Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Щепочкина, Как реализовать алгебру Ли векторными полями, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 3, 450–469

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1987>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 15:13:56

© 2006 г.

И. М. Щепочкина*

КАК РЕАЛИЗОВАТЬ АЛГЕБРУ ЛИ ВЕКТОРНЫМИ ПОЛЯМИ

Описаны алгоритм вложения конечномерной алгебры (супералгебры) Ли в алгебру (супералгебру) Ли векторных полей, пригодный для основного поля любой характеристики, и способ выделения картановских, полных и частичных продолжений алгебр Ли векторных полей дифференциальными уравнениями. Алгоритм проиллюстрирован примером интерпретации Картана исключительной алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)$ в виде алгебры Ли, сохраняющей некоторое неинтегрируемое распределение, а также некоторыми другими примерами.

Ключевые слова: картановское продолжение, неинтегрируемые распределения, $\mathfrak{g}(2)$ -структура.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье приводится алгоритм, явно описывающий вложение произвольной абстрактной $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры Ли (или супералгебры Ли) $\mathfrak{n} := \bigoplus_{k \geq -d} \mathfrak{n}_k$ такой, что

$$\mathfrak{n}_{-1} \text{ порождает } \mathfrak{n}_- := \bigoplus_{k < 0} \mathfrak{n}_k, \quad \dim \mathfrak{n}_- < \infty, \quad (1)$$

в алгебру Ли (соответственно, супералгебру Ли) полиномиальных векторных полей над полем $\mathbb{K}$ любой характеристики p^1 . В качестве иллюстрации алгоритма рассмотрено вложение в векторные поля алгебры Ли $\mathfrak{g}(2)^2$, не зависящее от характеристики поля.

По существу, мы возвращаемся к классическому картановскому [1] пониманию алгебры Ли как алгебры Ли векторных полей, сохраняющих некоторые геометрические структуры, в особенности, неинтегрируемые распределения.

В случае характеристики $p > 0$ Грозман и Лейтес использовали настоящий алгоритм не только для получения новых реализаций известных, но плохо изученных простых алгебр Ли, но и для нахождения новых примеров [2]. В частности, важную

¹Хотя p обозначает и характеристику поля, и четность, а иногда используется и в качестве индекса, из контекста всегда понятно, что имеется в виду.

²Мы будем обозначать простую исключительную алгебру Ли аналогично простым алгебрам, образующим серии, как $\mathfrak{sl}(n)$; тем самым мы избежим путаницы между алгеброй $\mathfrak{g}(2)$ и компонентой $\mathfrak{g}_2$ градуировки два произвольной $\mathbb{Z}$ -градуированной алгебры $\mathfrak{g}$.

*Независимый московский университет, Москва, Россия. E-mail: irina@mcsme.ru

роль в [2] играет приведенная в данной статье реализация алгебры Ли типа $\mathfrak{g}(2)$ векторными полями. В настоящее время алгоритм реализован в пакете Грозмана “SuperLie” [3].

Для полей характеристики $p = 0$ полные продолжения в случае градуировки глубины $d > 1$ обычно описываются как алгебры Ли, сохраняющие некоторое распределение. Поскольку предложенный алгоритм не зависит от характеристики поля, мы и для $p > 0$ приводим явный вид распределения, сохраняемого полным продолжением. Тем самым, мы даем положительный и явный ответ на вопрос работы [4] о возможности выделения полных продолжений с помощью системы уравнений Пфаффа.

Важной особенностью ситуации с супералгебрами Ли и алгебрами Ли над полем характеристики $p > 0$ является наличие нетривиальных частичных продолжений, приводящих к простым алгебрам, чего никогда не бывает в случае вещественных или комплексных алгебр Ли [5]. В настоящей статье показано, как явно описать такие продолжения с помощью дифференциальных уравнений. В работах [6], [7] этот способ использован для явного описания двух исключительных простых супералгебр Ли векторных полей. В настоящей статье приводятся уравнения, выделяющие еще одну простую исключительную супералгебру Ли, получающуюся как частичное продолжение.

Другие работы на данную тему. В работах [8], [9] явно вычислены геометрические структуры, сохраняемые некоторыми простыми исключительными супералгебрами Ли векторных полей, а также простыми исключительными алгебрами Ли.

Задача реализации алгебры Ли операторами рождения–уничтожения тесно связана с задачей, рассмотренной в настоящей статье. Последние результаты и обзор других работ на эту тему можно найти в [10], [11].

Постановка задачи, известные факты и некоторые соображения. Предположим, что $\mathfrak{n} := \bigoplus_{k=-d}^{-1} \mathfrak{n}_k$ – это n -мерная $\mathbb{Z}$ -градуированная алгебра (или супералгебра) Ли глубины $d > 1$, удовлетворяющая условию (1). Пусть

$$f: \mathfrak{n} \rightarrow \mathbf{vect}(n) = \mathbf{der} \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$$

– вложение. Будем работать с полиномиальными векторными полями, т.е. локализовать ситуацию в окрестности начала координат. Обозначим через $f(\mathfrak{n})(0)$ пространство 0-струй в точке 0 векторных полей из образа $f(\mathfrak{n})$.

ЗАДАЧА 1. Вложить $\mathfrak{n}$ в $\mathbf{vect}(n)$ так, чтобы $\dim f(\mathfrak{n})(0) = n = \dim \mathfrak{n}$.

Грубо говоря, мы хотим, чтобы образ алгебры $\mathfrak{n}$ действовал транзитивно (без инвариантных подмногообразий) в окрестности точки 0, или, на алгебраическом языке, чтобы по модулю векторных полей, обращающихся в 0 в начале координат, образ нашей алгебры содержал бы все частные производные $\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n}$. Такое вложение задает нестандартную³⁾ градуировку глубины d алгебры Ли $\mathbf{vect}(n)$. Мы будем обозначать алгебру Ли $\mathbf{vect}(n)$, рассматриваемую в этой нестандартной градуировке, через $\mathfrak{v} = \bigoplus_{k=-d}^{\infty} \mathfrak{v}_k$. Пусть $\mathfrak{g}_-$ – это образ алгебры $\mathfrak{n}$ в $\mathfrak{v}$, т.е. $\mathfrak{g}_- \subset \mathfrak{v}_- := \bigoplus_{k < 0} \mathfrak{v}_k$.

³⁾Градуировка $\deg x_i = 1$ для всех i , ассоциированная с (x) -адической фильтрацией, называется стандартной; любая другая градуировка – нестандартной.

ЗАДАЧА 2. Вычислить *полное алгебраическое продолжение* алгебры $\mathfrak{g}_-$, т.е. найти максимальную подалгебру $(\mathfrak{g}_-)_* = \bigoplus_{k \geq -d} \mathfrak{g}_k \subset \mathfrak{v}$ с заданной *отрицательной* частью.

ЗАДАЧА 3. Выделить *частичное продолжение* алгебры $\mathfrak{g}_-$ в $(\mathfrak{g}_-)_*$.

В частности, если задана не только алгебра $\mathfrak{n}$, но и некоторая подалгебра $\mathfrak{n}_0 \subset \text{der}_0 \mathfrak{n}$, где $\text{der}_0 \mathfrak{n}$ – подалгебра Ли в $\text{der}(\mathfrak{n})$, состоящая из дифференцирований, сохраняющих $\mathbb{Z}$ -градуировку, мы автоматически получаем вложение $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{g}_0$, которое определяет следующие частные случаи задачи 3.

ЗАДАЧА 3.1. Пусть вложение $\mathfrak{n}_0 \subset \mathfrak{g}_0$ строгое. Выделить в $(\mathfrak{g}_-)_*$ подалгебру $\mathfrak{n}_0$ в $\mathfrak{g}_0$, а также ее обобщенное картановское продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{n}_0)_*$, другими словами, максимальную подалгебру в алгебре $\mathfrak{v}$ с данной *неположительной* частью.

ЗАДАЧА 3.2. Пусть $\mathfrak{n}_0 = \mathfrak{g}_0$, но компонента $\mathfrak{g}_1$ образует приводимый $\mathfrak{g}_0$ -модуль с подмодулем $\mathfrak{h}_1$. Выделить максимальную подалгебру $(\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{h}_1)_* \subset \mathfrak{v}$ с данной “начальной частью” (компонентами градуировки ≤ 1).

ЗАДАЧА 3.3. В наибольшей общности, выделить в алгебре $\mathfrak{v}$ максимальную подалгебру $\mathfrak{h}_* = \bigoplus_{k \geq -d} \mathfrak{h}_k$ с данной *начальной частью* $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_- \oplus (\bigoplus_{0 \leq k \leq K} \mathfrak{h}_k)$.

Естественно, начальная часть $\mathfrak{h}$ должна быть согласована со скобкой: $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$ для всех i, j таких, что $i + j \leq K$. При $k > K$ компоненты $\mathfrak{h}_k$ определяются рекуррентно:

$$\mathfrak{h}_k = \{X \in \mathfrak{g}_k \mid [X, \mathfrak{g}_{-1}] \subset \mathfrak{h}_{k-1}\}. \quad (2)$$

Для этих компонент включение $[\mathfrak{h}_k, \mathfrak{h}_l] \subset \mathfrak{h}_{k+l}$ доказывается индукцией по сумме $k+l$ с учетом условия (1), и это гарантирует нам, что сумма $\mathfrak{h}_* := \mathfrak{g}_- \oplus (\bigoplus_{0 \leq k \leq K} \mathfrak{h}_k)$ является подалгеброй в алгебре $\mathfrak{v}$. Алгебра Ли $\mathfrak{h}_*$ является обобщенным картановским продолжением.

ЗАМЕЧАНИЕ. Фактически для простых алгебр Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ число K всегда не превосходит 1, но для $\text{char } \mathbb{K} > 0$ или для супералгебр Ли случай $K > 1$ также возможен даже для простых алгебр.

Обсуждение. Если группа Ли N с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$ задана явно, т.е. если мы знаем явные формулы для произведения элементов группы в некоторых координатах, то никакой проблемы с описанием вложения $\mathfrak{n} \subset \text{vect}(n)$ нет: алгебра Ли левоинвариантных (или правоинвариантных) векторных полей на группе N изоморфна $\mathfrak{n}$. Это, по существу, одно из определений алгебры Ли группы N . Если группа N не задана явно, то описание вложения $\mathfrak{n} \subset \text{vect}(n)$ является частью задачи восстановления группы Ли по ее алгебре Ли (в тех случаях, когда вообще имеет смысл говорить о группе Ли). Конечно, формула Кэмпбелла–Хаусдорфа помогает решить эту задачу. К сожалению, несмотря на свою важность в теоретических исследованиях формула Кэмпбелла–Хаусдорфа плохо приспособлена к явным вычислениям.

Для $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ и $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ еще один метод построения вложения $\mathfrak{n} \subset \text{vect}(n)$ и восстановления группы Ли по ее алгебре Ли состоит в интегрировании уравнений Маурера–Картана [12]. Хотя алгоритм, который предлагается в данной работе, не использует группу Ли алгебры Ли $\mathfrak{n}$ и применим даже в тех случаях, когда о группе вообще

говорить не приходится, именно понимание алгебры Ли как алгебры левоинвариантных векторных полей на группе дает нам ключевые соображения.

Другие алгоритмы вложения $\mathfrak{n} \subset \mathbf{vect}(n)$, основанные на явном описании действия алгебры Ли $\mathfrak{n}$ в универсальной обертывающей $U(\mathfrak{n})$, см. в работах [10], [11].

Перечислим теперь основные соображения, на которых основан алгоритм.

СООБРАЖЕНИЕ 1. Пусть $X_1, \dots, X_n$ – векторные поля, линейно независимые в каждой точке n -мерной (супер)области, и

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{ij}^k X_k, \quad c_{ij}^k \in \mathbb{K}. \quad (3)$$

Пусть $\omega^1, \dots, \omega^n$ – двойственный базис дифференциальных 1-форм, т.е. $\omega^i(X_j) = \delta_j^i$. Тогда (и это стандартное упражнение)

$$d\omega^k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j = -\sum_{i < j} c_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j \quad (4)$$

и наоборот, если 1-формы $\omega^1, \dots, \omega^n$ удовлетворяют соотношению (4), двойственные к ним векторные поля $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяют соотношению (3).

Заметим, что хотя в суперслучае формула

$$d\omega(X, Y) = X\omega(Y) - Y\omega(X) - \omega([X, Y]) \quad (5)$$

требует коррекции с помощью изменения знаков, соотношения (4) остаются справедливыми и для супералгебр: дополнительные знаки в соотношении (5), появляющиеся в силу суперприроды его компонент, не меняют вид формулы (4).

Напомним, что если векторные поля X_i образуют базис левоинвариантных векторных полей группы N , то соотношения (4) называются *уравнениями Маурера–Картана*; в этом случае c_{ij}^k – структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{n}$.

Если $\omega^i = \sum_k V_k^i(x) dx^k$, то соотношения (4) переписываются в виде уравнений на функции V_k^i :

$$\partial_j V_i^k - \partial_i V_j^k = \sum_{p,q} c_{pq}^k V_i^p V_j^q. \quad (6)$$

СООБРАЖЕНИЕ 2. В вещественном и комплексном случаях уравнения (6) легко интегрируются в “хороших” координатах для любой алгебры Ли $\mathfrak{n}$ (не только нильпотентной). А именно введем функции

$$W_j^i(t, x) = tV_j^i(e^{tx}), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathfrak{n}^*.$$

Другими словами, мы должны интегрировать уравнения (6) вдоль однопараметрических подгрупп. Легко проверить (см. книгу [12]), что функции W удовлетворяют обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\frac{dW_j^i}{dt} = \delta_j^i + \sum_{p,q} c_{pq}^i W_j^p x^q \quad (7)$$

с начальными условиями $W_j^i(0, x) = 0$.

На самом деле, в нильпотентном случае система (6) настолько проста, что нет нужды выбирать какие-то специальные координаты и вводить вспомогательные функции W_i^k . Ее можно проинтегрировать и непосредственно, причем для любого основного поля. Это непосредственное решение системы (6) позволяет нам построить вложение $\mathfrak{n} \rightarrow \mathbf{vect}(n)$, наиболее пригодное для наших целей⁴⁾, а также найти все возможные вложения.

Выберем в алгебре Ли $\mathfrak{n}$ базис $B = \{e_1, \dots, e_n\}$, согласованный с градуировкой. Это означает, что первые n_1 его элементов образуют базис компоненты $\mathfrak{n}_{-1}$, следующие n_2 элементов – базис компоненты $\mathfrak{n}_{-2}$ и т.д. Набор индексов, отвечающих базисным элементам компоненты $\mathfrak{n}_{-s}$ обозначим I_s . Пусть $I = \bigcup I_s$, c_{ij}^k – структурные константы в выбранном базисе:

$$[e_i, e_j] = \sum_k c_{ij}^k e_k, \quad (8)$$

а $x_1, \dots, x_n$ – координаты, определяемые базисом B . Нестандартная $\mathbb{Z}$ -градуировка $\mathfrak{v} = \bigoplus_{k \geq -d} \mathfrak{v}_k$ алгебры $\mathbf{vect}(n)$, согласованная с $\mathbb{Z}$ -градуировкой алгебры $\mathfrak{n}$, определяется следующим образом:

$$\deg x_i = s, \quad i \in I_s. \quad (9)$$

Пусть $X_i \in \mathfrak{v}$ есть образ элемента e_i в этом вложении. Тогда значение поля X_i в нуле равно $\partial_{x_i} := \partial_i$, а значение двойственной формы ω^i в нуле равно dx^i . Если $i \in I_s$, то поле X_i и форма ω^i однородны и имеют степени $-s$ и s , соответственно. Мы получаем

$$\omega^i = \begin{cases} dx^i & \text{при } i \in I_1, \\ dx^i + \sum_{j,k \in I_1} a_{jk}^i x^j dx^k & \text{при } i \in I_2, \\ dx^i + \sum_{j \in I_1, k \in I_2} a_{jk}^i x^j dx^k + \\ + \sum_{k \in I_1} \left(\sum_{s,t \in I_1} a_{stk}^i x^s x^t + \sum_{s \in I_2} a_{sk}^i x^s \right) dx^k & \text{при } i \in I_3, \\ \dots\dots\dots & \end{cases}$$

Наличие градуировки гарантирует автоматическое выполнение части уравнений (6). Так, при $k \in I_1$ все функции V_i^k уже известны: $V_i^k = \delta_i^k$. Они удовлетворяют уравнениям (6), поскольку $c_{ij}^k = 0$ для всех $k \in I_1$.

Для $k \in I_2$ правые части уравнений (6) содержат только функции V_i^p, V_j^q с $p, q \in I_1$, т.е. уже известные функции. В результате получается система линейных уравнений на коэффициенты a_{jk}^i . Конечно, эта система является сильно неопределенной. Найдя все ее решения, мы найдем все возможные формы ω^i , $i \in I_2$.

⁴⁾Например, непонятно, почему даже авторы работы [10] испытывали затруднения в применении каждого из трех предложенных ими алгоритмов. Автором данной работы были проверены все эти алгоритмы – они работают. Единственное объяснение, которое автор может привести, отвечая на вопросы, заданные ему Грозманом и Лейтесом, состоит в том, что формулы в [10] фиксированы, и некоторые из них содержат деления. А что делать, если вы работаете над полем конечной характеристики и хотите избежать деления (на 2 или 3) в коэффициентах?! Мы предлагаем пользователю возможность выбрать вложение по вкусу.

Однако нам нужен лишь один набор форм, поэтому мы можем выбрать какое-то одно из решений. После того как функции V_i^k для $k \in I_1 \cup I_2$ найдены, их можно подставить в уравнения (6) на функции V_i^k с $k \in I_3$ и т.д. В результате мы найдем все формы $\omega^1, \dots, \omega^n$. Тожество Якоби гарантирует нам совместность системы.

СООБРАЖЕНИЕ 3. *Как выделять полные продолжения?* В вещественном случае односвязная группа Ли N с алгеброй Ли $\mathfrak{n}$, левоинвариантными формами ω^i , $i \in I$, и структурными константами c_{ij}^k , определяемыми соотношениями (4), обладает следующим универсальным свойством.

ТЕОРЕМА [13]. *Если M – гладкое многообразие с набором линейно независимых в каждой точке дифференциальных 1-форм α^i , удовлетворяющих соотношениям (4) с теми же константами c_{ij}^k , то для любой точки $x \in M$ существуют такая окрестность U и диффеоморфизм $f: U \rightarrow N$, что $\alpha^i = f^*(\omega^i)$. Два таких диффеоморфизма отличаются левым сдвигом.*

Следовательно, как только мы найдем формы ω^i , удовлетворяющие соотношениям (4), мы можем считать их левоинвариантными формами на группе N , а дуальные векторные поля X_i – левоинвариантными векторными полями.

Пусть $Y_1, \dots, Y_n$ – правоинвариантные векторные поля такие, что $X_i(e) = Y_i(e)$, и $\theta^1, \dots, \theta^n$ – двойственные к ним правоинвариантные 1-формы.

Ясно, что линейные оболочки обоих наборов полей $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$ являются изоморфными $\mathfrak{n}$ подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{v}_-$ всех векторных полей на группе N отрицательной нестандартной градуировки.

Определим на N правоинвариантное распределение $\mathcal{D}$ такое, что $D(e) = \mathfrak{n}_{-1}$. Ясно, что $\mathcal{D}$ выделяется системой уравнений на поле $X \in \mathbf{vect}(n)$:

$$\theta^i(X) = 0, \quad i \in I_2 \cup I_3 \cup \dots \cup I_d. \quad (10)$$

Поскольку лево- и правоинвариантные векторные поля на группе Ли всегда коммутируют друг с другом, каждое поле X_j сохраняет распределение $\mathcal{D}$, а значит, и вся алгебра Ли $\mathfrak{g}_-$ сохраняет $\mathcal{D}$. Более того, из $\mathbb{Z}$ -градуированности алгебры Ли $\mathfrak{n}$ следует, что $X \in \mathfrak{v}_-$ сохраняет $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда X коммутирует со всеми Y_i , где $i \in I_1$, а значит, и со всеми Y_i , где $i \in I$, поскольку $\mathfrak{n}_{-1}$ порождает $\mathfrak{n}$.

Следовательно, $\mathfrak{g}_-$ определяется как максимальная подалгебра алгебры $\mathfrak{v}_-$, сохраняющая распределение $\mathcal{D}$. Но тогда полное продолжение алгебры $\mathfrak{g}_-$ является максимальной подалгеброй алгебры всех векторных полей $\mathbf{vect}(n)$, сохраняющей распределение $\mathcal{D}$.

Конечно, мы можем переформулировать все это и без обращения к группе N . Нам нужен лишь централизатор $\mathbf{cent}_{\mathfrak{v}_-}(\mathfrak{g}_-)$ алгебры $\mathfrak{g}_-$ в алгебре $\mathfrak{v}_-$. Ясно также, что, представив поле $Y \in \mathfrak{v}_{-s}$ в виде суммы однородных в смысле стандартной градуировки ($\deg x^i = 1$) компонент,

$$Y = \sum_{p=-1}^{d-s-1} Y_{(p)},$$

мы получим, что для полей Y , обращающихся в нуль в нуле (для них $Y_{(-1)} = 0$), младшая компонента коммутатора $[X_i, Y]$ совпадает с коммутатором младшей компоненты поля Y с ∂_i и, следовательно, отлична от нуля.

Обратно, для любого поля Y такого, что $Y_{(-1)} \neq 0$, уравнения $[X_i, Y] = 0$, $i = 1, \dots, n$, позволяют последовательно однозначно восстановить все компоненты $Y_{(p)}$ для $p \geq 0$, начиная с $Y_{(-1)}$, если использовать рекуррентное соотношение

$$[\partial_i, Y_{(p)}] = - \sum_{s=-1}^{p-1} [(X_i)_{(p-1-s)}, Y_{(s)}], \quad i = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Пусть $Y_i \in \mathbf{cent}_{\mathbf{v}_-}(\mathbf{g}_-)$ такое поле, что $(Y_i)_{(-1)} = \partial_i$. Тогда

$$\begin{aligned} [Y_i, Y_j]_{(-1)} &= [\partial_i, (Y_j)_{(0)}] + [(Y_i)_{(0)}, \partial_j] = -[(X_i)_{(0)}, \partial_j] - [\partial_i, (X_j)_{(0)}] = \\ &= -[X_i, X_j]_{(-1)} = - \sum_k c_{ij}^k (X_k)_{(-1)} = - \sum_k c_{ij}^k (Y_k)_{(-1)}, \end{aligned} \quad (12)$$

и, поскольку поля из централизатора $\mathbf{cent}_{\mathbf{v}_-}(\mathbf{g}_-)$ однозначно определяются своей (-1) -й компонентой, мы получаем, что

$$[Y_i, Y_j] = - \sum_k c_{ij}^k Y_k,$$

т.е. централизатор $\mathbf{cent}_{\mathbf{v}_-}(\mathbf{g}_-)$ изоморфен $\mathfrak{n}$.

Пусть θ^i образуют базис 1-форм, двойственный базису $\{Y_i\}_{i \in I}$ (т.е. $\theta^i(Y_j) = \delta_j^i$). Тогда любое векторное поле $X \in \mathbf{vect}(n)$ можно представить в виде

$$X = \sum_i \theta^i(X) Y_i.$$

Поскольку $[X_i, Y_j] = 0$ для любых $i, j = 1, \dots, n$, мы получаем следующее соотношение:

$$\theta^i([X_j, X]) = X_j(\theta^i(X)). \quad (13)$$

Рассмотрим теперь распределение $\mathcal{D}$, определенное соотношениями (10). Как мы уже заметили, подалгебра $\mathbf{g}_-$ характеризуется как максимальная подалгебра алгебры $\mathbf{v}_-$, сохраняющая распределение $\mathcal{D}$.

Заметим прежде всего, что, хотя поле X_i сохраняет любую форму θ^j , это условие не выдерживает операции (2) полного продолжения. С другой стороны, требование того, что поле X сохраняет распределение $\mathcal{D}$, не является столь сильным и выдерживает продолжение.

Действительно, поле $X \in \mathbf{v}$ сохраняет $\mathcal{D}$ тогда и только тогда, когда

$$\theta^k([X, Y_i]) = 0 \quad \text{для любых } i = 1, \dots, n_1 \text{ и любого } k > n_1. \quad (14)$$

Пусть это соотношение выполнено для любого поля $X \in \mathbf{g}_{s-1}$. Тогда в силу условия (2) $X \in \mathbf{g}_s$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} \theta^k([X_j, X], Y_i) &= X_j \theta^k([X, Y_i]) = 0 && \text{для любых } i, j = 1, \dots, n_1 \\ &&& \text{и любого } k > n_1 \end{aligned} \quad (15)$$

(мы учли равенство (13)).

Наконец, поскольку компонента $\mathfrak{n}_{-1}$ порождает алгебру $\mathfrak{n}$, условие (15) эквивалентно условию

$$\partial_j(\theta^k([X, Y_i]) = 0 \quad \text{для всех } j = 1, \dots, n. \quad (16)$$

Если $k \in I_l$ ($l \geq 2$), то $\theta^k([X, Y_i])$ является однородным (в нестандартной градуировке) многочленом степени $s - 1 + l \geq s + 1 \geq 1$, следовательно, условие (16) эквивалентно условию

$$\theta^k([X, Y_i]) = 0 \quad \text{для любых } i = 1, \dots, n_1 \text{ и любого } k > n_1, \quad (17)$$

и поэтому поле X сохраняет распределение $\mathcal{D}$.

Перепишем систему (14) в координатах поля X более подробно:

$$Y_i(\theta^k(X)) - \sum_j (-1)^{p(Y_i)p(\theta^j(X))} c_{ij}^k \theta^j(X) = 0, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad k = n_1 + 1, \dots, n. \quad (18)$$

Градуированность алгебры $\mathfrak{n}$ означает, что эта система имеет специальный вид. Обозначим через $F_i = \theta^{n-n_d+i}(X)$, $i = 1, \dots, n_d$, координаты векторного поля X , соответствующие компоненте $\mathfrak{g}_{-d}$ максимальной глубины. Если функции F_i известны, то уравнения (18) при $k \in I_d$ задают систему линейных (не дифференциальных) уравнений на координаты $\theta^j(X)$, отвечающие компоненте $\mathfrak{g}_{-d+1}$, причем если в этой компоненте нет элементов центра всей алгебры $\mathfrak{g}_-$, то в систему входят все координаты этого уровня. После того как эти координаты определены, уравнения (18) при $k \in I_{d-1}$ превращаются в систему линейных уравнений на координаты предыдущего уровня $-d + 2$ и т.д. Таким образом, функции F_i являются производящими функциями для векторного поля X . В общем случае в качестве производящих функций следует взять координаты, соответствующие всем линейно независимым центральным элементам алгебры $\mathfrak{g}_-$.

Теперь мы в состоянии сформулировать алгоритм для решения первых двух задач.

2. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ 1, 2

Мы предлагаем следующий алгоритм.

1. Выбираем в алгебре $\mathfrak{n}$ базис B , согласованный с градуировкой и вычисляем соответствующие ему структурные константы c_{ij}^k .

2. Ищем базис 1-форм $\{\omega^i\}_{i \in I}$, удовлетворяющий уравнениям (4): решаем систему (6) снизу вверх, начиная со степени 1 и поднимаясь последовательно до степени d .

3. Ищем двойственный базис векторных полей $\{X_i\}_{i \in I}$ снизу вверх, начиная со степени $-d$ и поднимаясь последовательно до степени -1 . Поля $\{X_i\}_{i \in I}$ определяют вложение алгебры $\mathfrak{n}$ в алгебру $\mathbf{vect}(n)$. Задача 1 решена.

4. Ищем базис $\{Y_i\}_{i \in I}$ централизатора $\mathbf{cent}_{\mathfrak{v}_-}(\mathfrak{g}_-)$ в алгебре $\mathfrak{v}_-$ с помощью соотношений (11) и двойственный ему базис 1-форм $\{\theta^i\}_{i \in I}$.

5. Для того чтобы найти компоненту $\mathfrak{g}_s$ полного продолжения алгебры $\mathfrak{g}_-$, ищем поле $X \in \mathfrak{g}_s$ в виде $X = \sum \theta^i(X)Y_i$. Для этого представляем каждую из n_d производящих функций $F^i = \theta^{n-n_d+i}(X)$ в виде суммы мономов степени $d + s$ (в нестандартной градуировке) с неопределенными коэффициентами и решаем систему (18) линейных уравнений на эти коэффициенты. Для контроля при $s < 0$ сверяем вид получающихся полей с полями X_i . Задача 2 решена.

ПРИМЕР. Пусть всюду в дальнейшем в зависимости от характеристики поля p

$$x^{(k)} := \begin{cases} x^k/k!, & p = 0, \\ u^{(k)}, & p > 0, \end{cases}$$

где $u^{(k)}$ – разделенная степень.

Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-3} \oplus \mathfrak{n}_{-2} \oplus \mathfrak{n}_{-1}$ обозначает единственную $\mathbb{Z}$ -градуированную нильпотентную алгебру Ли, удовлетворяющую условию (1), такую, что

$$\dim \mathfrak{n}_{-1} = 2, \quad \dim \mathfrak{n}_{-2} = 1, \quad \dim \mathfrak{n}_{-3} = 2.$$

Как отмечено в [1], эта алгебра тесно связана с простой исключительной алгеброй Ли $\mathfrak{g}(2)$. Если на алгебре Ли $\mathfrak{g}(2)$ ввести $\mathbb{Z}$ -градуировку, положив степень длинного простого корня равной нулю, а степень короткого простого корня – равной единице, то в разложении $\mathfrak{g}(2) = \mathfrak{g}(2)_{-} \oplus \mathfrak{g}(2)_0 \oplus \mathfrak{g}(2)_{+}$ градуированная подалгебра $\mathfrak{g}(2)_{-}$ изоморфна $\mathfrak{n}$, причем, как показано в [5], полное продолжение алгебры $\mathfrak{n}$ изоморфно в точности исключительной алгебре Ли $\mathfrak{g}(2)$.

Проследим действие алгоритма на примере вложения $f(\mathfrak{n}) = \mathfrak{g}_{-} \subset \text{vect}(5)$.

1. Базис, согласованный с градуировкой, и структурные константы имеют вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{n}_{-1} &= \text{Span}(e_1, e_2), & \mathfrak{n}_{-2} &= \text{Span}(e_3), & \mathfrak{n}_{-3} &= \text{Span}(e_4, e_5); \\ [e_1, e_2] &= e_3, & [e_1, e_3] &= e_4, & [e_2, e_3] &= e_5; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{ij}^k &= 0 \quad \text{при } k = 1, 2, & c_{12}^3 &= -c_{21}^3 = 1, & c_{ij}^3 &= 0 \quad \text{в остальных случаях;} \\ c_{13}^4 &= -c_{31}^4 = 1, & c_{ij}^4 &= 0 \quad \text{в остальных случаях;} \\ c_{23}^5 &= -c_{32}^5 = 1, & c_{ij}^5 &= 0 \quad \text{в остальных случаях.} \end{aligned}$$

2. Тогда

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx^1, & \omega^2 &= dx^2 \implies & V_i^k &= \delta_i^k \quad \text{при } k = 1, 2; \\ \omega^3 &= dx^3 + \sum_{i,j=1}^2 a_{ij}^3 x^i dx^j \implies & V_4^3 &= V_5^3 = 0, & V_3^3 &= 1; \\ & & V_2^3 &= a_{12}^3 x^1 + a_{22}^3 x^2, & V_1^3 &= a_{11}^3 x^1 + a_{21}^3 x^2. \end{aligned}$$

Уравнения (6) дают одно нетривиальное соотношение на функции V_i^3 :

$$\partial_2 V_1^3 - \partial_1 V_2^3 = V_1^1 V_2^2 - V_1^2 V_2^1 = 1,$$

или (в коэффициентах a_{ij}^3)

$$a_{21}^3 - a_{12}^3 = 1. \quad (19)$$

В сущности, мы можем взять любой набор коэффициентов $a_{11}^3, a_{22}^3, a_{12}^3, a_{21}^3$, удовлетворяющий (19). Возьмем тот, который кажется наиболее простым:

$$a_{11}^3 = a_{22}^3 = a_{12}^3 = 0, \quad a_{21}^3 = 1.$$

В канонических координатах первого рода $a_{11}^3 = a_{22}^3 = 0$, $a_{12}^3 = a_{21}^3 = 1/2$, и это наиболее симметричные координаты. Однако сейчас нам хочется по возможности избежать делений.

Таким образом, $V_1^3 = x^2$, $V_2^3 = 0$, и следовательно,

$$\omega^3 = dx^3 + x^2 dx^1.$$

Далее, при $k = 4, 5$

$$\omega^k = dx^k + \sum_{j=1}^3 V_j^k dx^j,$$

где

$$\begin{aligned} V_3^k &= a_1^k x^1 + a_2^k x^2, \\ V_j^k &= \alpha_j^k (x^1)^{(2)} + \beta_j^k x^1 x^2 + \gamma_j^k (x^2)^{(2)} + \varepsilon_j^k x^3, \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Уравнения (6) дают по три нетривиальных соотношения на функции V_j^k , где $k = 4, 5$, $j = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned} \partial_2 V_1^4 - \partial_1 V_2^4 &= 0, & \partial_3 V_1^4 - \partial_1 V_3^4 &= 1, & \partial_3 V_2^4 - \partial_2 V_3^4 &= 0; \\ \partial_2 V_1^5 - \partial_1 V_2^5 &= -x^2, & \partial_3 V_1^5 - \partial_1 V_3^5 &= 0, & \partial_3 V_2^5 - \partial_2 V_3^5 &= 1; \end{aligned}$$

или (в терминах коэффициентов):

$$\begin{aligned} \beta_1^4 x^1 + \gamma_1^4 x^2 &= \alpha_2^4 x^1 + \beta_2^4 x^2, & \varepsilon_1^4 - a_1^4 &= 1, & \varepsilon_2^4 - a_2^4 &= 0; \\ \beta_1^5 x^1 - \gamma_1^5 x^2 - \alpha_2^5 x^1 - \beta_2^5 x^2 &= -x^2, & \varepsilon_1^5 - a_1^5 &= 1, & \varepsilon_2^5 - a_2^5 &= 1. \end{aligned}$$

Выбирая наиболее простое решение, получим

$$\omega^4 = dx^4 - x^1 dx^3, \quad \omega^5 = dx^5 - x^2 dx^3 - (x^2)^{(2)} dx^1.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \omega^1 &= dx^1, & \omega^2 &= dx^2, & \omega^3 &= dx^3 + x^2 dx^1, \\ \omega^4 &= dx^4 - x^1 dx^3, & \omega^5 &= dx^5 - x^2 dx^3 - (x^2)^{(2)} dx^1. \end{aligned}$$

3. Теперь ищем двойственные поля X_i :

$$\begin{aligned} X_5 &= \partial_5, & X_4 &= \partial_4, & X_3 &= \partial_3 + x^1 \partial_4 + x^2 \partial_5, \\ X_2 &= \partial_2, & X_1 &= \partial_1 - x^2 \partial_3 - x^1 x^2 \partial_4 - (x^2)^{(2)} \partial_5. \end{aligned}$$

Получаем $\mathfrak{g}_- = \text{Span}\{X_1, \dots, X_5\}$.

4. Ищем однородные поля $Y_i = \partial_i + \dots$, коммутирующие со всеми X_j . Коммутирование с X_2 , X_4 , X_5 означает, что все координаты полей Y_i могут зависеть только от переменных x^1 и x^3 . Тогда

$$Y_4 = \partial_4, \quad Y_5 = \partial_5, \quad Y_3 = \partial_3 + ax^1 \partial_4 + bx^1 \partial_5,$$

и из равенства $[X_1, Y_3] = 0$ следует, что $Y_3 = \partial_3$.

Наконец, при $i = 1, 2$ поля Y_i имеют вид

$$Y_i = \partial_i + \alpha_i x^1 \partial_3 + \sum_{j=4}^5 (\beta_i^j (x^1)^{(2)} + \gamma_i^j x^3) \partial_j.$$

Коммутируя Y_i с X_1 и X_3 , получаем

$$\begin{aligned} Y_1 &= \partial_1 + x^3 \partial_4, \\ Y_2 &= \partial_2 - x^1 \partial_3 - (x^1)^{(2)} \partial_4 + x^3 \partial_5. \end{aligned} \quad (20)$$

Осталось только найти формы θ^i , двойственные полям Y_i . Стандартные вычисления показывают, что $\theta^i = dx^i$ при $i = 1, 2$ и

$$\begin{aligned} \theta^3 &= dx^3 + x^1 dx^2, \\ \theta^4 &= dx^4 - x^3 dx^1 + (x^1)^{(2)} dx^2, \\ \theta^5 &= dx^5 - x^3 dx^2. \end{aligned} \quad (21)$$

5. Ищем все векторные поля X , сохраняющие распределение $\mathcal{D} = \text{Span}\{Y_1, Y_2\}$, или, что то же самое, все поля, принадлежащие полному продолжению алгебры Ли $\mathfrak{g}_-$. Поле X ищем в виде $X = \sum f^i Y_i$, где $f^i = \theta^i(X)$. Для этого решаем уравнения (18). В нашем случае они имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1(f^4) &= f^3, & Y_1(f^5) &= 0, & Y_2(f^4) &= 0, \\ Y_2(f^5) &= f^3, & Y_1(f^3) &= f^2, & Y_2(f^3) &= -f^1. \end{aligned}$$

Мы видим, что векторное поле X полностью определяется компонентами f^4 и f^5 , для которых имеются три соотношения

$$Y_1(f^5) = 0, \quad Y_2(f^4) = 0, \quad Y_1(f^4) = Y_2(f^5). \quad (22)$$

Для контроля мы можем посмотреть, какие поля выделяют эти формулы в компоненте $\mathfrak{v}_{-2}$. Обе функции f^4 и f^5 должны иметь степень единица в нашей градуировке, т.е. иметь вид $f^i = a^i x^1 + b^i x^2$, $i = 4, 5$. Тогда $Y_1(f^i) = a$, $Y_2(f^i) = b$, и уравнения (22) означают, что

$$f^4 = ax^1, \quad f^5 = ax^2 \implies f^3 = a, \quad f^1 = f^2 = 0.$$

Таким образом, любое поле, сохраняющее распределение $\mathcal{D}$ и лежащее в компоненте $\mathfrak{v}_{-2}$, пропорционально полю

$$X = Y_3 + x^1 Y_4 + x^2 Y_5 = \partial_3 + x^1 \partial_4 + x^2 \partial_5 = X_3,$$

в чем мы и хотели убедиться.

Аналогично мы можем убедиться в том, что и в компоненте $\mathfrak{v}_{-1}$ наши уравнения выделяют в точности подпространство, натянутое на поля X_1 и X_2 .

Перейдем к вычислению нулевой компоненты. Производящие функции для нее должны иметь степень три в нашей градуировке, т.е. иметь вид (для $i = 4, 5$)

$$f^i = a_1^i (x^1)^{(3)} + a_2^i (x^1)^{(2)} x^2 + a_3^i x^1 (x^2)^{(2)} + a_4^i (x^2)^{(3)} + b_1^i x^1 x^3 + b_2^i x^2 x^3 + c_1^i x^4 + c_2^i x^5.$$

Тогда

$$\begin{aligned} Y_1(f^i) &= a_1^i(x^1)^{(2)} + a_2^i x^1 x^2 + a_3^i (x^2)^{(2)} + (b_1^i + c_1^i) x^3, \\ Y_2(f^i) &= (a_2^i - 2b_1^i - c_1^i)(x^1)^{(2)} + (a_3^i - b_2^i) x^1 x^2 + a_4^i (x^2)^{(2)} + (b_2^i + c_2^i) x^3. \end{aligned}$$

Уравнения (22) в этом случае сводятся к следующей системе линейных уравнений:

$$\begin{aligned} a_1^5 &= a_2^5 = a_3^5 = 0, & b_1^5 + c_1^5 &= 0, \\ a_4^4 &= 0, & b_2^4 + c_2^4 &= 0, & a_3^4 - b_2^4 &= 0, & a_2^4 - 2b_1^4 + c_1^4 &= 0, \\ a_1^4 &= a_2^5 - 2b_1^5 - c_1^5, & a_2^4 &= a_3^5 - b_2^5, & a_3^4 &= a_4^5, & b_1^4 + c_1^4 &= b_2^5 + c_2^5. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получаем

$$\begin{aligned} a_1^4 &= -b_1^5 = c_1^5 = \alpha, & a_2^4 &= -b_2^5 = \beta, \\ a_3^4 &= a_4^5 = b_2^4 = -c_2^4 = \gamma, & a_4^4 &= a_1^5 = a_2^5 = a_3^5 = 0, \\ b_1^4 &= \delta, & c_1^4 &= \beta - 2\delta, & c_2^5 &= 2\beta - \delta. \end{aligned}$$

Откуда

$$\begin{aligned} f^5 &= \gamma(x^2)^3 - \alpha x^1 x^3 - \beta x^2 x^3 + \alpha x^4 + (2\beta - \delta)x^5, \\ f^4 &= \alpha(x^1)^{(3)} + \beta(x^1)^{(2)} x^2 + \gamma x^1 (x^2)^{(2)} + \delta x^1 x^3 + \gamma x^2 x^3 + (\beta - 2\delta)x^4 - \gamma x^5, \\ f^3 &= \alpha(x^1)^{(2)} + \beta x^1 x^2 + \gamma(x^2)^{(2)} + (\beta - \delta)x^3, \\ f^2 &= Y_1(f^3) = \alpha x^1 + \beta x^2, & f^1 &= -Y_2(f^3) = -\delta x^1 - \gamma x^2. \end{aligned}$$

В качестве базиса компоненты $\mathfrak{g}_0$ возьмем векторы $X_\alpha, X_\beta, X_\gamma, X_\delta$, отвечающие только одному ненулевому параметру (например, X_α отвечает значениям $\alpha = 1, \beta = \gamma = \delta = 0$ и т.д.):

$$\begin{aligned} X_\alpha &= x^1 Y_2 + (x^1)^{(2)} Y_3 + (x^1)^{(3)} Y_4 + (-x^1 x^3 + x^4) Y_5 = \\ &= x^1 \partial_2 + x^4 \partial_5 - (x^1)^{(2)} \partial_3 - 2(x^1)^{(2)} \partial_4, \\ X_\beta &= x^2 \partial_2 + x^3 \partial_3 + x^4 \partial_4 + 2x^5 \partial_5, \\ X_\gamma &= -x^2 \partial_1 - x^5 \partial_4 + (x^2)^{(2)} \partial_3 + x^1 (x^2)^{(2)} \partial_4 + (x^2)^{(3)} \partial_5, \\ X_\delta &= -x^1 \partial_1 - x^3 \partial_3 - 2x^4 \partial_4 - x^5 \partial_5. \end{aligned}$$

При $\alpha = \gamma = 0, \delta = -\beta = 1$, получаем градуирующий оператор

$$X = -x^1 \partial_1 - x^2 \partial_2 - 2x^3 \partial_3 - 3x^4 \partial_4 - 3x^5 \partial_5.$$

Высшие компоненты вычисляются аналогичным образом.

Интерпретация результатов. Существуют три реализации алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(2)$ в виде алгебры Ли векторных полей, сохраняющих некоторое неинтегрируемое распределение на $\mathfrak{g}_-$. Эти реализации связаны с тремя (несжимаемыми) $\mathbb{Z}$ -градуировками алгебры $\mathfrak{g}$: степень одного или обоих корневых векторов полагается равной

единице. Выше мы рассмотрели градуировку $(1, 0)$; Картан использовал ее для того, чтобы дать первую интерпретацию алгебры $\mathfrak{g}(2)$, в то время только что открытой Киллингом, см. [1]⁵.

В нашей реализации (полями X_i) алгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(2)$ сохраняет распределение в касательном расслоении на $\mathfrak{g}_-$, задаваемое системой уравнений Пфаффа на векторные поля X

$$\theta^3(X) = 0, \quad \theta^4(X) = 0, \quad \theta^5(X) = 0.$$

Эквивалентным, но чуть более экономным способом можно описать алгебру $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(2)$ как алгебру, сохраняющую кораспределение в кокасательном расслоении на $\mathfrak{g}_-$, задаваемое векторами (20), т.е. следующей системой уравнений на 1-формы α :

$$\alpha(Y_1) = 0, \quad \alpha(Y_2) = 0.$$

Очевидно, что описание в терминах кораспределений иногда оказывается короче: любое распределение коразмерности r описывается с помощью r уравнений Пфаффа, тогда как двойственное кораспределение – с помощью $n - r$ уравнений.

Аналогично можно описать и остальные реализации алгебры $\mathfrak{g}(2)$, отвечающие другим $\mathbb{Z}$ -градуировкам, различные реализации исключительных алгебр Ли $\mathfrak{f}(4)$ и $\mathfrak{e}(6) - \mathfrak{e}(8)$, а также исключительные супералгебры Ли и алгебры Ли над полями характеристики $p > 0$. До появления работы [2] рассматривать неинтегрируемые распределения, связанные с различными $\mathbb{Z}$ -градуировками *неисключительных* алгебр Ли, представлялось ненужным: их обычное описание как сохраняющих объем или невырожденную билинейную форму достаточно ясно. Картан, хотя и отмечал важность описания алгебр Ли в терминах распределений, рассматривал для каждой конкретной алгебры Ли только одно-два распределения, связанных с одной-двумя ее $\mathbb{Z}$ -градуировками. Однако если применить описанный алгоритм к алгебрам $\mathfrak{o}(7)$, $\mathfrak{sp}(4)$ и $\mathfrak{sp}(10)$ при характеристике $p = 2, 3, 5$, то удастся прояснить строение некоторых простых алгебр Ли, специфических для этих характеристик, и получить некоторые новые примеры, как в [2], необходимые для будущей классификации.

3. КАК ВЫДЕЛЯТЬ ЧАСТИЧНЫЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ: РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ 3

Итак, мы описали *полное* продолжение (супер)алгебры Ли $\mathfrak{g}_-$, т.е. нам известна максимальная подалгебра $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_-)_* \subset \mathfrak{v}$ с данной отрицательной частью. Рассмотрим теперь подпространство $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_- \oplus (\bigoplus_{0 \leq k \leq K} \mathfrak{h}_k) \subset \mathfrak{g}$, замкнутое относительно скобки в пределах своей градуировки, другими словами, такое, что $[\mathfrak{h}_i, \mathfrak{h}_j] \subset \mathfrak{h}_{i+j}$, если только $i + j \leq K$. Опишем *частичное* продолжение $\mathfrak{h}_* = \bigoplus_{k \geq -d} \mathfrak{h}_k \subset \mathfrak{g}$ подпространства $\mathfrak{h}$, т.е. максимальную подалгебру алгебры $\mathfrak{g}$ с данной *начальной частью* $\mathfrak{h}$. Компоненты $\mathfrak{h}_k$ с $k > K$ выделяются условием (2). При этом под описанием мы имеем в виду выделение подалгебры $\mathfrak{h}$ в $\mathfrak{g}$ с помощью системы дифференциальных уравнений.

⁵Картан рассматривал также градуировку $(1, 1)$, см. [5]; именно в такой градуировке алгебра $\mathfrak{g}(2)$ появилась у Картана при изучении уравнения Гильберта $f' = (g'')^2$. Наконец, градуировка $(0, 1)$ была недавно рассмотрена в [9].

ЗАМЕЧАНИЕ. Картановское продолжение $(\mathfrak{g}_-, \mathfrak{g}_0)_*$, где подалгебра $\mathfrak{g}_-$ коммутативна, глубина $d = 1$, а $\mathfrak{g}_0 \subset \mathfrak{gl}(n)$, является частным случаем вышеописанной конструкции при $\mathfrak{g} = \mathbf{vect}(n)$ и $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$. Примеры описания картановских продолжений с помощью дифференциальных уравнений см. в [6], [7].

Будем называть однородную компоненту $\mathfrak{h}_m$ алгебры $\mathfrak{h}$ *определяющей*, если $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{g}_k$ для всех $k < m$, но $\mathfrak{h}_m \neq \mathfrak{g}_m$. Мы рассмотрим алгоритм описания алгебры $\mathfrak{h}_*$ для случая, когда определяющая компонента имеет максимальную степень K . Случай, когда определяющая компонента имеет степень $m < K$, сводится к предыдущему. Действительно, мы можем сначала описать частичное продолжение $\mathfrak{h}_*^m = (\bigoplus_{0 \leq k \leq m} \mathfrak{h}_k)_*$, сравнить компоненты $\mathfrak{h}_k$ при $m < k \leq K$ с соответствующими компонентами полученного продолжения $\mathfrak{h}_*^m$, выделить новую определяющую компоненту, если она появится, и т.д.

Итак, пусть $Z_1, \dots, Z_{\dim \mathfrak{h}_K}$ – базис определяющей компоненты $\mathfrak{h}_K \subset \mathfrak{g}_K$.

Прежде всего, мы должны выделить подпространство $\mathfrak{h}_K$ в $\mathfrak{g}_K$ с помощью системы линейных (алгебраических) уравнений, т.е. найти базис аннулятора подпространства $\mathfrak{h}_K$ в $(\mathfrak{g}_K)^*$, или, что эквивалентно, найти фундаментальную систему решений $\alpha^1, \dots, \alpha^r$ следующей системы уравнений на неизвестные 1-формы $\alpha \in (\mathfrak{g}_K)^*$:

$$\alpha(Z_i) = 0, \quad i = 1, \dots, \dim \mathfrak{h}_K. \quad (23)$$

Подпространство $\mathfrak{h}_K$ выделяется с помощью системы однородных линейных уравнений на неизвестное векторное поле $X \in \mathfrak{g}_K$

$$\alpha^i(X) = 0, \quad i = 1, \dots, r. \quad (24)$$

В компоненте $\mathfrak{g}_K$ есть удобный для нас базис, состоящий из полей вида fY_j , где f – моном степени $K + s$, если $j \in I_s$. Соответственно, двойственный базис состоит из элементов степени $-K$ и имеет вид $A_{i_1, \dots, i_t}^j = S(Y_{i_1} \dots Y_{i_t})\theta^j$, а формы α^l могут быть представлены в этом базисе как

$$\alpha^l = \sum a_j^{l; i_1, \dots, i_t} A_{i_1, \dots, i_t}^j. \quad (25)$$

Подставляя (25) в (24), получим следующую систему однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами на координаты векторного поля $X = \theta^i(X)Y_i \in \mathfrak{h}_K$:

$$\sum a_j^{l; i_1, \dots, i_t} S(Y_{i_1} \dots Y_{i_t})\theta^j(X) = 0, \quad l = 1, \dots, r. \quad (26)$$

Заметим, что для алгебр Ли (но не для *супер*алгебр Ли) уравнения (26) выдерживают процедуру продолжения (2). Действительно, для $k > K$, по предположению индукции, $X \in \mathfrak{h}_k$ тогда и только тогда, когда коммутаторы $[X_i, X]$ удовлетворяют уравнениям (26) для всех $i = 1, \dots, n_1$. Положим

$$f^l = \sum a_j^{l; i_1, \dots, i_t} S(Y_{i_1} \dots Y_{i_t})\theta^j(X).$$

Поскольку все поля X_i коммутируют со всеми полями Y_j , система (26), в которую вместо поля X подставлены коммутаторы $[X_i, X]$, эквивалентна системе

$$X_i(f^l) = 0, \quad i = 1, \dots, n_1, \quad l = 1, \dots, r, \quad (27)$$

которая в свою очередь в силу (1) эквивалентна системе

$$\partial_i(f^l) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad l = 1, \dots, r.$$

Это означает, что $f^l = \text{const}$ для всех $l = 1, \dots, r$. Поскольку функции f^l являются однородными многочленами степени $k - K > 0$, из этого следует, что $f^l = 0$. Значит, $X \in \mathfrak{h}_k$ тогда и только тогда, когда поле X удовлетворяет системе (26).

В суперслучае поля X_i и Y_j суперкоммутируют, а не коммутируют, что, вообще говоря, не позволяет нам отбросить X_i и перейти от системы (26) к системе (27). Ситуацию спасает следующее простое и хорошо известное соображение, которое мы докажем для полноты изложения.

Напомним, что $p(\cdot)$ обозначает функцию четности, а Pty – оператор четности:

$$\text{Pty}(x) = (-1)^{p(x)}x.$$

ЛЕММА. Пусть элементы $X, Y \in \text{End } V$ суперкоммутируют и $p(Y) = \bar{1}$. Тогда X и $\hat{Y} = Y \text{ Pty}$ коммутируют (в обычном смысле), т.е. $X\hat{Y} = \hat{Y}X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно,

$$\begin{aligned} X\hat{Y}(v) &= XY \text{ Pty}(v) = (-1)^{p(v)}XY(v) = \\ &= (-1)^{p(v)}(-1)^{p(X)p(Y)}YX(v) = (-1)^{p(v)+p(X)}YX(v) = \hat{Y}X(v). \end{aligned}$$

Следовательно, в суперслучае систему (26) следует записывать с помощью операторов $\hat{Y}_i$ вместо Y_i (если $p(Y_i) = \bar{0}$, мы полагаем $\hat{Y}_i = Y_i$).

Наконец, если $d > 1$, то любое поле $X \in \mathfrak{g}$ полностью определяется своими производящими функциями F^i . Поэтому и уравнения (26) достаточно написать только на производящие функции.

ПРИМЕР 1. Глубина $d = 1$. Пусть $\mathfrak{g}_- = \mathfrak{g}_{-1}$ коммутативна. Тогда $\mathfrak{g} = (\mathfrak{g}_-)_* = \mathbf{vect}(n)$ в стандартной $\mathbb{Z}$ -градуировке (степень каждой переменной равна единице). Пусть $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{gl}(n) = \mathbf{vect}(n)_0$. Компонента $\mathbf{vect}(n)_1$ степени единица состоит, как известно, из двух неприводимых $\mathfrak{gl}(n)$ -модулей. Пусть

$$X = \sum a_{ij}^k x^i x^j \partial_k := \sum f^k(x) \partial_k. \quad (28)$$

Тогда эти подмодули имеют вид

$$\mathfrak{h}_{1(1)} := \text{Span} \left\{ x^i \sum_j x^j \partial_j \mid i = 1, \dots, n \right\}, \quad (29)$$

$$\mathfrak{h}_{1(2)} := \text{Span} \left\{ X = \sum_{j=1}^n d_{ij}^k x^i x^j \partial_k \mid d_{ii}^i + \sum_j d_{ij}^j = 0, \quad i = 1, \dots, n \right\}. \quad (30)$$

Выделим частичные продолжения $\mathfrak{h}_{*(i)} = (\mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{gl}(n) \oplus \mathfrak{h}_{1(i)})_*$, $i = 1, 2$, в алгебре $\mathbf{vect}(n)$ с помощью дифференциальных уравнений на функции $f^k(x)$, см. (28). В этом случае $X_i = Y_i = \partial_i$.

Условия на компоненту $\mathfrak{h}_{1(2)}$ можно немедленно представить в виде

$$\sum_j \partial_i \partial_j (f^j) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

или в эквивалентном виде

$$\partial_i \left(\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^j} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (31)$$

Это в точности система (26) на векторное поле $X \in \mathfrak{h}_{*(2)}$, переписанная в координатной форме. Ее можно переписать в хорошо известном виде

$$\sum_j \frac{\partial f^j}{\partial x^j} = \operatorname{div} X = \operatorname{const}.$$

Значит, $\mathfrak{h}_{*(2)} = \operatorname{der}(\mathfrak{svector}(n)) := \mathfrak{svector}(n) \oplus \mathbb{K}E$, где $E = \sum x^i \partial_i$, а $\mathfrak{svector}(n)$ – алгебра Ли бездивергентных векторных полей. Этот результат хорошо известен.

Теперь рассмотрим продолжение $\mathfrak{h}_{*(1)}$, которое, конечно, есть подалгебра $\mathfrak{sl}(n+1)$, вложенная в $\mathfrak{vector}(n)$. Представляя поле $X \in \mathfrak{h}_{1(1)}$ в виде

$$(c_1(x^1)^2 + c_2 x^1 x^2 + \dots + c_n x^1 x^n) \partial_1 + \dots + (c_1 x^1 x^n + c_2 x^2 x^n + \dots + c_n (x^n)^2) \partial_n,$$

мы сразу видим, что $d_{ij}^k = 0$, если $i \neq k$, $j \neq k$, а $d_{kk}^k = d_{ki}^i$ для всех $i \neq k$. Соответствующая система дифференциальных уравнений есть

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j} &= 0, & i, j &\neq k, \\ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^k}{(\partial x^k)^2} &= \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^i \partial x^k}, & i &\neq k. \end{aligned} \quad (32)$$

Суперизация. Для супералгебр, как мы уже видели, следует рассматривать композиции полей $Y_i = \partial_i$ с оператором четности, т.е. вместо частных производных ∂_i рассматривать операторы

$$\nabla_i(f) := (-1)^{p(f)p(\partial_i)} \partial_i(f).$$

Эти операторы ∇_i коммутируют (а не суперкоммутируют) с любым оператором $X_j = \partial_j$ из компоненты $\mathfrak{g}_{-1}$. Система (31) примет тогда вид

$$\nabla_i \left(\sum_j \nabla_j(f^j) \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

что, тем не менее, ведет к тому же условию $\operatorname{div} X = \operatorname{const}$. Это еще один способ увидеть, почему в координатном выражении для дивергенции в суперслучае должны появляться некоторые дополнительные знаки: уравнения (31) не выдерживают процедуры продолжения (2).

Учитывая, что

$$d_{ij}^k = -(-1)^{p(f^k)} \frac{\partial^2 f^k}{\partial x^i \partial x^j}, \quad d_{kk}^k = 0 \quad \text{для нечетных } x^k, \quad (33)$$

заключаем, что второе уравнение в (32) принимает в суперслучае вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f^k}{(\partial x^k)^2} &= (-1)^{p(x^i)p(f^i)+1} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^i \partial x^k} & \text{при } p(x^i) = \bar{0}, \quad i \neq k; \\ (-1)^{p(x^j)p(f^j)} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^j \partial x^k} &= (-1)^{p(x^i)p(f^i)} \frac{\partial^2 f^i}{\partial x^i \partial x^k} & \text{при } p(x^i) = \bar{0}, \quad i, j \neq k. \end{aligned} \quad (34)$$

Рассмотрим теперь несколько более или менее известных примеров и один новый пример (**кас**) глубины > 1 . Во всех них супералгебра Ли $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_{-2}$, $\dim \mathfrak{n}_{-1} = 2n|m$, $\dim \mathfrak{n}_{-2} = 1|0$, является алгеброй Гейзенберга. Это означает, что компонента $\mathfrak{n}_{-1}$ снабжена невырожденной суперкососимметрической билинейной формой ω , а скобка $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{n}_{-1} \times \mathfrak{n}_{-1} \rightarrow \mathfrak{n}_{-2}$ задается формулой $[x, y] = \omega(x, y)z$, где z – это фиксированный базисный элемент компоненты $\mathfrak{n}_{-2}$. Полным продолжением алгебры $\mathfrak{n}$ является супералгебра Ли $\mathfrak{k}(2n+1|m) = \bigoplus_{k \geq -2} \mathfrak{k}_k$ контактных векторных полей.

В примере 2 мы рассмотрим чисто четный случай ($m = 0$, n произвольно), а в примере 3 – специальный случай $n = 0$, $m = 6$, соответствующий вложению простой исключительной супералгебры Ли $\mathfrak{kas} \subset \mathfrak{k}(1|6)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_{-2}$ есть алгебра Гейзенберга, $\dim \mathfrak{n}_{-1} = 2n$, $\dim \mathfrak{n}_{-2} = 1$. Полное продолжение алгебры $\mathfrak{n}$ – это алгебра Ли $\mathfrak{k}(2n+1) = \bigoplus_{k \geq -2} \mathfrak{k}_k$ контактных векторных полей. Осуществляя вложение $\mathfrak{n}$ в векторные поля $\mathbf{vect}(2n+1) = \mathbf{vect}(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t)$ с градуировкой

$$\deg t = 2, \quad \deg p_i = \deg q_i = 1 \quad (35)$$

для всех i , мы можем в качестве X -векторов взять, например, поля

$$X_{q_i} = \partial_{q_i} + p_i \partial_t, \quad X_{p_i} = \partial_{p_i} - q_i \partial_t; \quad X_t = \partial_t.$$

Тогда $\mathfrak{g}_- = \text{Span}\{X_{p_1}, \dots, X_{p_n}, X_{q_1}, \dots, X_{q_n}, X_t\}$, а контактные векторные поля сохраняют распределение $\mathcal{D}$, выделяемое уравнением Пфаффа $\alpha(X) = 0$ на векторное поле X , где $\alpha = dt + \sum_i (p_i dq_i - q_i dp_i)$. Y -векторы имеют вид

$$Y_{q_i} = \partial_{q_i} - p_i \partial_t, \quad Y_{p_i} = \partial_{p_i} + q_i \partial_t; \quad Y_t = \partial_t.$$

В данном частном случае контактное векторное поле K определяется единственной производящей функцией F , которая есть не что иное, как коэффициент при Y_t в разложении поля K по базису Y , и никаких ограничений на функцию F нет. Вводя обозначение $F = 2f$ и решая уравнения (18), мы получаем формулу для произвольного контактного векторного поля K_f :

$$\begin{aligned} K_f &= 2fY_t + \sum_i (Y_{p_i}(f)Y_{q_i} - Y_{q_i}(f)Y_{p_i}) = \\ &= (2 - E)(f)\partial_t + \frac{\partial f}{\partial t}E + \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \partial_{q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \partial_{p_i} \right), \end{aligned} \quad (36)$$

где $E = \sum_i (p_i \partial_{p_i} + q_i \partial_{q_i})$. Это в точности стандартная формула для контактного векторного поля с производящей функцией f . В дальнейшем мы используем реализацию алгебры $\mathfrak{k}(2n+1)$ в производящих функциях f .

Если $\mathfrak{h}_0 \neq \mathfrak{k}_0$, то компонента $\mathfrak{h}_0$ является определяющей. Компонента $\mathfrak{k}_0$ порождается однородными многочленами второй степени в градуировке (35) от переменных p, q, t . Следовательно, в качестве базиса Z в $\mathfrak{k}_0$ можно взять мономы $p_i p_j, q_i q_j, p_i q_j$ и t , а в качестве базиса Z^* в двойственном пространстве – операторы

$$Y_{p_i} Y_{p_j}, \quad Y_{q_i} Y_{q_j}, \quad Y_{p_i} Y_{q_j} \quad \text{при } i \neq j; \quad \frac{1}{2}(Y_{p_i} Y_{q_i} + Y_{q_i} Y_{p_i}), \quad Y_t.$$

Чтобы описать полное продолжение подалгебры $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{h}_0$, нужно выделить подпространство $\mathfrak{h}_0$ в $\mathfrak{k}_0$ с помощью условий, сформулированных в терминах линейных уравнений на коэффициенты элементов $\mathfrak{h}_0$ в базисе Z , а затем переписать эти уравнения в терминах Z^* .

Если, например, $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{sp}(2n)$, то производящие функции не зависят от t , и это означает, что $Y_t(f) = 0$. Это уравнение выделяет в алгебре $\mathfrak{k}(2n+1)$ пуассонову подалгебру $\mathfrak{po}(2n)$.

Если же $\mathfrak{h}_0 = \mathbb{C} \cdot \text{id}$, то производящие функции f имеют нулевые коэффициенты при всех базисных мономах, кроме t , что эквивалентно системе уравнений

$$\begin{aligned} Y_{p_i} Y_{p_j}(f) &= 0, & Y_{q_i} Y_{q_j}(f) &= 0, & Y_{p_i} Y_{q_j}(f) &= 0, & i \neq j; \\ (Y_{p_i} Y_{q_i} + Y_{q_i} Y_{p_i})(f) &= 0. \end{aligned} \quad (37)$$

При $i \neq j$ из этих уравнений получаем

$$Y_{q_i} Y_{p_i} Y_{p_j}(f) - Y_{p_i} Y_{q_i} Y_{p_j}(f) = Y_t Y_{p_j}(f) = Y_{p_j}(Y_t(f)) = 0.$$

Аналогично можно показать, что $Y_{q_j}(Y_t(f)) = 0$, а тогда $Y_t(Y_t(f)) = 0$, и поэтому все частные производные функции $Y_t(f)$ равны нулю, а функция $Y_t(f)$ постоянна. Тогда $f = ct + f_0(p, q)$, причем $\deg_{p,q} f_0 \leq 1$ в силу (37). Стало быть, все продолжение алгебры $\mathfrak{g}_- \oplus \mathfrak{g}_0$ тривиально (совпадает с ней самой).

Пусть теперь $\mathfrak{h}_0 = \mathfrak{k}_0$ и $\mathfrak{h}_1 \subset \mathfrak{k}_1$. Будучи $\mathfrak{k}_0$ -модулем, компонента $\mathfrak{k}_1$ разлагается в прямую сумму двух $\mathfrak{g}_0$ -инвариантных подпространств над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ (для $\text{char } \mathbb{K} = 3$, а в суперслучае даже над $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, ситуация более сложная): подпространства W_1 , натянутого на мономы степени три от p_i и q_j , и подпространства W_2 , натянутого на мономы вида tp_i и tq_j . Двойственный базис составляют соответственно симметрические многочлены третьей степени от операторов Y_{p_i} и Y_{q_j} и операторы $Y_t Y_{p_i}$, $Y_t Y_{q_j}$.

Таким образом, подпространство W_1 определяется условиями

$$Y_{p_j} Y_t(f) = Y_{q_j} Y_t(f) = 0 \implies Y_t(f) = \text{const},$$

которые выделяют из контактной алгебры $\mathfrak{k}(2n+1)$ алгебру дифференцирований пуассоновой алгебры $\text{det}(\mathfrak{po}(2n)) = \mathfrak{po}(2n) \oplus \mathbb{C}K_t$.

Подпространство W_2 определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} Y_{p_i} Y_{p_j} Y_{p_k}(f) &= 0, & Y_{q_i} Y_{q_j} Y_{q_k}(f) &= 0, \\ Y_{p_i} Y_{p_j} Y_{q_k}(f) &= 0, & Y_{p_k} Y_{q_i} Y_{q_j}(f) &= 0, & k \neq i, j; \\ Y_{p_i}(Y_{p_j} Y_{q_j} + Y_{q_j} Y_{p_j})(f) &= 0, & Y_{q_i}(Y_{p_j} Y_{q_j} + Y_{q_j} Y_{p_j})(f) &= 0, & i \neq j; \\ (Y_{p_i}^2 Y_{q_i} + Y_{p_i} Y_{q_i} Y_{p_i} + Y_{q_i} Y_{p_i}^2)(f) &= 0, \\ (Y_{q_i}^2 Y_{p_i} + Y_{q_i} Y_{p_i} Y_{q_i} + Y_{p_i} Y_{q_i}^2)(f) &= 0, \end{aligned} \quad (38)$$

из которой следует, что функция $Y_t(f)$ удовлетворяет уравнениям (37), и, стало быть,

$$\frac{\partial f}{\partial t} \in \text{Span}\{1, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t\},$$

тогда как

$$f \in \text{Span}\{1, p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t, tp_1, \dots, tp_n, tq_1, \dots, tq_n, t^2\}.$$

Следовательно, частичное продолжение $(\mathfrak{k}_- \oplus \mathfrak{k}_0 \oplus W_2)_*$ изоморфно $\mathfrak{sp}(2n+2)$.

ПРИМЕР 3. Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_{-1} \oplus \mathfrak{n}_{-2}$ – супералгебра Гейзенберга $\mathfrak{hei}(1|6)$, $\dim \mathfrak{n}_{-1} = 0|6$, $\dim \mathfrak{n}_{-2} = 1|0$. Полным продолжением алгебры $\mathfrak{n}$ является контактная супералгебра $\mathfrak{g} = \mathfrak{k}(1|6)$ с нулевой компонентой $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{co}(6)$. Компонента $\mathfrak{g}_1$ при этом состоит из трех неприводимых $\mathfrak{g}_0$ -модулей.

Если мы рассмотрим супералгебру $\mathfrak{k}(1|6)$, реализованную производящими функциями от $t, \theta_1, \dots, \theta_6$, т.е. случай

$$K_f = (2 - E)(f)\partial_t + \frac{\partial f}{\partial t}E - (-1)^{p(f)} \sum_i \frac{\partial f}{\partial \theta_i} \partial_{\theta_i}, \quad f \in \mathbb{C}[t, \theta_1, \dots, \theta_6],$$

где $E = \sum_i \theta_i \partial_{\theta_i}$ и $\{\theta_i, \theta_j\}_{k.b.} = \delta_{ij}$, то $\mathfrak{g}_1 \simeq t\Lambda(\theta) \oplus \Lambda^3(\theta) = t\Lambda(\theta) \oplus \mathfrak{g}_1^+ \oplus \mathfrak{g}_1^-$, где подмодули $\mathfrak{g}_1^\pm \subset \Lambda^3(\theta)$ выделяются с помощью звездочки Ходжа:

$$\mathfrak{g}_1^\pm = \{f \in \Lambda^3(\theta) \mid f^* = \pm \sqrt{-1}f\}. \quad (39)$$

Напомним, что двойственность Ходжа $*$ есть не что иное, как преобразование Фурье от нечетных переменных, причем t рассматривается как параметр:

$$*: f(\xi, t) \mapsto f^*(\eta, t) = \int e^{\sum \eta_i \xi_i} f(\xi, t) \text{vol}(\xi).$$

Исключительная простая супералгебра Ли $\mathfrak{fas}$ определяется [7], [14] как частичное продолжение алгебры $\mathfrak{h} = \bigoplus_{k=-2}^1 \mathfrak{h}_k$, где $\mathfrak{h}_k = \mathfrak{k}(1|6)_k$ при $-2 \leq k \leq 0$ и $\mathfrak{h}_1 = t\Lambda(\theta) \oplus \mathfrak{g}_1^+$. Следовательно, $\mathfrak{h}_1$ является определяющей компонентой.

При этом

$$\begin{aligned} X_i &= \partial_{\theta_i} + \theta_i \partial_t, & i &= 1, \dots, 6; & X_7 &= \partial_t; \\ Y_i &= \partial_{\theta_i} - \theta_i \partial_t, & i &= 1, \dots, 6; & Y_7 &= X_7. \end{aligned}$$

Пусть $I = \{i_1, i_2, i_3\} \subset \{1, \dots, 6\}$ – упорядоченный набор индексов, $I^* = \{j_1, j_2, j_3\}$ – двойственный ему набор индексов (другими словами, $\{I, I^*\}$ – четная перестановка индексов $\{1, \dots, 6\}$). Положим $Y_I = Y_{i_1} Y_{i_2} Y_{i_3}$, $Y_{I^*} = Y_{j_1} Y_{j_2} Y_{j_3}$ и определим $\Delta_{Y_I}: \mathbb{C}[t, \theta] \rightarrow \mathbb{C}[t, \theta]$ уравнениями

$$\Delta_{Y_I}(f) = (-1)^{p(f)} Y_{I^*}(f).$$

Заметим, что $\Delta_{Y_I}(t\theta_s) = 0$ для любых $s = 1, \dots, 6$. Следовательно, $\mathfrak{h}_1$ можно выделить из компоненты $\mathfrak{k}(1|6)_1$ следующими десятью уравнениями, параметризованными разбиениями (I, I^*) множества $\{1, \dots, 6\}$, образующими четную подстановку:

$$(\Delta_{Y_I} - \sqrt{-1}\Delta_{Y_{I^*}})(f) = 0. \quad (40)$$

Ясно, что эта система эквивалентна системе $(Y_I - \sqrt{-1}Y_{I^*})(f) = 0$. Решения последней системы образуют подпространство в пространстве производящих функций, натянутое на следующие функции:

$$\begin{aligned} f(t) - \sqrt{-1}f'''(t)1^*, & \quad f_j(t)\theta_j - \sqrt{-1}f_j''(t)\theta_j^*, \\ f_{jk}(t)\theta_j\theta_k - \sqrt{-1}f'_{jk}(t)(\theta_j\theta_k)^*, & \quad f_{jkl}(t)(\theta_j\theta_k\theta_l - \sqrt{-1}(\theta_j\theta_k\theta_l)^*). \end{aligned} \quad (41)$$

В формулах (41) j, k, l – различные индексы от 1 до 6. Это описание согласуется с формулами из работы [14].

Благодарности. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 05-01-00001). Автор выражает глубокую благодарность Д. А. Лейтесу за стимулирование написания данной работы и чрезвычайно полезные замечания.

Список литературы

- [1] É. Cartan, *Leipziger Berichte*, **XLV** (1893), 395–420; “Über die Einfachen Transformationsgruppen.”, *Œuvres complètes. Partie I. Groups de Lie* (Reprinted, 2nd ed.), Éditions du Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS), Paris, 1984, 107–132.
- [2] P. Grozman, D. Leites, *Lett. Math. Phys.*, **74**:3 (2005), 229–262; [math.RT/0509400](#).
- [3] P. Grozman, *SuperLie*, <http://www.equaonline.com/math/SuperLie>.
- [4] Q.-Y. Fei, G.-Y. Shen, *J. Algebra*, **152** (1992), 439–453.
- [5] K. Yamaguchi, “Differential systems associated with simple graded Lie algebras”, *Progress in Differential Geometry*, Adv. Stud. Pure Math., **22**, ed. K. Shiohama, Kinokunia, Tokyo, 1993, 413–494.
- [6] И. М. Щепочкина, *Функц. анализ и его прилож.*, **33**:3 (1999), 59–72; I. Shchepochkina, G. Post, *Internat. J. Algebra Comput.*, **8**:4 (1998), 479–495.
- [7] I. Shchepochkina, *Represent. Theory*, **3** (1999), 373–415; [hep-th 9702121](#).
- [8] T. Larsson, *Structures preserved by consistently graded Lie superalgebras*, [math-ph/0106004](#).
- [9] T. Larsson, *Structures preserved by exceptional Lie algebras*, [math-ph/0301006](#).
- [10] Ч. Бурдик, П. Грозман, Д. Лейтес, А. Сергеев, *ТМФ*, **142**:2 (2000), 227–238.
- [11] V. Molotkov, *Explicit realization of induced and coinduced modules over Lie superalgebras by differential operators*, [math.RT/0509105](#).
- [12] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко, *Современная геометрия. Методы и приложения*, Наука, М., 1979.
- [13] С. Стернберг, *Лекции по дифференциальной геометрии*, Мир, М., 1970.
- [14] S.-J. Cheng, V. G. Kac, *Commun. Math. Phys.*, **186**:1 (1997), 219–231.

Поступила в редакцию 21.IX.2005 г.,
после доработки 8.XII.2005 г.