ли эти критические значения отвечают выделенным значениям в пространстве параметров, при которых обращается в нуль струнная однопетлевая поправка к двухточечному коррелятору X_0 .

Перейдем теперь к аналогичной процедуре для двухматричной модели. До сих пор вся геометрическая картина для двухматричной модели в [1] была описана не вполне явно, но ниже мы рассмотрим явный (и даже неполиномиальный, см. также обсуждение в [27]) пример потенциала (1.3) с логарифмической голоморфной частью

$$W(z) = -\nu \left(\ln \left(1 - \frac{z}{a} \right) + \frac{z}{a} \right), \quad (3.34)$$

где a предполагается вещественным (см. его сечение на рис. 1). Два его экстремума удовлетворяют уравнению

$$z\bar{z} - a\bar{z} + \frac{\nu}{a}z = 0 \quad (3.35)$$

Рис. 1. Вертикальный разрез потенциала матричной модели (1.3) с логарифмической голоморфной частью (3.34), которая имеет “клюв” при $z = a$ (здесь $a = 5$ и $\nu = 1$).

совместно с комплексно-сопряженным, они расположены в точке $z = \bar{z} = 0$, являющейся минимумом потенциала, а также в точке $z = \bar{z} = a - \nu/a$, представляющей собой седловую точку. Соответствующее уравнение комплексной кривой (1.9) для двухматричной модели [28] имеет вид

$$\begin{aligned} z^2 \bar{z}^2 - \left(a - \frac{\nu}{a}\right)(z^2 \bar{z} + z \bar{z}^2) + cz \bar{z} - \nu(z^2 + \bar{z}^2) + g(z + \bar{z}) + h &\equiv \\ &\equiv Q(z) \bar{z}^2 - P(z) \bar{z} - K(z) = 0, \end{aligned} \quad (3.36)$$

где последние два члена отвечают точкам строго внутри соответствующего многоугольника Ньютона (см. рис. 2). Кривая (3.36) оснащена стандартным производящим дифференциалом двухматричной модели

$$\bar{z} dz = \left(\frac{P}{2Q} + \frac{\sqrt{R}}{2Q}\right) dz = \left(\frac{P}{2Q} + \frac{1}{2Q} \sqrt{P^2 + 4QK}\right) dz. \quad (3.37)$$

Рациональные вырождения этой кривой (см. обсуждение рациональных вырождений для кривых общего вида в приложении 1 работы [1]) могут быть описаны в терминах конформного отображения

$$\begin{aligned} z &= rw + \frac{u}{w-s} + v, \\ \bar{z} &= \frac{r}{w} + \frac{uw}{1-sw} + v, \end{aligned} \quad (3.38)$$

где все коэффициенты предполагаются вещественными; в отличие от конформных отображений, рассмотренных в приложении 1 работы [1], формулы (3.38) имеют особенности не только при $w = \infty$. В случае рационального вырождения кривой

Рис. 2. Многоугольник Ньютона (квадрат!) для кривой (3.36) рода $g = 1$.

(3.36) имеем

$$\begin{aligned} \sqrt{R} &= \Delta(z - \xi_0) \sqrt{(z - \xi_+)(z - \xi_-)}, \\ \tilde{z} &= \frac{P}{2Q} + \frac{1}{2Q} \sqrt{P^2 + 4QK} = \frac{P(z)}{2Q(z)} + \frac{\Delta}{2Q(z)} (z - \xi_0) \sqrt{(z - \xi_+)(z - \xi_-)}, \end{aligned} \quad (3.39)$$

где

$$\Delta = a + \frac{\nu}{a}, \quad (3.40)$$

и это отвечает следующим соотношениям между коэффициентами в (3.39) и (3.38):

$$\xi_{\pm} = v + rs \pm 2\sqrt{ru}, \quad \xi_0 = v + \frac{r-u}{s}, \quad (3.41)$$

а также некоторым более сложным соотношениям для коэффициентов (3.36). Некоторые полезные формулы для этого случая собраны в приложении 3.

Вычисляя вычеты производящего дифференциала (3.37), легко видеть, что в дополнение к обычному параметру

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|w|=1} \tilde{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_1} \tilde{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|\infty+} \tilde{z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_1} \tilde{z} dz - \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_2} \tilde{z} dz = \\ &= r^2 - \frac{u^2}{(1-s^2)^2} = \frac{a^2 - \nu}{a^2 + \nu} \left(a^2 + \frac{\nu^2}{a^2} - c \right) - \frac{2ga}{a^2 + \nu} \end{aligned} \quad (3.42)$$

естественно ввести параметр

$$\delta \equiv \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_1} \tilde{z} dz + \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_2} \tilde{z} dz + 2\nu = a^2 + \frac{\nu^2}{a^2} - c. \quad (3.43)$$

Используя (3.43) и (3.42), уравнение кривой (3.36) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} z^2 \tilde{z}^2 - \left(a - \frac{\nu}{a} \right) (z^2 \tilde{z} + z \tilde{z}^2) + \left(a^2 + \frac{\nu^2}{a^2} - \delta \right) z \tilde{z} - \nu (z^2 + \tilde{z}^2) + \\ + \left(\frac{t_0}{2} \left(a + \frac{\nu}{a} \right) + \frac{\delta}{2} \left(a - \frac{\nu}{a} \right) \right) (z + \tilde{z}) + h = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Последний коэффициент h связан с единственным нетривиальным периодом дифференциала (3.37)

$$S = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{A}} \tilde{z} dz. \quad (3.45)$$

В дальнейшем мы положим $\delta = t_0$, что отвечает $\text{res}|_{q_2} \tilde{z} dz = \text{const}$, при этом уравнение (3.44) принимает окончательный вид

$$z^2 \tilde{z}^2 - \left(a - \frac{\nu}{a}\right)(z^2 \tilde{z} + z \tilde{z}^2) + \left(a^2 + \frac{\nu^2}{a^2} - t_0\right)z \tilde{z} - \nu(z^2 + \tilde{z}^2) + t_0 a(z + \tilde{z}) + h = 0. \quad (3.46)$$

Эти формулы приводят к следующей системе уравнений на параметры конформных отображений (3.38):

$$\begin{aligned} r + \frac{u}{1-s^2} &= \Delta s, \\ \left(r + \frac{u}{1-s^2}\right) \left(r - \frac{u}{1-s^2}\right) &= t_0, \\ r^2 - \frac{ru}{s^2} &= t_0 - \nu. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Решая (3.47), получаем

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2} \left(\Delta s + \frac{t_0}{\Delta s} \right), \\ u &= \frac{1-s^2}{2} \left(\Delta s - \frac{t_0}{\Delta s} \right), \end{aligned} \quad (3.48)$$

а величина $s^2 = \mathcal{X}$ является решением следующего кубического уравнения:

$$\mathcal{X} + \frac{t_0^2}{2\Delta^4} \frac{1}{\mathcal{X}^2} = \frac{1}{2} - \frac{2\nu}{\Delta^2} + \frac{t_0}{\Delta^2}. \quad (3.49)$$

Уравнение (3.49) легко решить относительно t_0 :

$$t_0 = \Delta^2 \mathcal{X}^2 \pm \Delta^2 \mathcal{X} \sqrt{\left(\mathcal{X} - 1 - \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}\right) \left(\mathcal{X} - 1 + \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}\right)}. \quad (3.50)$$

Легко видеть, что два решения (3.50) положительны при

$$\begin{aligned} t_0^{(+)} : \quad & 0 < \mathcal{X} < 1 - \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}, \quad \mathcal{X} > 1 + \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}, \\ t_0^{(-)} : \quad & \mathcal{X} < 0, \quad \frac{1}{2} - \frac{2\nu}{\Delta^2} < \mathcal{X} < 1 - \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}, \quad \mathcal{X} > 1 + \frac{2\sqrt{\nu}}{\Delta}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Таким образом, полная картина может быть представлена как растущая капля, которая отвечает двумерной горизонтальной поверхности “жидкости собственных значений” с площадью t_0 , которая наполняет “чашу” потенциала (см. рис. 1).

Легко видеть, что две фазы, которые представляют реальный физический интерес, можно описать следующим образом.

1. Растущая капля до “вкрапления”: эта фаза отвечает $0 < \mathcal{X} < 1 - 2\sqrt{\nu}/\Delta$ и выбору $t_0 = t_0^{(+)}$. Собственные значения начинают заполнять минимум двумерного

Рис. 3. Граничные кривые для первой фазы. Начиная с картины на левом рисунке на границе развивается “клюв” при подходе к $z_{\text{saddle}} = a - \nu/a$ (здесь $a = 5$ и $\nu = 1/2$).

Рис. 4. Граничные кривые для второй фазы. Начиная с “вкрапления” при $z = a$, как показано на левом рисунке, граница капли приобретает гладкую форму, близкую к эллиптической, как на правом рисунке (здесь $a = 5$ и $\nu = 1/2$).

Рис. 5. Численные значения интеграла $\operatorname{Re} \oint \tilde{z} dz$ в различных фазах: $\xi_0 > \xi_+$ и $\xi_0 < \xi_-$ (при $a = 5$ и $\nu = 1/2$).

потенциала при $z = z_{\min} = 0$, и с ростом t_0 их уровень поднимается до тех пор, пока не достигнет $V(z_{\text{saddle}}) = a^2 - \nu^2/a^2 + 2\nu \ln(\nu/a^2)$ (см. рис. 3). В этой фазе $\xi_0 > \xi_+$, т.е. при вещественном выборе всех необходимых параметров разрез между ξ_- и ξ_+ (3.39) расположен слева от двойной точки ξ_0 .

2. Растущая капля после “вкрапления”: эта фаза отвечает $X > 1 + 2\sqrt{\nu}/\Delta$ и выбору $t_0 = t_0^{(-)}$. Собственные значения заполняют впадинку при $z = a$ и их уровень гладко растет с ростом t_0 (см. рис. 4). Здесь $\xi_0 < \xi_-$, т.е. разрез в (3.39) расположен справа от двойной точки.

Между этими двумя фазами капля должна как-то пройти через особенность. Эта особая точка может быть пройдена решением в духе [23], при этом происходит переход с рациональной кривой к несингулярной кривой (3.36) рода $g = 1$. Вырожденные решения, отвечающие роду $g = 0$, могут быть склеены решением с $g = 1$ только при условии совпадающих значений

$$\operatorname{Re} \oint \tilde{z} dz = \begin{cases} \operatorname{Re} \int_{w_0^-}^{w_0^+} \tilde{z} dz, & \xi_0 > \xi_+, \\ \operatorname{Re} \int_{w_0^+}^{w_0^-} \tilde{z} dz, & \xi_0 < \xi_-, \end{cases} \quad (3.52)$$

где $w_0^\pm \equiv w^\pm|_{z=\xi_0}$ — два значения прообразов точки $z = \xi_0$ в w -плоскости. На рис. 5 видно, что эти значения действительно склеиваются для различных фаз, в частности при выборе $\operatorname{Re} \oint \tilde{z} dz = 0$.

4. КОМПЛЕКСНАЯ ГЕОМЕТРИЯ АДС/КТП-СООТВЕТСТВИЯ

Матричные модели, которые обсуждались в [1] и выше в данной работе, представляют собой простейший пример дуальности между калибровочными полями и струнами [2]. Являясь “нульмерным” примером калибровочной теории, они предлагают дуальное описание теорий струн в размерности меньше двух, или “пространственно-временную” формулировку двумерной гравитации на мировом листе струны.

В отличие от матричных моделей, гипотеза АдС/КТП-соответствия [29] имеет дело уже с *четырёхмерной* $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией полей Янга–Миллса (ЯМ) с калибровочной группой $SU(N)$. В рамках $1/N$ -разложения (1.7) основной вклад, когда подавлены струнные петли, дается планарными диаграммами при $N \rightarrow \infty$ и фиксированной постоянной 'т Хоофта $\lambda = g_{\text{YM}}^2 N = g_s N$ (совпадающей по смыслу с параметром t_0 для матричных моделей, который интенсивно использовался выше и в работе [1]), в то время как струнная константа $g_s = g_{\text{YM}}^2$ эквивалентна параметру квазиклассичности $\hbar$. При $\lambda \gg 1$ суперсимметричная $\mathcal{N} = 4$ теория ЯМ дуальна теории струн в пространстве $AdS_5 \times S^5$ с равными, с точностью до знака (положительного для сферы S^5 и отрицательного для пространства Лобачевского AdS_5), радиусами кривизны $R/\sqrt{\alpha'} = \lambda^{1/4}$. Поэтому любая проверка АдС/КТП-соответствия предполагает сравнение аналитических разложений при $\lambda = 0$ (теория возмущений в суперсимметричной теории ЯМ, которая является прямым аналогом счета диаграмм в матричных моделях согласно [16]) с аналитическими разложениями по $\alpha' \propto 1/\sqrt{\lambda}$ в теории на мировом листе.

Возможным частичным выходом из такого разночтения параметров разложения можно считать попытку ограничения на *классические* решения в теории струн с большими значениями интегралов движения (обычно именуемыми “спинами” J) в теории на $AdS_5 \times S^5$ [30], энергии которых должны отвечать аномальным размерностям “длинных” операторов в теории калибровочных полей. В этом случае энергия классической струны $\Delta = \sqrt{\lambda} \mathcal{E}(J/\sqrt{\lambda})$ может иметь разложение вида $\Delta = J + \sum_{l=1}^{\infty} E_l (\lambda/J^2)^l$ по целым степеням постоянной 'т Хоофта [31], которое можно переинтерпретировать как ряды при $\lambda = 0$, даже если $\lambda \gg 1$, поскольку большое значение λ оказывается подавленным большой величиной интеграла движения J^7 . Если это случается (что, конечно, не гарантировано), то классическая струнная энергия может сравниваться напрямую с пертурбативным вычислением в калибровочной теории поля.

Коэффициенты подобного разложения классической струнной энергии, конечно, могут быть модифицированы квантовыми поправками в теории струн. До сих пор не известно последовательного способа квантования теории струн в нетривиальных фоновых полях с ненулевым потоком рамон-рамоновских полей. Поэтому рассматриваемая квазиклассическая проверка АдС/КТП-соответствия должна использоваться с большой осторожностью. В действительности мы увидим ниже, что обсуждаемая квазиклассическая картина АдС/КТП-соответствия реально работает как тест лишь в первых нетривиальных порядках, а более детальный анализ должен опираться на знание полной квантовой теории на струнной стороне соответствия.

4.1. Перенормировка и анзац Бете. Четырёхмерная $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричная теория ЯМ является конформной, т.е. $\beta(g_{\text{YM}}) = 0$, но аномальные размерности γ составных операторов, например $\text{Tr}(\Phi_{i_1} \dots \Phi_{i_L})$, где x – некоторая точка четырёхмерного пространства-времени, по-прежнему перенормируются нетривиально. Ниже мы рассмотрим конкретные скалярные операторы из этого набора, хотя предложенный в работе [33] подход может применяться в гораздо более общей ситуации. Со стороны теории струн такие операторы отвечают движению струны в

⁷⁾ Об интегрируемости струнной задачи см., например, [32].

компактной S^5 -части десятимерного пространства-времени согласно стандартному аргументу Калуцы–Клейна. Чтобы максимально упростить ситуацию, выберем два скалярных комплексных поля $\Phi_1 = \Phi_1 + i\Phi_2$ и $\Phi_2 = \Phi_3 + i\Phi_4$ среди шести вещественных Φ_i и рассмотрим *голоморфные* операторы

$$\mathrm{Tr}(\Phi_1\Phi_1\Phi_1\Phi_2\Phi_2\Phi_1\Phi_2\Phi_2\Phi_1\Phi_1\Phi_1\Phi_2\dots)(x), \quad (4.1)$$

которые удобно обозначать стрелками $|\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\dots\rangle \in (\mathbb{C}^2)^{\otimes L}$.

У этих операторов отсутствуют сингулярности при совпадающих аргументах, так как кинетические члены для голоморфных полей всегда имеют структуру $\bar{\Phi}\Phi$. Голоморфный подсектор “замкнут” относительно перенормировки, и аномальные размерности являются собственными числами $(2^L \times 2^L)$ -матрицы смешивания

$$H = \frac{\lambda}{16\pi^2} \sum_{l=1}^L (1 - \sigma_l \cdot \sigma_{l+1}) + O(\lambda^2), \quad (4.2)$$

которая с точностью до константы является оператором перестановки в $(\mathbb{C}^2) \otimes (\mathbb{C}^2)$, появление которого определяется структурой вершины Φ^4 в лагранжиане суперсимметричной теории ЯМ, или гамильтонианом магнетика Гейзенберга [34].

Хорошо известно, что матрица (4.2) может быть диагонализирована с помощью анзаца Бете [35] (о современном состоянии этой техники см., например, [36] и приведенную там литературу). Информация об интегрируемой структуре спиновой цепочки Гейзенберга содержится в матрице переноса

$$\hat{T}(u) = \mathrm{Tr} \left[\left(u + \frac{i}{2} \sigma_L \otimes \sigma \right) \dots \left(u + \frac{i}{2} \sigma_1 \otimes \sigma \right) \right], \quad (4.3)$$

которую можно представить в виде операторнозначной матрицы во вспомогательном двумерном пространстве

$$\hat{T}(u) = \mathrm{Tr} \begin{pmatrix} \hat{A}(u) & \hat{B}(u) \\ \hat{C}(u) & \hat{D}(u) \end{pmatrix} = \hat{A}(u) + \hat{D}(u) \quad (4.4)$$

с четырьмя генераторами янгиана $\hat{A}(u)$, $\hat{B}(u)$, $\hat{C}(u)$ и $\hat{D}(u)$, удовлетворяющими квадратичным RTT -соотношениям. Разложение оператора (4.3) по спектральному параметру около $u = i/2$ генерирует локальные сохраняющиеся генераторы

$$\hat{T}(u) = \left(u + \frac{i}{2} \right)^L \hat{U} \exp \left[i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(u - \frac{i}{2} \right)^n \hat{Q}_n \right], \quad (4.5)$$

где $\hat{U} = e^{i\hat{P}}$ обозначает оператор сдвига (вдоль цепочки на один узел), а гамильтониан $\hat{Q}_1 \propto H$ (4.2) является одним из сохраняющихся локальных генераторов. С другой стороны, разложение оператора (4.3) при $u = \infty$ дает нелокальные генераторы янгиана, роль которых в контексте $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теории ЯМ обсуждалась, например, в [37].

Анзац Бете диагонализует *полный* оператор (4.3), (4.5), зависящий от спектрального параметра:

$$\hat{T}(u) |u_1 \dots u_J\rangle = T(u) |u_1 \dots u_J\rangle, \quad (4.6)$$

явно предлагая конструкцию собственных векторов $|u_1 \dots u_J\rangle$ в терминах оператора (4.4)

$$|u_1 \dots u_J\rangle = \widehat{B}(u_1) \dots \widehat{B}(u_J) |\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots\rangle, \quad (4.7)$$

действующих на ферромагнитный вакуум $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots\rangle$. Любой вектор Бете (4.7) зависит от J быстрот, а соответствующие собственные числа оператора (4.6) выражаются формулой

$$T(u) = \left(u + \frac{i}{2}\right)^L \prod_{k=1}^J \frac{u - u_k - i}{u - u_k} + \left(u - \frac{i}{2}\right)^L \prod_{k=1}^J \frac{u - u_k + i}{u - u_k}. \quad (4.8)$$

Теперь, поскольку собственные значения $T(u)$ оператора (4.3) обязаны быть полиномами по u , сокращение полюсов в точках $u = u_j$ в выражении (4.8) приводит к J условиям:

$$\left(\frac{u_j + i/2}{u_j - i/2}\right)^L = \prod_{k=1(k \neq j)}^J \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}, \quad (4.9)$$

которые называются уравнениями Бете.

Таким образом, собственные векторы гамильтониана (4.2) параметризуются корнями Бете $\{u_1, \dots, u_J\}$ ($J \leq L/2$ из-за очевидной $\mathbb{Z}_2$ -симметрии, в частности переставляющей два ферромагнитных вакуума $|\uparrow\uparrow\uparrow\uparrow \dots\rangle \leftrightarrow |\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow \dots\rangle$), удовлетворяющими уравнениям (4.9). После взятия логарифма уравнения (4.9) принимают вид

$$L \ln \left(\frac{u_j + i/2}{u_j - i/2}\right) = 2\pi i n_j + \sum_{k \neq j}^J \ln \frac{u_j - u_k + i}{u_j - u_k - i}, \quad (4.10)$$

где в правой части возникли некоторые целочисленные “номера мод” $n_j \in \mathbb{Z}$, никогда одновременно не обращающиеся в нуль для нетривиального решения. Для диагонализации матрицы смешивания операторов (4.1) в суперсимметричной теории ЯМ к уравнениям (4.10) следует добавить условие “следа”

$$e^{iP} = \prod_{j=1}^J \frac{u_j + i/2}{u_j - i/2} = 1, \quad (4.11)$$

или целочисленности полного импульса магнов: $P/(2\pi) \in \mathbb{Z}$.

Энергия собственного состояния гамильтониана (4.7) задается суммой по магнам, т.е. $\propto \sum_{j=1}^J dp/du|_{u=u_j}$, с квазиимпульсом $e^{ip(u)} = (u + i/2)/(u - i/2)$, а значит, аномальные размерности для матрицы смешивания (4.2) в первом порядке теории возмущения могут быть записаны в виде

$$\gamma = \frac{\lambda}{8\pi^2} \sum_{j=1}^J \frac{1}{u_j^2 + 1/4} + O(\lambda^2), \quad (4.12)$$

и именно эти величины γ необходимы для проверки гипотезы квазиклассического АдС/КТП-соответствия.

Для сравнения с дуальной (классической) теорией струн следует интересоваться длинными операторами с $L \rightarrow \infty$, для которых эмпирически известно, что корни Бете u_j являются величинами порядка L . Проведя масштабное преобразование $u_j = Lx_j$ и опуская старшие по $1/L$ члены, уравнения (4.10) можно привести к более простому виду:

$$\frac{1}{x_j} = 2\pi n_j + \frac{2}{L} \sum_{k \neq j}^J \frac{1}{x_j - x_k}. \tag{4.13}$$

Как и в случае одноматричной модели (см. подробное обсуждение этой проблемы в [1]), если второй член “взаимодействия” в правой части отсутствует, решениями уравнений (4.13) являются $x_j = 1/(2\pi n_j)$ для каждого n_j (заполняются экстремумы!), а когда взаимодействие включено, то корни, отвечающие каждому n_j (если их несколько), будут концентрироваться около значения $1/(2\pi n_j)$, образуя так называемые струны Бете, показанные на рис. 6. Другими словами, если для нескольких различных решений $x_{j_1}, \dots, x_{j_m}$ числа $n_j = n_{j_1} = \dots = n_{j_m}$ совпадают, то эти m корней Бете объединяются в бетевскую струну с модовым числом $n_{j_m} \neq 0$.

Рис. 6. Риманова поверхность Σ , которая является двойным накрытием x -плоскости, разрезанной вдоль струн Бете (четыре слегка искривленные линии на каждом листе в данном примере), которые пересекают вещественную ось в точках $x = 1/(2\pi n_i)$. Возможны также дополнительные разрезы вдоль мнимой оси, от которых можно избавиться подходящим выбором базиса в гомологиях $H^1(\Sigma)$ (см. [33]). Верхний лист является физическим для абелева интеграла $G(x)$, в то время как на нижнем листе резольвента имеет дополнительные сингулярности.

Введем при $L \rightarrow \infty$, как в разделе 3 работы [1], плотность корней

$$\rho(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \delta(x - x_j), \qquad \int_{\mathcal{C}} \rho(x) \, dx = \frac{J}{L} \tag{4.14}$$

или резольвенту

$$G(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \frac{1}{x - x_j} = \int_C \frac{\rho(\xi) d\xi}{x - \xi}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_C G(x) dx = \frac{J}{L} \quad (4.15)$$

и ограничимся *конечным* числом бетевских струн $n_l \neq n_{l'}$, с $l, l' = 1, 2, \dots, K$ даже при большом числе корней J . Тогда в скейлинговом пределе ($J \rightarrow \infty$ при фиксированном конечном K) полный носитель собственных чисел представляется в виде $\mathbf{C} = C_1 \cup \dots \cup C_K$, где на каждой его компоненте из уравнений (4.13) имеем

$$2 \int_C \frac{\rho(\xi) d\xi}{x - \xi} = G(x_+) + G(x_-) = \frac{1}{x} - 2\pi n_l, \quad x \in C_l, \quad (4.16)$$

где $G(x_{\pm})$ – значения резольвенты на двух различных сторонах разреза вдоль бетевской струны.

Условие целочисленности полного импульса с учетом уравнений Бете (4.13) принимает вид

$$\frac{1}{L} \sum_{j=1}^J \frac{1}{x_j} = 2\pi \sum_{l=1}^K n_l \int_{C_l} \rho(x) dx = 2\pi m, \quad m \in \mathbb{Z}, \quad (4.17)$$

или же условия на вычет

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{G(x) dx}{x} = 2\pi m, \quad n_l, m \in \mathbb{Z}. \quad (4.18)$$

Различные значения $n_l \neq n_{l'}$ на разных кусках носителя $C_l \cap C_{l'} = \emptyset$ означают, что в отличие от случая матричных моделей, который детально обсуждался в разделе 3 работы [1], резольвента $G(x) = \int^x dG$ – уже не однозначная функция, а абелев интеграл на некоторой гиперэллиптической кривой Σ , задаваемой “руками” по числу нетривиальных бетевских струн:

$$y^2 = R_{2K}(x) = x^{2K} + r_1 x^{2K-1} + \dots + r_{2K} = \prod_{j=1}^{2K} (x - x_j). \quad (4.19)$$

Это означает, что резольвента $G(x)$, в отличие от одноматричной модели, уже не удовлетворяет разумному алгебраическому уравнению, но тем не менее может быть восстановлена из геометрических свойств.

Уравнения (4.15), (4.16) и (4.18) могут быть решены после их переформулировки на языке свойств мероморфного дифференциала dG резольвенты (4.15).

1. Дифференциал dG является абелевым дифференциалом второго рода с единственным полюсом второго порядка в точке P_0 ($x(P_0) = 0$ на нефизическом листе римановой поверхности Σ , см. рис. 6), в частности это означает, что $\oint_{A_i} dG = 0$ для всех **A**-циклов, окружающих бетевские струны. Отсутствие полюсов на физическом листе диктуется свойствами резольвенты, но на нефизическом листе абелев дифференциал с нулевыми **A**-периодами тогда обязан иметь особенности.

2. В дополнение к нулевым **A**-периодам, **B**-периоды дифференциала dG целочисленны:

$$\oint_{B_i} dG = 2\pi(n_i - n_K). \quad (4.20)$$

Рис. 7. Контур интегрирования $\mathbf{B}'$ в формуле (4.21): отмеченные точки на обоих листах отвечают бесконечностям ∞_+ и ∞_- , где $x = \infty$.

Более точно можно написать [33]

$$\int_{B'_j} dG = 2\pi n_j, \quad j = 1, 2, \dots, K + 1, \quad (4.21)$$

где B'_j представляет собой контур, тянущийся из точки ∞_+ на верхнем листе к точке ∞_- на нижнем листе и проходящий через j -й разрез так, что $B_j = B'_j - B'_K$ при $j = 1, 2, \dots, K$ (см. рис. 7).

3. У дифференциала dG следующее поведение на бесконечности:

$$dG \underset{x \rightarrow \infty}{=} \frac{J}{L} \frac{dx}{x^2} + \dots, \quad (4.22)$$

а абелев интеграл $G(x)$ фиксируется с помощью (4.18):

$$G(x) = 2\pi m + \int_0^x dG, \quad G(0) = 2\pi m. \quad (4.23)$$

Общее решение для дифференциала dG на гиперэллиптической кривой (4.19), отвечающее указанным требованиям (4.20)–(4.23), имеет вид стандартного дифференциала второго рода на гиперэллиптической кривой [33]

$$dG = -\frac{dx}{2x^2} \left(1 - \frac{\sqrt{r_{2K}}}{y} \right) + \frac{r_{2K-1}}{4\sqrt{r_{2K}}} \frac{dx}{xy} + \sum_{k=1}^{K-1} a_k \frac{x^{k-1} dx}{y}, \quad (4.24)$$

параметры которого определяются дополнительными условиями, обеспечивающими, в частности, однозначность резольвенты на верхнем физическом листе:

$$\oint_{A_i} dG = 0, \quad i = 1, 2, \dots, K - 1. \quad (4.25)$$

Эти условия представляют собой тривиально решаемую систему линейных уравнений на коэффициенты $\{a_k\}$. Остальные параметры “поглощаются” числами заполнения корней на каждой несвязной части носителя корней

$$S_j = \int_{C_j} \rho(x) dx = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{A_j} x dG, \quad j = 1, 2, \dots, g = K - 1, \quad (4.26)$$

полным числом корней Бете (4.14) и полным импульсом (4.18).

Энергия или однопетлевая размерность для общего конечнозонного решения [33] находится из формул (4.12), (4.24):

$$\gamma = \frac{\lambda}{8\pi^2 L} \oint_{\mathcal{C}} \frac{dx}{2\pi i x^2} G(x) = \frac{\lambda}{8\pi^2 L} \left(\frac{r_{2K-2}}{4r_{2K}} - \frac{r_{2K-1}^2}{16r_{2K}^2} - \frac{a_1}{\sqrt{r_{2K}}} \right). \quad (4.27)$$

Аномальные размерности, задаваемые формулами (4.27), являются функциями коэффициентов уравнения (4.19) и параметра a_1 , который, в свою очередь, выражается через эти коэффициенты путем решения уравнения (4.25). Сами же модули кривой (4.19) (неявно) выражаются через моды n_j и числа заполнения S_j с помощью (4.20) или (4.21) и (4.26) (вместе с полным импульсом (4.18) и полным числом корней Бете (4.15)).

Интересно отметить, что формула (4.24) является частным случаем двухточечной резольвенты для планарной матричной модели $W_0(x, \xi)$, выражающейся через так называемое ядро Бергмана $\omega(P, P') = d_P d_{P'} \ln E(P, P')$ (см. также формулу (П.9) в приложении 1), которое на (тензорном квадрате) гиперэллиптической кривой (4.19) имеет вид

$$\begin{aligned} W_0(x, \xi) dx d\xi &= -\frac{dx d\xi}{2(x-\xi)^2} + \frac{y(x)}{2y(\xi)} \left(\frac{1}{(\xi-x)^2} + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{2n} \left[\frac{1}{(\xi-x)(x-x_\alpha)} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{i=1}^{n-1} H_i(\xi) \oint_{A_i} \frac{dx}{(x-x_\alpha)^2 y(x)} \right] \right) dx d\xi = \\ &= -\frac{dx d\xi}{2(x-\xi)^2} \left(1 - \frac{R(x)}{y(x)y(\xi)} \right) - \frac{dx d\xi}{2(x-\xi)} \frac{R'(x)}{y(x)y(\xi)} - \\ &\quad - \frac{1}{2} y(x) dx \sum_{\alpha=1}^{2n} \sum_{i=1}^{n-1} d\omega_i(\xi) \oint_{A_i} \frac{dx}{(x-x_\alpha)^2 y(x)}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Подробное обсуждение данного вопроса можно найти в первой из работ [15].

4.2. Геометрия интегрируемых классических струн. Формулы (4.24)–(4.26) показывают, что общее решение для аномальных размерностей длинных операторов (4.27) выражается через интегралы движения некоторой *классической* конфигурации магнетика Гейзенберга⁸⁾. В дуальной струнной картине имеются классические траектории струны, движущейся в некотором подпространстве пространства $AdS_5 \times S^5$, и общие конечнозонные решения струнной сигма-модели в пространствах типа Лобачевского были впервые построены в работе [39]. С незначительной модификацией это решение применимо и к случаю компактных сигма-моделей со значениями в S^{2D-1} . Здесь, следуя [33], [40], мы продемонстрируем, как эти решения соотносятся с квазиклассическими решениями на стороне калибровочной теории.

⁸⁾Такое соответствие с классическими решениями было впервые отмечено в работе [38] для нелинейного уравнения Шредингера.

В подсекторе двух голоморфных полей возникает сигма-модель со значениями $S^3 \subset S^5$ (в секторе AdS_5 единственной нетривиальной струнной координатой является “время” $X_0 = (\Delta/\sqrt{\lambda})\tau$) с действием

$$S = \frac{\sqrt{\lambda}}{4\pi} \int d\sigma d\tau [(\partial_a X_i)^2 - (\partial_a X_0)^2], \quad (4.29)$$

$\sum_i X_i^2 = 1$. Благодаря соотношениям (поскольку сфера S^3 является групповым многообразием для группы Ли $SU(2)$)

$$g = \begin{pmatrix} X_1 + iX_2 & X_3 + iX_4 \\ -X_3 + iX_4 & X_1 - iX_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ -\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \end{pmatrix} \in SU(2),$$

$$J = g^{-1} dg = \begin{pmatrix} \bar{Z}_1 dZ_1 + Z_2 d\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 dZ_2 - Z_2 d\bar{Z}_1 \\ \bar{Z}_2 dZ_1 - Z_1 d\bar{Z}_2 & \bar{Z}_2 dZ_2 + Z_1 d\bar{Z}_1 \end{pmatrix} \in su(2) \quad (4.30)$$

эта сигма-модель эквивалентна [41] теории $SU(2)$ главного кирального поля с парой Лакса

$$J_{\pm}(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{\lambda}} \frac{i\mathbf{S}_{\pm} \cdot \sigma}{1 \mp X},$$

$$\partial_+ J_- - \partial_- J_+ + [J_+, J_-] = 0, \quad (4.31)$$

$$\partial_+ J_- + \partial_- J_+ = 0,$$

у которой два простых полюса при значении струнного спектрального параметра $X = X(P_{\pm}) = \pm\sqrt{\lambda}/(4\pi\Delta)$. Другими словами, такая сигма-модель эквивалентна системе *двух* взаимодействующих релятивистских спинов $\mathbf{S}_+$ и $\mathbf{S}_-$:

$$\partial_+ \mathbf{S}_- + \frac{2\Delta}{\sqrt{\lambda}} \mathbf{S}_- \times \mathbf{S}_+ = 0,$$

$$\partial_- \mathbf{S}_+ - \frac{2\Delta}{\sqrt{\lambda}} \mathbf{S}_- \times \mathbf{S}_+ = 0, \quad (4.32)$$

которая в некотором “нерелятивистском пределе”

$$\mathbf{S}_{\pm} = \mathbf{S} \pm \frac{\sqrt{\lambda}}{4\Delta} \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{\sigma} - \frac{\lambda}{32\Delta^2} (\mathbf{S}_{\sigma}^2) \mathbf{S} + \dots, \quad (4.33)$$

аналогичном пределу, обсуждаемому в работах [42], вырождается в магнетик Гейзенберга.

Однако подобный метод может быть применен лишь к групповым многообразиям. Тем не менее и для общей струнной сигма-модели решение для комплексных координат $Z_I(\tau, \sigma)$ и $\bar{Z}_I(\tau, \sigma)$ на S^{2D-1} (с условием $\sum_I |Z_I|^2 = 1$)

$$Z_I(\sigma_{\pm}) = r_I \Upsilon(q_I, \sigma_{\pm}), \quad \bar{Z}_I(\sigma_{\pm}) = r_I \Upsilon(\bar{q}_I, \sigma_{\pm}) = r_I \overline{\Upsilon(q_I, \sigma_{\pm})}, \quad I = 1, 2, \dots, D, \quad (4.34)$$

где $\sigma_{\pm} = (\sigma \pm \tau)/2$, может быть построено [39] в терминах функций Бейкера–Ахизера (БА)

$$\Upsilon(P, \sigma_{\pm}) \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} e^{k_{\pm} \sigma_{\pm}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j(\sigma_{\pm})}{k_{\pm}^j} \right) \propto$$

$$\propto e^{\Omega_+(P)\sigma_+ + \Omega_-(P)\sigma_- - \theta(\omega(P) + \mathbf{V}_+ \sigma_+ + \mathbf{V}_- \sigma_-)}, \quad (4.35)$$

Рис. 8. Риманова поверхность Γ , которая является двойным накрытием поверхности Σ с единственным разрезом. На этой кривой действует инволюция $\Sigma \leftrightarrow \bar{\Sigma}$.

где $\omega(P)$ – отображение Абеля (П.1), а $\theta(\omega)$ – тета-функция Римана (П.2) (см. приложение 1), определенные на двойном накрытии Γ (разветвленном в P_+ и P_-) римановой поверхности Σ (см. рис. 8). В случае только двух комплексных координат Z_I (как на трехмерной сфере S^3) кривая Σ является гиперэллиптической и напрямую связана с кривой (4.19) цепочки Гейзенберга.

Более точно, струнная гиперэллиптическая кривая Σ превращается в гиперэллиптическую кривую спиновой цепочки (4.19), изображенную на рис. 6, только в пределе $\lambda/\Delta^2 \rightarrow 0$, согласованно с (4.33). Схематично эта кривая представлена на рис. 9, и она очень похожа на кривую спиновой цепочки с рис. 6, за исключением того, что полюс на нефизическом листе уступил место дополнительному разрезу длиной $\sqrt{\lambda}/(2\pi\Delta)$.

Функция БА (4.35) (а значит, и решение сигма-модели) строится в терминах *двух* абелевых дифференциалов второго рода $d\Omega_{\pm}$ на римановой поверхности Γ

$$d\Omega_{\pm} \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm dk_{\pm} (1 + O(k_{\pm}^{-2})), \quad \oint_{\mathbf{A}} d\Omega_{\pm} = 0, \quad (4.36)$$

с единственным полюсом второго порядка у каждого в точках $P_{\pm}$, соответственно; $\mathbf{V}_{\pm} = \oint_{\mathbf{B}} d\Omega_{\pm}$ являются векторами их $\mathbf{B}$ -периодов.

Доказательство того, что формулы (4.34) дают решение сигма-модели, удовлетворяющей классическим условиям Вирасоро, основано на существовании на кривой Σ абелева дифференциала третьего рода $d\Omega$ с простыми полюсами в точках $P_{\pm}$ и нулями в полюсах функций БА Υ и ей сопряженной $\bar{\Upsilon}$. При этом можно ввести струнную резольвенту или квазиимпульс формулой

$$\begin{aligned} d\mathcal{G} &= \frac{1}{2}(d\Omega_+ - d\Omega_-), \\ d\mathcal{G} \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \frac{1}{2}dk_{\pm}(1 + O(k_{\pm}^{-2})), \quad \oint_{\mathbf{A}} d\mathcal{G} &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Рис. 9. Риманова поверхность Σ в классической теории струн. По сравнению с рис. 6 полюс на нефизическом листе уступил место разрезу между точками P_+ и P_- длиной $\sqrt{\lambda}/(2\pi\Delta)$. Две копии данной римановой поверхности, склеенные вдоль дополнительного разреза, представляют собой полную струнную кривую Γ с рис. 8.

Для периодических по σ решений, как следует из (4.35), $\mathbf{B}$ -периоды резольвенты $\frac{1}{2\pi} \oint_{\mathbf{B}} d\mathcal{G}$ должны быть целочисленными, и, таким образом, для периодических решений можно написать

$$d\Omega = \frac{\overline{\Upsilon}\Upsilon}{\langle \overline{\Upsilon}\Upsilon \rangle} d\mathcal{G}, \quad (4.38)$$

где скобки означают усреднение по периоду переменной σ .

Функция БА (4.35) удовлетворяет дифференциальному уравнению второго порядка

$$(\partial_+ \partial_- + U)\Upsilon(P, \sigma_{\pm}) = 0, \quad P \in \Gamma, \quad (4.39)$$

в котором $U \propto \sum_i (\partial_+ Z_i \partial_- \overline{Z}_i + \partial_- Z_i \partial_+ \overline{Z}_i)$. Это свойство, а также условия Вирасоро $\wedge \sum_I |\partial_{\pm} Z_I|^2 = \Delta$ обеспечиваются свойствами дифференциала (4.38) и существованием функции E на Σ с D простыми полюсами $\{q_I\}$ и заданным поведением в окрестностях точек $P_{\pm}$:

$$E = E_{\pm} \pm \frac{4\pi\Delta}{\sqrt{\lambda}} \frac{1}{k_{\pm}^2} + \dots$$

(ср. с [39]).

Нормировочные факторы в выражении для сигма-модельных координат (4.34) определяются формулами

$$r_I^2 = \frac{\text{res}_{|q_I} E d\Omega}{E_- - E_+}, \quad I = 1, 2, \dots, D, \quad (4.40)$$

где $E_{\pm} = E(P_{\pm})$. Нормировки (4.40) удовлетворяют условию $\sum_{I=1}^D r_I^2 = 1$ благодаря обращению в нуль суммы всех вычетов: $\sum \text{res}(E d\Omega) = 0$.

Переопределяя

$$\partial_{\pm} \rightarrow \frac{\sqrt{\lambda}}{4\Delta} \partial_{\tau} \pm \partial_{\sigma}, \quad \Upsilon \rightarrow e^{2\Delta\tau/\sqrt{\lambda}} \Psi, \quad \overline{\Upsilon} \rightarrow e^{-2\Delta\tau/\sqrt{\lambda}} \overline{\Psi}, \quad U \rightarrow U - \frac{4\Delta^2}{\lambda},$$

в пределе $\lambda/\Delta^2 \ll 1$ из уравнения (4.39) возникает нестационарное уравнение Шредингера

$$\begin{aligned}(\partial_\tau - \partial_\sigma^2 + U)\Psi &= 0, \\ (-\partial_\tau - \partial_\sigma^2 + U)\bar{\Psi} &= 0,\end{aligned}\tag{4.41}$$

где теперь функции БА Ψ и $\bar{\Psi}$ могут быть определены на римановой поверхности Σ (см. рис. 6), на которой концы дополнительного разреза $P_\pm$ сливаются в единую точку P_0 , $x(P_0) = 0$, с разложением в окрестности этой точки (с новым локальным параметром $k(P_0) = \infty$)

$$\begin{aligned}\Psi_{P \rightarrow P_0} &= e^{k\sigma + k^2\tau} \left(1 + \frac{\psi_1}{k} + \frac{\psi_2}{k^2} + \dots \right), \\ \bar{\Psi}_{P \rightarrow P_0} &= e^{-k\sigma - k^2\tau} \left(1 + \frac{\bar{\psi}_1}{k} + \frac{\bar{\psi}_2}{k^2} + \dots \right).\end{aligned}\tag{4.42}$$

Подставляя разложения (4.42) в уравнение (4.41), получим

$$\begin{aligned}U &= 2 \frac{\partial \psi_1}{\partial \sigma} = -2 \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \sigma}, \\ \frac{\partial \psi_1}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial \sigma^2} + U \psi_1 &= 0, \\ -\frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial \tau} + 2 \frac{\partial \bar{\psi}_2}{\partial \sigma} - \frac{\partial^2 \bar{\psi}_1}{\partial \sigma^2} + U \bar{\psi}_1 &= 0.\end{aligned}\tag{4.43}$$

Для сопряженных функций $\psi_1 + \bar{\psi}_1 = 0$, а значит,

$$\frac{\partial}{\partial \sigma}(\psi_2 + \bar{\psi}_2 + \psi_1 \bar{\psi}_1) = -\frac{\partial u}{\partial \sigma}.$$

Поэтому в результате получаем разложение

$$\bar{\Psi} \Psi_{P \rightarrow P_0} = 1 + \frac{U}{k^2} + \dots.\tag{4.44}$$

Дифференциал (4.38) в этом пределе переходит в $d\Omega = \frac{\bar{\Psi}\Psi}{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle} dG$, а функция E приобретает простой полюс в точке P_0 , т.е. $E_{P \rightarrow P_0} = k + \dots$, если пользоваться новым локальным параметром k . Обращение в нуль суммы вычетов дифференциала $E d\Omega$ теперь приводит к формуле

$$U = \text{res}_{|P_0} E d\Omega = - \sum_{q_I} E \frac{\bar{\Psi}\Psi}{\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle} dG \propto \sum_I \bar{\Psi}(q_I) \Psi(q_I).\tag{4.45}$$

Это означает, что $\Psi_I(\tau, \sigma) \propto \Psi(q_I)$ удовлетворяет некоторому векторному нелинейному уравнению Шредингера [43]

$$\left(\partial_\tau - \partial_\sigma^2 + \sum_J |\Psi_J|^2 \right) \Psi_I = 0.\tag{4.46}$$

Для случая $D = 2$ кривая Σ является гиперэллиптической и на ней можно выбрать функцию E , у которой только два полюса (см. ниже.) При этом уравнение

(4.46) превращается в обычное нелинейное уравнение Шредингера, которое путем калибровочного преобразования операторов Лакса трансформируется в магнитную цепочку Гейзенберга [44], [45]:

$$|\Psi|^2 \propto \mathbf{S}_\sigma^2, \quad \bar{\Psi} \partial \Psi - \Psi \partial \bar{\Psi} \propto (\mathbf{S}_\sigma \cdot \mathbf{S} \times \mathbf{S}_{\sigma\sigma}), \quad \dots \quad (4.47)$$

Эквивалентный способ описать классическую струнную геометрию был предложен в работе [33], где геометрические данные задачи о главном киральном поле (4.31) переформулированы в виде некоторой проблемы Римана–Гильберта. Спектральная задача для струнной части (прямой аналог формул (4.15), (4.16), (4.18) и (4.27)) может быть сформулирована следующим образом. Пусть X и $\mathcal{G}(X)$ – соответственно струнный спектральный параметр и резольвента, совпадающая с квазиимпульсом классической задачи (возможно, по модулю точной 1-формы). Тогда струнную спектральную задачу Римана–Гильберта можно записать в виде [33]

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} \mathcal{G}(X) dX &= \frac{J}{\Delta} + \frac{\Delta - L}{2\Delta}, \\ \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbf{C}} \frac{\mathcal{G}(X) dX}{X} &= 2\pi m, \\ \oint_{\mathbf{C}} \frac{2t}{X^2} \frac{\mathcal{G}(X) dX}{2\pi i} &= \Delta - L, \end{aligned} \quad (4.48)$$

а также

$$\mathcal{G}(X_+) + \mathcal{G}(X_-) - 2\pi n_l = \frac{X}{X^2 - t}, \quad (4.49)$$

где введено обозначение $t = \lambda / (16\pi^2 \Delta^2)$.

Сравнение струнной (4.48), (4.49) и калибровочной (4.16), (4.18) проблем Римана–Гильберта приводит к мысли, что $x = X + t/X$ совместно с $G(x) = \mathcal{G}(X)$ представляет собой *точную* замену переменных [40] для квазиклассического АдС/КТП-соответствия. В частности, эта замена автоматически предполагает инволюцию $X \leftrightarrow 1/X$ на струнной кривой Γ (см. рис. 8). Действительно, в терминах $k_{\pm}$ имеем

$$X \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm \sqrt{t} + \frac{1}{k_{\pm}} + \dots, \quad (4.50)$$

тогда

$$x = X + \frac{t}{X} \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \pm 2\sqrt{t} \pm \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{1}{k_{\pm}^2} + \dots, \quad (4.51)$$

т.е. функция $E = 1/x$ (с точностью до константы) удовлетворяет всем необходимым свойствам для модифицированной конструкции из работы [39], которая была использована выше. То есть когда разрез между P_+ и P_- на рис. 9 стягивается в точку P_0 на рис. 6 с координатой $x(P_0) = 0$, функция E приобретает простой полюс в этой точке.

Продолжая преобразования, получим

$$dx = dX \left(1 - \frac{t}{X^2} \right) = \frac{dX}{X} \left(X - \frac{t}{X} \right) = \frac{dX}{X} \sqrt{x^2 - 4t}, \quad (4.52)$$

так что комбинация первой и третьей формул из (4.48) дает

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \mathcal{G}(X) dX = \frac{J}{\Delta} + \frac{\Delta - L}{2\Delta} = \frac{J}{\Delta} + t \oint \frac{\mathcal{G}(X) dX}{2\pi i X^2} \quad (4.53)$$

или

$$\frac{1}{2\pi i} \oint G(x) dx = \frac{J}{\Delta}. \quad (4.54)$$

Вторая формула из (4.48) при этом принимает вид

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{G(x) dx}{\sqrt{x^2 - 4t}} = 2\pi m, \quad (4.55)$$

где интегрирование производится вокруг разреза между точками $-2\sqrt{t}$ и $2\sqrt{t}$ в x -плоскости, а третья формула из (4.48) приводит к соотношению

$$\oint \frac{G(x) dx}{2\pi i} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - 4t}} - 1 \right) = \Delta - L. \quad (4.56)$$

“Струнное уравнение Бете” на разрезах (4.49) теперь можно записать в виде

$$G(x_+) + G(x_-) - 2\pi n_l = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4t}}. \quad (4.57)$$

Теперь легко увидеть из формул (4.54)–(4.57), что спектральная задача классической теории струн действительно идентична квазиклассическим уравнениям Бете в калибровочной теории с точностью до следующих подстановок:

$$\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4t}} = \frac{1}{x} + \frac{2t}{x^3} + \dots, \quad L \rightarrow \Delta, \quad \gamma \rightarrow \Delta - L. \quad (4.58)$$

Другими словами, это приводит к нелинейному соотношению

$$\Delta - L = \Gamma(\lambda, \Delta), \quad (4.59)$$

где функцию $\Gamma(\lambda, L) = \gamma + O(\lambda^2)$ следует сравнивать с низшими вкладами в аномальную размерность в суперсимметричной калибровочной теории.

Простейшим нетривиальным примером подобного соотношения является солитонный предел малого количества корней Бете, такой предел приводит к модифицированной [33] формуле Бернштейна–Мальдасены–Настасе (см. [46])

$$\Delta - L = \sum_k N_k \left(\sqrt{1 + \frac{\lambda n_k^2}{\Delta^2}} - 1 \right) \quad (4.60)$$

для спина $J = \sum_k N_k$, выраженного в виде полного количества положительных $n_k > 0$ и отрицательных $n_k < 0$ массивных осцилляторов [46]. Формулы (4.59) и (4.60) демонстрируют, что решение для размерности Δ в классической теории струн выражается с помощью сложных нелинейных формул, а осцилляторная формулировка [46], [47] является скорее некоторым эффективным способом описания определенных квазиклассических мод интегрируемой струнной модели в геометрии pp -волн, чем точным квантованием теории на мировом листе.

4.3. За пределами $SU(2)$ -подсектора: перепараметризованные кривые.

Оказывается чрезвычайно сложным выписать алгебраические уравнения кривых за пределами $SU(2)$ -подсектора. До сих пор единственное достижение в данном направлении связано с сильно *перепараметризованными* кривыми, т.е. определенными системами уравнений, приводящими к более высокому роду и большему числу параметров, чем нужно для решения данной конкретной задачи. На такие кривые следует накладывать дополнительные ограничения, чтобы получить на выходе пространство модулей подходящей размерности для требуемого решения. Ситуация здесь напоминает случай двухматричной модели (см. обсуждение соответствующих кривых в работе [1]).

Простейший пример такой перепараметризованной ситуации представляют собой так называемые кривые Бакстера, определенные уравнением Бакстера

$$e^{ip} + e^{-ip} = \text{Tr } \Omega(x) \quad (4.61)$$

для квазиимпульса $p = G - 1/(2x)$, которое определяет кривую конечного рода лишь для цепочек с конечным числом узлов L , что и было использовано для аналогичных целей в работах [48]. Однако при $L \rightarrow \infty$ уравнение (4.61) отвечает буквально комплексным кривым бесконечного рода и не может быть эффективно использовано для каких-нибудь практических целей. Другими словами, алгебраическая функция p имеет существенные особенности на “минимальной кривой” конечного рода, например на кривой (4.19), и не является, вообще говоря, алгебраической, если только соответствующее уравнение перепараметризованной кривой не имеет бесконечный род, где существенная особенность “растворяется”.

Кроме того, вместо (4.19) можно написать уравнение, которому удовлетворяет мероморфная функция $p' \equiv x^2 dp/dx$ или dG/dx для резольвенты (4.24). Ясно, что оно имеет вид

$$P_2(x)(p')^2 + P_0(x) = 0, \quad (4.62)$$

где $P_2(x) = R_{2K}(x)$ и $P_0(x)$ являются полиномами степени $2K$. Заметим, однако, что уравнение (4.62) отвечает кривой рода $\hat{g} = 2K - 1$, вместо $g = K - 1$ для минимальной кривой (4.19), т.е. имеет K дополнительных “фальшивых” ручек с соответствующими параметрами. Кривые типа (4.62) мы будем называть *перепараметризованными*, так как они занимают промежуточное место между минимальными кривыми и кривыми Бакстера.

За пределами $SU(2)$ -случая перепараметризованные кривые типа (4.62) были выписаны в работах [49] в виде уравнения четвертой степени⁹⁾

$$P_4(x)(p')^4 + P_2(x)(p')^2 + P_1(x)p' + P_0(x) = 0, \quad (4.63)$$

в котором все полиномы $P_i(x)$, $i = 1, \dots, 4$, имеют степень $2K$. Легко видеть из соответствующего многоугольника Ньютона (см. рис. 10), что род кривой (4.63) равен $\hat{g} = 6K - 3$.

Однако если теперь дополнительно потребовать, чтобы число точек ветвления на кривой, определенной уравнением (4.63), ограничивалось числом $2K$, то формула

⁹⁾ Аналогичный анализ для наиболее общего случая с уравнением восьмой степени был проведен в работе [50].

Рис. 10. Многоугольник Ньютона для невырожденной кривой, определенной уравнением (4.63). Род $\hat{g}$, определяемый числом целых точек внутри многоугольника, равен $\hat{g} = 3(2K - 1) = 6K - 3$.

Римана–Гурвица $2 - 2g = l(2 - 2g_0) - \# \text{В.Р.}$ приводит к результату $2 - 2g = 4(2 - 0) - 2K = 8 - 2K$, или $g = K - 3$, т.е. для этого необходимо наложить условия на $\hat{g} - g = 5K$ параметров. В работах [49] эти связи были выбраны в виде, следующем из сравнения уравнения (4.62) с минимальной кривой (4.19).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе, как и в ее первой части [1], в центре нашего внимания были в основном геометрические свойства квазиклассических матричных моделей, тесно связанные с их интегрируемостью. Информация о соответствующих геометрических данных содержится в одномерном комплексном многообразии – комплексной кривой или римановой поверхности, оснащенной производящей мероморфной 1-формой. Свободная энергия матричной модели задается препотенциалом или квазиклассической тау-функцией, полностью определяемой этими геометрическими данными. Геометрическое определение квазиклассической тау-функции удовлетворяет, в частности, простейшему из возможных условий интегрируемости – симметричности вторых производных, которая следует из билинейных соотношений Римана для мероморфных дифференциалов на кривой. Производные препотенциала выражаются в терминах вычетов, периодов и других инвариантных аналитических структур, и как следствие квазиклассическая свободная энергия матричной модели удовлетворяет определенным нелинейным дифференциальным уравнениям, которые изучались в работе.

В связи с этим возникает вопрос об остальной части разложения (1.7): существует ли естественная геометрическая картина для корреляторов матричной модели за пределами планарного предела? На этот вопрос в данный момент не существует ясного ответа, за исключением разве что однопетлевой струнной поправки F_1 , выражающейся детерминантными формулами типа (2.70), которые в определенном смысле отвечают флуктуациям квазиклассической геометрии (см. также [51], [15]). Что касается полной суммы (1.7), то она скорее может быть описана *квантованием*

представленной выше геометрической картины, и некоторые шаги в этом направлении обсуждались в работах [52]. С точки зрения интегрируемых систем квантование геометрии одноматричных моделей отвечает так называемой стационарной задаче для иерархии цепочки Тоды [53], в то время как для двуматричной модели следует рассмотреть ту же самую проблему в контексте полной иерархии двумеризованной решетки Тоды.

Еще больше вопросов возникает в связи с квантовым обобщением квазиклассической картины АдС/КТП-соответствия (см. обсуждение некоторых вопросов в [54]). Несмотря на то что можно постепенно продвигаться в этом направлении аналогично изучению матричных моделей в рамках $1/N$ -разложения (здесь ту же самую роль в определенном смысле играют поправки конечного размера к квазиклассическим решениям уравнений Бете), понимание полной квантовой картины с неизбежностью требует хоть какого-нибудь прогресса в формулировке квантовой теории струн в нетривиальных фоновых полях. Автору верится, что такой прогресс вполне возможен, но обсуждение этого определенно выходит за рамки круга вопросов, которые обсуждаются в данной работе.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Тета-функции и тождества Фэя

В этом приложении собраны некоторые определения и полезные формулы для тета-функций Римана, заимствованные в основном из книги [6]. Начать следует с вложения римановой поверхности Σ в g -мерный комплексный тор **Жас**, или многообразии Якоби для Σ . Это вложение определяется, с точностью до общего сдвига в **Жас**, отображением Абеля $P \mapsto \omega(P) = (\omega_1(P), \dots, \omega_g(P))$, где

$$\omega_\alpha(P) = \int_{P_0}^P d\omega_\alpha. \quad (\text{П.1})$$

Тета-функция Римана $\theta(\omega) \equiv \theta(\omega|T)$ определена рядом Фурье

$$\theta(\omega) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi \mathbf{n} \cdot T \cdot \mathbf{n} + 2\pi i \mathbf{n} \cdot \omega} \quad (\text{П.2})$$

с положительно определенной мнимой частью матрицы периодов Σ

$$\text{Im } T_{\alpha\beta} \propto \int_{\Sigma} d\omega_\alpha \wedge d\bar{\omega}_\beta > 0.$$

Тета-функции с (полуцелыми) характеристиками $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, где $\delta_\alpha = T_{\alpha\beta}\delta_{1,\beta} + \delta_{2,\alpha}$ и $\delta_1, \delta_2 \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$, определены формулой

$$\theta_\delta(\omega) = e^{i\pi \delta_1 \cdot T \cdot \delta_1 + 2\pi i \delta_1 \cdot (\omega + \delta_2)} \theta(\omega + \delta) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^g} e^{i\pi (\mathbf{n} + \delta_1) \cdot T \cdot (\mathbf{n} + \delta_1) + 2\pi i (\mathbf{n} + \delta_1) \cdot (\omega + \delta_2)}. \quad (\text{П.3})$$

При сдвигах на период решетки они преобразуются согласно

$$\begin{aligned} \theta_\delta(\omega + \mathbf{e}_\alpha) &= e^{2\pi i \delta_{1,\alpha}} \theta_\delta(\omega), \\ \theta_\delta(\omega + T_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta) &= e^{-2\pi i \delta_{2,\alpha} - i\pi T_{\alpha\alpha} - 2\pi i W_\alpha} \theta_\delta(\omega). \end{aligned}$$

Главная форма $E(z, \zeta)$ определена формулой

$$E(P, P') = \frac{\theta_*(\omega(P) - \omega(P'))}{\sqrt{\sum_{\alpha} \theta_{*,\alpha} d\omega_{\alpha}(P)} \sqrt{\sum_{\beta} \theta_{*,\beta} d\omega_{\beta}(P')}}, \quad (\text{П.4})$$

где в качестве θ_* можно взять любую нечетную тета-функцию, т.е. тета-функцию с *любой нечетной* характеристикой δ^* (которая является нечетной при нечетном $4\delta_1^* \cdot \delta_2^*$). Главная форма не зависит от конкретного выбора нечетной характеристики. В знаменателе (П.4) использовано обозначение

$$\theta_{*,\alpha} = \theta_{*,\alpha}(0) = \left. \frac{\partial \theta_*(\omega)}{\partial \omega_{\alpha}} \right|_{\omega=0}$$

для набора θ -констант.

Данные, которые были использованы нами, включают также выделенные координаты на римановой поверхности с инволюцией, а именно голоморфные координаты z и $\bar{z}$ на двух различных листах дубля Шоттки (подробнее см. [1]), и мы не будем делать различия, если это не является необходимым, между главной формой (П.4) и функцией $E(z, \zeta) \equiv E(z, \zeta) (dz)^{1/2} (d\zeta)^{1/2}$, “нормированной” на дифференциалы выделенных координат.

Перечислим теперь тождества Фэя [6], использованные в [8] и выше в данной работе. Основным из них является тождество тройной секущей (уравнение (45) на с. 34 книги [6])

$$\begin{aligned} & \theta(\omega_1 - \omega_3 - \mathbf{Z})\theta(\omega_2 - \omega_4 - \mathbf{Z})E(z_1, z_4)E(z_3, z_2) + \\ & + \theta(\omega_1 - \omega_4 - \mathbf{Z})\theta(\omega_2 - \omega_3 - \mathbf{Z})E(z_1, z_3)E(z_2, z_4) = \\ & = \theta(\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_4 - \mathbf{Z})\theta(\mathbf{Z})E(z_1, z_2)E(z_3, z_4), \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

где $\omega_i \equiv \omega(z_i)$. Это тождество выполняется для *любых* четырех точек $z_1, \dots, z_4$ на комплексной кривой и *любого* вектора $\mathbf{Z} \in \text{Jac}$. В пределе $z_3 \rightarrow z_4 \equiv \infty$ получаем (формула (38) на с. 25 книги [6])

$$\begin{aligned} & \frac{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega + \int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right)\theta(\mathbf{Z})}{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right)\theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right)} \frac{E(z_1, z_2)}{E(z_1, \infty)E(z_2, \infty)} = \\ & = d\Omega^{(z_1, z_2)}(\infty) + \sum_{\alpha=1}^g d\omega_{\alpha}(\infty) \partial_{Z_{\alpha}} \ln \frac{\theta\left(\int_{\infty}^{z_1} d\omega - \mathbf{Z}\right)}{\theta\left(\int_{\infty}^{z_2} d\omega - \mathbf{Z}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

где

$$d\Omega^{(z_1, z_2)}(\infty) = d_z \ln \frac{E(z, z_1)}{E(z, z_2)}$$

является нормированным абелевым дифференциалом третьего рода с простыми полюсами в точках с координатами z_1 и z_2 и вычетами ± 1 .

Другим соотношением из [6], которое было использовано выше, является (см., например, формулу (29) на с. 20 или формулу (39) на с. 26 книги [6])

$$\frac{\theta(\omega_1 - \omega_2 - \mathbf{Z})\theta(\omega_1 - \omega_2 + \mathbf{Z})}{\theta^2(\mathbf{Z})E^2(z_1, z_2)} = \omega(z_1, z_2) + \sum_{\alpha, \beta=1}^g (\ln \theta(\mathbf{Z}))_{,\alpha\beta} d\omega_{\alpha}(z_1) d\omega_{\beta}(z_2), \quad (\text{П.7})$$

$$(\ln \theta(\mathbf{Z})),_{\alpha\beta} = \frac{\partial^2 \ln \theta(\mathbf{Z})}{\partial Z_\alpha \partial Z_\beta}, \quad (\text{П.8})$$

$$\omega(z_1, z_2) = d_{z_1} d_{z_2} \ln E(z_1, z_2) \quad (\text{П.9})$$

является каноническим бидифференциалом второго рода с двойным полюсом в точке $z_1 = z_2$, или ядром Бергмана.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Корреляционные функции в минимальных струнных моделях $(p, q) = (2, 7)$ и $(p, q) = (3, 4)$

Модель $(p, q) = (2, 7)$. Модель с $(p, q) = (2, 7)$ не сильно отличается от случая точки Янга–Ли $(p, q) = (2, 5)$, рассмотренного в п. 3.3. Полиномы (3.1) имеют вид

$$X = \lambda^2 + X_0, \quad Y = \lambda^7 + \frac{7X_0}{2}\lambda^5 + Y_3\lambda^3 + Y_1\lambda, \quad (\text{П.10})$$

и вычисление плоских времен (1.14) дает

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{3}{4}Y_3X_0^2 - \frac{105}{64}X_0^4 - Y_1X_0, & t_3 &= \frac{35}{12}X_0^3 - Y_3X_0 + \frac{2}{3}Y_1, \\ t_5 &= -\frac{7}{4}X_0^2 + \frac{2}{5}Y_3, & t_7 &= 0, & t_9 &= \frac{2}{9}. \end{aligned} \quad (\text{П.11})$$

Мы видим опять, что соотношения (П.11) могут быть легко разрешены относительно Y_j , а оставшийся коэффициент X_0 удовлетворяет уравнению

$$t_1 = -\frac{35}{64}X_0^4 - \frac{15}{8}t_5X_0^2 - \frac{3}{2}t_3X_0, \quad (\text{П.12})$$

где мы положили $t_5 = 0$ для коэффициента при “граничном” операторе [55].

Одноточечные функции (1.14) для модели $(p, q) = (2, 7)$ имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= -\frac{7}{32}X_0^5 - \frac{1}{4}Y_1X_0^2 + \frac{1}{8}Y_3X_0^3 = -\frac{7}{32}X_0^5 - \frac{5}{8}X_0^3t_5 - \frac{3}{8}X_0^2t_3, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_3} &= -\frac{1}{8}Y_1X_0^3 - \frac{35}{512}X_0^6 + \frac{3}{64}Y_3X_0^4 = -\frac{35}{256}X_0^6 - \frac{45}{128}X_0^4t_5 - \frac{3}{16}X_0^3t_3, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_5} &= -\frac{15}{512}X_0^7 - \frac{5}{64}Y_1X_0^4 + \frac{3}{128}Y_3X_0^5 = -\frac{25}{256}X_0^7 - \frac{15}{64}X_0^5t_5 - \frac{15}{128}X_0^4t_3. \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

В правые части формул (П.13) уже подставлены выражения для величин Y_j в терминах времен (П.11), и остается лишь решить уравнение (П.12) разложением по переменным t_3 и t_5 , а затем подставить результат в (П.13).

Скейлинговый анзац (3.5), (3.22) теперь имеет вид

$$\mathcal{F} = t_5^{9/2} \mathbf{f}\left(\frac{t_1}{t_5^2}, \frac{t_3}{t_5^{3/2}}\right), \quad \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} = t_5^{5/2} \mathbf{f}^{(1)}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} = \frac{X_0}{2} = t_5^{1/2} \mathbf{f}^{(11)}, \quad \dots,$$

где введено укороченное обозначение для производных по первому аргументу функции $f(t_1, t_2)$, а струнное уравнение (II.12) принимает вид

$$t_1 + \frac{35}{4}u^4 + \frac{15}{2}u^2 + 3t_2u = 0 \quad (\text{II.14})$$

для функции $u = f^{(11)}$. Решение уравнения (II.14) (и затем (II.13)) для коэффициентов f (в “фазе” с ненулевым коэффициентом f_{11}) дает следующие значения:

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{180}{2401}\sqrt{-42}, & f_1 &= -\frac{6}{49}\sqrt{-42}, & f_2 &= \frac{135}{98}, \\ f_{11} &= \frac{1}{7}\sqrt{-42}, & f_{12} &= -\frac{9}{7}, & f_{22} &= -\frac{18}{49}\sqrt{-42}, \\ f_{111} &= -\frac{1}{90}\sqrt{-42}, & f_{112} &= \frac{1}{5}, & f_{122} &= \frac{3}{35}\sqrt{-42}, & f_{222} &= -\frac{54}{35}, \\ f_{1111} &= -\frac{7}{1620}\sqrt{-42}, & f_{1112} &= \frac{14}{225}, & f_{1122} &= \frac{1}{50}\sqrt{-42}, \\ f_{1222} &= -\frac{6}{25}, & f_{2222} &= -\frac{9}{175}\sqrt{-42}, & f_{11111} &= -\frac{343}{81000}\sqrt{-42}, \\ f_{11112} &= \frac{196}{3375}, & f_{11122} &= \frac{49}{2700}\sqrt{-42}, & f_{11222} &= -\frac{28}{125}, \quad \dots, \end{aligned}$$

и для них легко вычислить соответствующие инвариантные отношения, например

$$\frac{f_{1111}f_{22}}{f_{112}^2} = -\frac{5}{3}, \quad \frac{f_{2222}f_{11}}{f_{122}^2} = -1, \quad \frac{f_{1111}f_{11}}{f_{111}^2} = -5, \quad \frac{f_{2222}f_{22}}{f_{222}^2} = -\frac{1}{3}, \quad \dots$$

Модель Изинга. Перейдем теперь к точке Изинга $(p, q) = (3, 4)$. Здесь вычисление вычетов (1.14) (при $t_3 = 0$ и $t_4 = 0$) дает

$$Y_2 = \frac{4}{3}X_1 + \frac{5}{3}t_5, \quad Y_1 = \frac{4}{3}X_0, \quad Y_0 = \frac{2}{9}X_1^2 + \frac{10}{9}X_1t_5,$$

в то время как X_0 и X_1 удовлетворяют уравнениям

$$t_1 = -\frac{2}{3}X_0^2 + \frac{4}{27}X_1^3 + \frac{5}{9}t_5X_1^2, \quad t_2 = -\frac{2}{3}X_0X_1 - \frac{5}{3}t_5X_0. \quad (\text{II.15})$$

В результате решения второго уравнения относительно X_0 эта система превращается в алгебраическое уравнение Казакова–Булатова [56] на единственную функцию X_1

$$t_1 = -\frac{6t_2^2}{(2X_1 + 5t_5)^2} + \frac{4}{27}X_1^3 + \frac{5}{9}t_5X_1^2,$$

которое содержит всю информацию о сингулярностях сферической функции распределения при произвольных значениях магнитного поля t_2 и массы фермиона t_5 [57].

Одноточечные функции (1.14) теперь равны

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_1} &= \frac{1}{27}X_1^4 + \frac{10}{81}t_5X_1^3 - \frac{4}{9}X_1X_0^2 - \frac{5}{9}t_5X_0^2, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_2} &= \frac{4}{27}X_1^3X_0 + \frac{10}{27}t_5X_1^2X_0 - \frac{8}{27}X_0^3, \\ \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_5} &= \frac{40}{243}X_1^3X_0^2 - \frac{10}{2187}X_1^6 + \frac{25}{81}t_5X_1^2X_0^2 - \frac{10}{729}t_5X_1^5 - \frac{5}{27}X_0^4. \end{aligned} \quad (\text{II.16})$$

Используя формулы (1.15) или дифференцируя первое уравнение (П.16) и воспользовавшись (П.15), получаем

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1^2} = \frac{X_1}{3}, \quad \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_1 \partial t_2} = \frac{2X_0}{3}, \quad \dots \quad (\text{П.17})$$

Унитарный скейлинговый анзац (3.4) предполагает, что перерастянутая функция f зависит только от безразмерных величин $\tau_\sigma = t_2/t_1^{5/6}$ и $\tau_\epsilon = t_5/t_1^{1/3}$:

$$\mathcal{F} = t_1^{7/3} f(\tau_\sigma, \tau_\epsilon), \quad (\text{П.18})$$

где два аргумента функции f наивно отвечают двум изинговским операторам (взаимодействующим с лиувиллевской гравитацией) σ и ϵ , соответственно.

Отметим также, что при $t_2 = 0$ второе из уравнений (П.15) имеет единственное разумное решение $X_0 = 0$, а первое при этом превращается в уравнение

$$t_1 = \frac{4}{27} X_1^3 + \frac{5}{9} t_5 X_1^2, \quad (\text{П.19})$$

которое совпадает с уравнением модели Янга–Ли $(p, q) = (2, 5)$ с возмущенным квадратичным членом (см. формулу (3.16); заметим также, что при этом следует отождествить $X_1/3$ из (П.19) с $X_0/2$ из (3.16), ср. с формулами (3.18) и (П.17)). При $t_2 = 0$ функция (П.18) зависит только от второго аргумента:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = t_1^{7/3} \hat{f}\left(\frac{t_5}{t_1^{1/3}}\right) &= t_1^{7/3} f_0 + t_1^2 t_5 f_\epsilon + \frac{1}{2} t_1^{5/3} t_5^2 f_{\epsilon\epsilon} + \frac{1}{6} t_1^{4/3} t_5^3 f_{\epsilon\epsilon\epsilon} + \\ &+ \frac{1}{24} t_1 t_5^4 f_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} + \frac{1}{120} t_1^{2/3} t_5^5 f_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} + \dots \end{aligned} \quad (\text{П.20})$$

Используя (П.19) для (П.20), получаем

$$\begin{aligned} f_0 &= \frac{9}{56} 2^{1/3}, & f_\epsilon &= -\frac{5}{24}, & f_{\epsilon\epsilon} &= \frac{5}{32} 2^{2/3}, \\ f_{\epsilon\epsilon\epsilon} &= -\frac{125}{576} 2^{1/3}, & f_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} &= -\frac{3125}{20736} 2^{2/3}, \end{aligned}$$

в то время как коэффициент $f_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon}$ остается неопределенным. Чтобы найти его, можно воспользоваться первой формулой из (П.16) (при $X_0 = 0$), это приводит к

$$f_{\epsilon\epsilon\epsilon\epsilon} = \frac{625}{96}.$$

Однако при репараметризации в пространстве констант связи (см., например, [58])

$$X_1 \rightarrow X_1 - \frac{5}{12} t_5, \quad t_1 \rightarrow t_1 + \frac{125}{216} t_5^3$$

редуцированное струнное уравнение (П.19) принимает вид (аналитически продолженного) струнного уравнения в теории Янга–Ли (3.16). Поэтому можно в дальнейшем использовать скейлинговый анзац (3.19) с параметром $t_3 = t_3^{\text{YL}}$ для критической точки $(p, q) = (2, 5)$, замененным на *квадрат* $t_5 = t_5^{\text{Ising}}$ параметра редуцированной модели Изинга, и при этом разложение (3.20) будет давать $\langle \epsilon^{2n} \rangle$ -корреляторы модели Изинга $(p, q) = (3, 4)$ на флуктуирующей решетке.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Вычеты и уравнения для логарифмического потенциала

Здесь мы приведем некоторые полезные явные формулы для двухматричной модели с логарифмическим потенциалом (3.34).

Производящий дифференциал $\tilde{z} dz$ (3.37) имеет нетривиальные вычеты в четырех точках

$$\begin{aligned} q_1 = z|_{w=0} &= v - \frac{u}{s} = -\frac{\nu}{a}, & q_2 = z|_{w=1/s} &= v + \frac{r}{s} + \frac{us}{1-s^2} = a, \\ \infty_- = z|_{w=\infty}, & & \infty_+ = z|_{w=s} \end{aligned}$$

(для параметра (3.40) находим, что $\Delta = q_2 - q_1$), которые равны

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_1} \tilde{z} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|\infty_-} \tilde{z} dz = r^2 - \frac{ru}{s^2}, \\ \frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|q_2} \tilde{z} dz &= -\frac{1}{2\pi i} \operatorname{res}_{|\infty_+} \tilde{z} dz = \frac{u^2}{(1-s^2)^2} - \frac{ru}{s^2}. \end{aligned}$$

Дифференцируя производящий дифференциал (3.37) по периоду S (3.45) при фиксированных t_0 (3.42) и введенном в (3.43) дополнительном параметре δ , получаем канонический голоморфный дифференциал на кривой (3.36), (3.44)

$$d\omega = \frac{\partial}{\partial S} \tilde{z} dz = -\frac{\partial h}{\partial S} \frac{dz}{\sqrt{R(z)}},$$

что обеспечивается условием нормировки

$$\frac{\partial h}{\partial S} \oint_A \frac{dz}{\sqrt{R(z)}} = -1.$$

Аналогично получаем

$$\frac{\partial h}{\partial t_0} \oint_A \frac{dz}{\sqrt{R}} = \oint_A dz \left(\frac{1}{2(z + \nu/a)} \frac{P}{\sqrt{R}} + \frac{az}{\sqrt{R}} \right),$$

и это завершает набор условий, фиксирующих все параметры в логарифмической модели п. 3.4.

В дополнение к основному кубическому уравнению (3.49) можно написать аналогичное уравнение на квадрат конформного радиуса (3.48)

$$\rho \equiv r^2 = \frac{t_0}{4} \left(\frac{\mathcal{X}}{t_0/\Delta^2} + \frac{t_0/\Delta^2}{\mathcal{X}} + 2 \right),$$

который удовлетворяет уравнению

$$\rho^3 - \frac{1}{2} \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{7t_0}{2} - \nu \right) \rho^2 + \frac{t_0}{2} \left(\frac{\Delta^2}{4} + \frac{3t_0}{2} + \frac{t_0\nu}{2\Delta^2} - \frac{t_0^2}{4\Delta^2} - \nu \right) \rho + \frac{t_0^2}{8\Delta^2} (t_0 - \nu)^2 = 0.$$

Критическими точками этой кубической кривой являются значения $t_0 = 0$, $\rho = 0$; $t_0 = (\Delta^2/4)(1 \pm 3\sqrt{1 - 16\nu/(9\Delta^2)})$. Таким же способом легко показать, что возведенная в квадрат длина разреза

$$\Xi = \frac{4ru}{\Delta^2} = \left(\frac{\xi_+ - \xi_-}{2\Delta} \right)^2 = \frac{t_0^2}{\Delta^4} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2\nu}{\Delta^2} - \frac{t_0}{\Delta^2} \right) \mathcal{X} - \frac{t_0^2}{2\Delta^4} \frac{1}{\mathcal{X}}$$

также удовлетворяет кубическому уравнению

$$\Xi^3 + \left(\frac{(t_0 - 2\nu)^2}{\Delta^4} - \frac{3t_0}{\Delta^2} - \frac{1}{4} \right) \Xi^2 + \frac{t_0}{\Delta^2} \left(\frac{1}{2} + \frac{7t_0}{2\Delta^2} - \frac{4}{\Delta^4} (t_0 - \nu)(t_0 - 2\nu) \right) \Xi - \frac{t_0^2}{\Delta^4} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{t_0}{\Delta^2} - \frac{15t_0^2}{4\Delta^4} + \frac{4\nu}{\Delta^4} (3t_0 - 2\nu) + \frac{2}{\Delta^6} (t_0 - 2\nu)^3 \right) = 0.$$

Благодарности. Автор признателен Д. Васильеву, А. Забродину, Ал. Замолотчикову, К. Зарембо, В. Казакову, И. Кричеву, А. Лосеву, Дж. Минахану, А. Миронову, А. Морозову, Н. Некрасову и Л. Чехову за сотрудничество и обсуждение различных вопросов, затронутых в данной статье. Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 04-01-00642), Программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1578.2003.2), проектом NWO 047.017.015, проектом ANR-05-BLAN-0029-01 “Геометрия и интегрируемость в математической физике” и Фондом поддержки российской науки.

Список литературы

- [1] А. В. Маршаков, *ТМФ*, **147**:2 (2006), 163.
- [2] А. М. Поляков, *Калибровочные поля и струны*, ИТФ им. Л. Д. Ландау, Черноголовка, 1995.
- [3] G. 't Hooft, *Nucl. Phys. B*, **72** (1974), 461.
- [4] I. Krichever, *Commun. Pure. Appl. Math.*, **47** (1992), 437; [hep-th/9205110](#).
- [5] J. Gibbons, Y. Kodama, “Solving dispersionless Lax equations”, *Singular Limits of Dispersive Waves, Proc. of NATO ASI, Ser. B*, **320**, eds. N. M. Ercolani, I. R. Gabitov, C. D. Levermore, D. Serre, Plenum, N.Y., 1994, 61; R. Carroll, Y. Kodama, *J. Phys. A*, **28** (1995), 6373.
- [6] J. Fay, *Theta-Functions on Riemann Surfaces*, Lect. Notes Math., **352**, Springer, Berlin, 1973.
- [7] A. Marshakov, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **227** (2002), 131; [hep-th/0109048](#).
- [8] I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin, *Commun. Math. Phys.*, **259** (2005), 1; [hep-th/0309010](#).
- [9] E. Witten, *Nucl. Phys. B*, **340** (1990), 281; R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nucl. Phys. B*, **352** (1991), 59.
- [10] A. Marshakov, A. Mironov A. Morozov, *Phys. Lett. B*, **389** (1996), 43; [hep-th/9607109](#).
- [11] A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **515** (2001), 483; [hep-th/0105260](#).
- [12] A. Marshakov, *Associativity equations in effective SUSY quantum field theories*, [hep-th/0108023](#); A. В. Маршаков, *ТМФ*, **132** (2002), 3; [hep-th/0201267](#).
- [13] L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, *Phys. Lett. B*, **562** (2003), 323; [hep-th/0301071](#).
- [14] F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa, *Nucl. Phys. B*, **603** (2001), 3; [hep-th/0103067](#).
- [15] Л. О. Чехов, А. В. Маршаков, А. Д. Миронов, Д. В. Васильев, *Тр. МИРАН*, **251** (2005), 265; [hep-th/0506075](#); D. Vasiliev, *Determinant formulas for matrix model free energy*, [hep-th/0506155](#).
- [16] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.-B. Zuber, *Commun. Math. Phys.*, **59** (1978), 35; F. David, *Nucl. Phys. B*, **257** (1985), 45; V. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **150** (1985), 282.
- [17] M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama, *Int. J. Mod. Phys. A*, **6** (1991), 1385; *Commun. Math. Phys.*, **143** (1992), 371.

- [18] A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov, *Nucl. Phys. B*, **241** (1984), 333.
- [19] S. Kharchev, A. Marshakov, “Topological versus nontopological theories and p - q duality in $c \leq 1$ 2d gravity models”, *String Theory, Quantum Gravity and the Unification of the Fundamental Interactions*, Proc. Int. Workshop (Rome, Italy, 1992), eds. M. Bianchi, F. Fucito, E. Marinari, A. Sagnotti, World Scientific, Singapore, 1993, 331; [hep-th/9210072](#); *Int. J. Mod. Phys. A*, **10** (1995), 1219; [hep-th/9303100](#).
- [20] М. Концевич, *Функц. анализ и его прилож.*, **25** (1991), 50; М. Kontsevich, *Commun. Math. Phys.*, **147** (1992), 1.
- [21] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin, *Phys. Lett. B*, **275** (1992), 311; [hep-th/9111037](#); *Nucl. Phys. B*, **380** (1992), 181; [hep-th/9201013](#).
- [22] Al. Zamolodchikov, *On the three-point function in minimal Liouville gravity*, [hep-th/0505063](#); *Perturbed conformal field theory on fluctuating sphere*, [hep-th/0508044](#); A. Belavin, Al. Zamolodchikov (eds.), *Proc. Int. Workshop “Polyakov’s String: Twenty Five Years After”* (June 23–25, 2005, Chernogolovka, Russia); [hep-th/0510214](#).
- [23] А. В. Гуревич, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ*, **65** (1973), 590; *Письма в ЖЭТФ*, **17** (1973), 268.
- [24] A. Marshakov, *Mod. Phys. Lett. A*, **11** (1996), 1169.
- [25] M. Mineev-Weinstein, P. Wiegmann, A. Zabrodin, *Phys. Rev. Lett.*, **84** (2000), 5106; [nlin.SI/0001007](#); I. K. Kostov, I. Krichever, M. Mineev-Weinstein, P. B. Wiegmann, A. Zabrodin, “ τ -function for analytic curves”, *Random Matrices and Their Applications*, Based on Talks and Lectures from the Workshop (Berkeley, CA, USA, February 22–26, 1999) Math. Sci. Res. Inst. Publ., **40**, eds. P. Bleher, A. Its, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001, 285; [hep-th/0005259](#); A. Zabrodin, *Matrix models and growth processes: From viscous flows to the quantum Hall effect*, [hep-th/0412219](#).
- [26] R. Teodorescu, A. Zabrodin, P. Wiegmann, *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 044502; [cond-mat/0502179](#).
- [27] R. Teodorescu, E. Bettelheim, O. Agam, A. Zabrodin, P. Wiegmann, *Nucl. Phys. B*, **704** (2005), 407; [hep-th/0401165](#).
- [28] V. A. Kazakov, A. Marshakov, *J. Phys. A*, **36** (2003), 3107; [hep-th/0211236](#).
- [29] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 231; [hep-th/9711200](#); S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Phys. Lett. B*, **428** (1998), 105; [hep-th/9802109](#); E. Witten, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **2** (1998), 253; [hep-th/9802150](#).
- [30] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov, *Nucl. Phys. B*, **636** (2002), 99; [hep-th/0204051](#).
- [31] S. Frolov, A. A. Tseytlin, *JHEP*, **0206** (2002), 007; [hep-th/0204226](#); A. A. Tseytlin, *Spinning strings and AdS/CFT duality*, [hep-th/0311139](#); *Semiclassical strings and AdS/CFT*, [hep-th/0409296](#).
- [32] G. Arutyunov, S. Frolov, J. Russo, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **671** (2003), 3; [hep-th/0307191](#); G. Arutyunov, M. Staudacher, *JHEP*, **0403** (2004), 004; [hep-th/0310182](#); G. Arutyunov, S. Frolov, M. Staudacher, *JHEP*, **0410** (2004), 016; [hep-th/0406256](#).
- [33] V. A. Kazakov, A. Marshakov, J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **05** (2004), 024; [hep-th/0402207](#).
- [34] J. A. Minahan, K. Zarembo, *JHEP*, **0303** (2003), 013; [hep-th/0212208](#).
- [35] H. Bethe, *Z. Phys.*, **71** (1931), 205.
- [36] L. D. Faddeev, “How algebraic Bethe ansatz works for integrable models”, *Quantum Symmetries/Symmetries Quantiques*, Proc. of the Les Houches Summer School, Session LXIV (Les Houches, France, August 1 – September 8, 1995), eds. A. Connes, K. Gawedski, J. Zinn-Justin, North-Holland, Amsterdam, 1998, 149; [hep-th/9605187](#).
- [37] L. Dolan, C. R. Nappi, E. Witten, *JHEP*, **0310** (2003), 017; [hep-th/0308089](#); *Yangian symmetry in $D = 4$ superconformal Yang–Mills theory*, [hep-th/0401243](#).

- [38] Н. Ю. Решетихин, Ф. А. Смирнов, *Записки науч. семин. ЛОМИ*, **131** (1983), 128.
- [39] И. М. Кричевер, *Функц. анализ и его прилож.*, **28**:1 (1994), 26.
- [40] А. В. Маршаков, *ТМФ*, **142** (2005), 222; [hep-th/0406056](#).
- [41] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, *Ann. Phys.*, **167** (1986), 227.
- [42] M. Kruczenski, *Phys. Rev. Lett.*, **93** (2004), 161602; [hep-th/0311203](#); M. Kruczenski, A. V. Ryzhov, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **692** (2004), 3; [hep-th/0403120](#).
- [43] И. В. Чередник, *Функц. анализ и его прилож.*, **12** (1978), 45.
- [44] В. Е. Захаров, Л. А. Тахтаджян, *ТМФ*, **38** (1979), 26.
- [45] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов*, Наука, М., 1986.
- [46] R. R. Metsaev, *Nucl. Phys. B*, **625** (2002), 70; [hep-th/0112044](#).
- [47] D. Berenstein, J. M. Maldacena, H. Nastase, *JHEP*, **0204** (2002), 013; [hep-th/0202021](#).
- [48] G. P. Korchemsky, *Nucl. Phys. B*, **462** (1996), 333; [hep-th/9508025](#); **498** (1997), 68; [hep-th/9609123](#); G. P. Korchemsky, I. M. Krichever, *Nucl. Phys. B*, **505** (1997), 387; [hep-th/9704079](#).
- [49] N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai, *Algebraic curve for the SO(6) sector of AdS/CFT*, [hep-th/0410253](#); N. Beisert, V. A. Kazakov, K. Sakai, K. Zarembo, *The algebraic curve of classical superstrings on AdS(5) × S⁵*, [hep-th/0502226](#).
- [50] S. Schafer-Nameki, *Nucl. Phys. B*, **714** (2005), 3; [hep-th/0412254](#).
- [51] G. Akemann, *Nucl. Phys. B*, **482** (1996), 403; [hep-th/9606004](#); I. K. Kostov, *Conformal field theory techniques in random matrix models*, [hep-th/9907060](#); G. Bonnet, F. David, B. Eynard, *J. Phys. A*, **33** (2000), 6739; [cond-mat/0003324](#); R. Dijkgraaf, A. Sinkovics, M. Temurhan, *JHEP*, **0411** (2004), 012; [hep-th/0406247](#); B. Eynard, A. Kokotov, D. Korotkin, *Nucl. Phys. B*, **694** (2004), 443; [hep-th/0403072](#).
- [52] M. Aganagic, R. Dijkgraaf, A. Klemm, M. Marino, C. Vafa, *Commun. Math. Phys.*, **261** (2006), 451; [hep-th/0312085](#); J. Maldacena, G. W. Moore, N. Seiberg, D. Shih, *JHEP*, **0410** (2004), 020; [hep-th/0408039](#); A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, *Int. J. Mod. Phys. A*, **19** (2004), 4127; [hep-th/0310113](#); *Unified description of correlators in non-Gaussian phases of Hermitean matrix model*, [hep-th/0412099](#).
- [53] A. Marshakov, *Matrix model and stationary problem in Toda chain*, [hep-th/0507071](#).
- [54] N. Beisert, A. A. Tseytlin, K. Zarembo, *Nucl. Phys. B*, **715** (2005), 190; [hep-th/0502173](#); S. Schafer-Nameki, M. Zamaklar, K. Zarembo, *JHEP*, **0509** (2005), 051; [hep-th/0507189](#); J. A. Minahan, A. Tirziu, A. A. Tseytlin, *Nucl. Phys. B*, **735** (2006), 127; [hep-th/0509071](#); N. Beisert, A. A. Tseytlin, *Phys. Lett. B*, **629** (2005), 102; [hep-th/0509084](#); S. Schafer-Nameki, M. Zamaklar, *JHEP*, **0510** (2005), 044; [hep-th/0509096](#).
- [55] E. Martinec, G. Moore, N. Seiberg, *Phys. Lett. B*, **263** (1991), 190.
- [56] V. Kazakov, *Phys. Lett. A*, **119** (1986), 140; D. Boulatov, V. Kazakov, *Phys. Lett. B*, **186** (1987), 379.
- [57] Ал. Замолодчиков, *частное сообщение*, 2005.
- [58] G. Moore, N. Seiberg, M. Staudacher, *Nucl. Phys. B*, **362** (1991), 665.

Поступила в редакцию 9.X.2005 г.