Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Карташова, Иерархия обобщенных инвариантов для линейных дифференциальных операторов в частных производных, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 3, 470–478

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1988>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:47:43

© 2006 г.

Е. А. Карташова*

ИЕРАРХИЯ ОБОБЩЕННЫХ ИНВАРИАНТОВ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Изучаются инварианты линейных дифференциальных операторов от двух переменных под действием гейдж-преобразований. С использованием результатов факторизации Билса–Карташовой построена иерархия обобщенных инвариантов для операторов произвольного порядка. Изучены свойства этих инвариантов и рассмотрены несколько примеров. Показано также, что классические инварианты Лапласа соответствуют частным случаям обобщенных инвариантов.

Ключевые слова: линейный дифференциальный оператор в частных производных, факторизация Билса–Карташовой, обобщенный инвариант, иерархия инвариантов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Инварианты Лапласа $\hat{a} = c - ab - a_x$ и $\hat{b} = c - ab - b_y$, введенные для гиперболического оператора второго порядка

$$\partial_x \partial_y + a \partial_x + b \partial_y + c, \quad (1)$$

хорошо известны и изучались многими исследователями (см., например, статью [1] и библиографию в ней). Их важность определяется следующей классической теоремой.

ТЕОРЕМА. *Два оператора вида (1) эквивалентны под действием гейдж-преобразований тогда и только тогда, когда их инварианты Лапласа попарно совпадают.*

Эти инварианты широко используются в теории интегрируемости (см. работы [2] и др.). Очевидно, инварианты Лапласа можно рассматривать как “остатки” от факторизации оператора (1):

$$\partial_x \partial_y + a \partial_x + b \partial_y + c = \begin{cases} (\partial_x + b)(\partial_y + a) - ab - a_x + c, \\ (\partial_y + a)(\partial_x + b) - ab - b_y + c, \end{cases} \quad (2)$$

*J. Kepler University, Linz, Austria. E-mail: lena@risc.uni-linz.ac.at

и такое представление является первым шагом преобразований Дарбу–Лапласа, используемых для нахождения решения нефакторизуемого линейного дифференциального уравнения в частных производных от двух независимых переменных.

Для того чтобы обобщить конструкцию инвариантов на случай оператора произвольного порядка, необходим алгоритм факторизации такого оператора. В последнее время были опубликованы два алгоритма факторизации для линейных дифференциальных операторов произвольного порядка от двух переменных. В работе [3] представлен алгоритм факторизации, который называется *спуском Гензеля*, является модификацией хорошо известного алгоритма – подъема Гензеля (см., например, [4]) и позволяет факторизовать операторы из кольца $D = \mathbb{Q}(x, y)[\partial_x, \partial_y]$. В работе [5] представлена *абсолютная* факторизация операторов, коэффициенты которых являются произвольными гладкими функциями двух переменных. Идея связать этот метод (называемый теперь факторизацией Билса–Карташовой, или БК-факторизацией) с преобразованиями Дарбу–Лапласа вкратце обсуждалась в работе [6].

В настоящей работе мы строим обобщенные инварианты, используя БК-факторизацию, которую можно представить следующим образом. Задача факторизации рассматривается в виде

$$A_n = \sum_{j+k \leq n} a_{jk} \partial_x^j \partial_y^k = (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3) \sum_{j+k < n} p_{jk} \partial_x^k \partial_y^j, \quad (3)$$

причем предполагается, что $a_{n0} \neq 0$ (локально) и без потери общности $a_{n0} = 1$. Показано, что для любого простого корня ω характеристического многочлена

$$A(\omega) = \sum_{k=0}^n a_{n-k,k} \omega^{n-k}$$

с $n \geq 2$ существует единственная факторизация вида (3):

$$A = LB + C, \quad L = \partial_x - \omega \partial_y + p, \quad C = \sum_{j=1}^{n-2} c_j \partial_y^j, \quad (4)$$

и условия факторизации выписаны в явном виде. В разделе 2 мы используем эти результаты для построения обобщенных инвариантов произвольного линейного дифференциального оператора в частных производных и изучаем некоторые их свойства, а в разделе 3 описана вся иерархия этих инвариантов. В разделе 4 даны несколько полезных примеров. В частности, показано, что оба инварианта Лапласа могут быть построены как простой частный случай обобщенных инвариантов. В разделе 5 кратко обсуждаются полученные результаты.

2. ОБОБЩЕННЫЕ ИНВАРИАНТЫ И СЕМИИНВАРИАНТЫ

Условия факторизации, полученные в результате БК-факторизации, имеют следующий вид. Для оператора второго порядка

$$A_2 = \sum_{j+k \leq 2} a_{jk} \partial_x^j \partial_y^k = (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)(p_4 \partial_x + p_5 \partial_y + p_6)$$

имеется единственное условие

$$a_{00} = L(p_6) + p_3 p_6; \quad (5)$$

для оператора третьего порядка

$$A_3 = \sum_{j+k \leq 3} a_{jk} \partial_x^j \partial_y^k = (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)(p_4 \partial_x^2 + p_5 \partial_x \partial_y + p_6 \partial_y^2 + p_7 \partial_x + p_8 \partial_y + p_9)$$

имеется два условия:

$$\begin{aligned} a_{01} &= L(p_8) + p_3 p_8 + p_2 p_9, \\ a_{00} &= L(p_9) + p_3 p_9 \end{aligned} \quad (6)$$

и т.д. для произвольного порядка n . Таким образом, мы можем выписать в явном виде представление оператора, характеристический многочлен которого имеет по крайней мере один простой корень в виде факторизации с остатком:

$$A_2 = (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)(p_4 \partial_x + p_5 \partial_y + p_6) - l_2,$$

где остаток $l_2 = a_{00} - L(p_6) + p_3 p_6$;

$$A_3 = (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)(p_4 \partial_x^2 + p_5 \partial_x \partial_y + p_6 \partial_y^2 + p_7 \partial_x + p_8 \partial_y + p_9) - l_3 \partial_y - l_{31}$$

с двумя остатками $l_3 = a_{01} - (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)p_8 - p_2 p_9$ и $l_{31} = a_{00} - (p_1 \partial_x + p_2 \partial_y + p_3)p_9$ и т.д. для оператора произвольного порядка.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Операторы A , $\tilde{A}$ называются эквивалентными, если существует гейдж-преобразование, переводящее один в другой:

$$\tilde{A}g = e^{-\varphi} A(e^{\varphi} g) \equiv A_{\varphi} g.$$

Заметим, что

$$(\partial_x)_{\varphi} = \partial_x + \varphi_x, \quad (\partial_y)_{\varphi} = \partial_y + \varphi_y,$$

и гейдж-преобразование есть автоморфизм алгебр. Следовательно, A и A_{φ} имеют один и тот же характеристический многочлен и факторизация (4) сохраняется:

$$A_{\varphi} = L_{\varphi} B_{\varphi} + C_{\varphi}.$$

Отсюда следует, что характеристический многочлен и старший ненулевой коэффициент остаточного члена являются инвариантами. Число остатков меняется в зависимости от порядка оператора, и их свойства также могут быть различными. Чтобы это продемонстрировать, сформулируем следующую лемму.

ЛЕММА 1. Для оператора порядка 2 его остаток l_2 является инвариантом под действием преобразования эквивалентности, т.е.

$$\tilde{l}_2 = l_2.$$

Для оператора порядка 3 его остаток l_3 является инвариантом, т.е.

$$\tilde{l}_3 = l_3,$$

в то время как остаток l_{31} меняет форму следующим образом:

$$\tilde{l}_{31} = l_{31} + l_3 \varphi_y.$$

Введя обозначения $A_{2a} = A_{2p} - l_2$, $A_{3a} = A_{3p} - l_3 \partial_y - l_{31}$, $f = e^\varphi$, получаем

$$\tilde{A}_{2a} = f^{-1} A_{2a} \circ f = f^{-1} (A_{2p} - l_2) \circ f = \tilde{A}_{2p} - f^{-1} (l_2) \circ f = \tilde{A}_{2p} - l_2$$

и

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{3a} &= f^{-1} A_{3a} \circ f = f^{-1} (A_{3p} - l_3 \partial_y - l_{31}) \circ f = \\ &= \tilde{A}_{3p} - f^{-1} (l_{31} + l_3 \partial_y) \circ f = \tilde{A}_{3p} - l_3 \partial_y - l_3 \varphi_y - l_{31}. \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Если $l_3 = 0$, то l_{31} становится инвариантом.

По этой причине далее мы называем l_{31} семиинвариантом.

СЛЕДСТВИЕ 2. Для $l_3 \neq 0$ всегда возможно выбрать некоторую функцию f такую, что $\tilde{l}_{31} = l_3 \varphi_y + l_{31} = 0$.

Заметим, что если у оператора второго порядка его инвариант $l_2 = 0$, то оператор можно факторизовать, в то время как в случае оператора третьего порядка оба его инварианта должны быть равны нулю: $l_3 = l_{31} = 0$. С другой стороны, если оператор третьего порядка не факторизуется, то его всегда можно рассматривать как оператор с единственным ненулевым инвариантом. И, естественно, все это остается верным для каждого корня характеристического многочлена, так что одно выражение (скажем, для l_3) порождает три инварианта в случае трех простых корней соответствующего многочлена.

3. ИЕРАРХИЯ ИНВАРИАНТОВ

Как было показано выше, каждый обобщенный инвариант является функцией простого корня ω характеристического многочлена, и каждый простой корень порождает один инвариант. Это означает, что для оператора порядка n мы можем получить не более чем n различных инвариантов. Вспоминая, что БК-факторизация в этом случае дает нам один оператор первого порядка и один оператор порядка $n - 1$, поставим следующий вопрос: являются ли обобщенные инварианты оператора порядка $n - 1$ также и инвариантами соответствующего оператора порядка n ?

Рассмотрим, к примеру, оператор порядка 3:

$$A_{3a} = A_1 A_{2a} - l_3 \partial_y - l_{31} = A_1 (A_{2p} - l_2) - l_3 \partial_y - l_{31} = A_1 A_{2p} - l_2 A_1 - l_3 \partial_y - l_{31},$$

$$\tilde{A}_{3a} = A_1 A_{2p} - l_2 A_1 - l_3 \partial_y - l_{31} = \tilde{A}_1 \tilde{A}_{2p} - l_2 \tilde{A}_1 - l_3 \partial_y - \tilde{l}_{31},$$

т.е. l_2 является также инвариантом оператора A_{3a} . Заметим, что обобщенный инвариант $l_3 = l_3(\omega^{(3)})$ является функцией простого корня $\omega^{(3)}$ многочлена

$$\mathcal{P}_3(z) = a_{30}z^3 + a_{21}z^2 + a_{12}z + a_{03},$$

в то время как обобщенный инвариант $l_2 = l_2(\omega^{(2)})$ есть функция простого корня $\omega^{(2)}$ многочлена

$$\mathcal{R}_2(z) = p_4z^2 + p_5z + p_6,$$

и p_4, p_5, p_6 задаются явно для выбранного $\omega = \omega^{(3)}$. В случае, если оба многочлена $\mathcal{P}_3(z)$ и $\mathcal{R}_2(z)$ имеют все простые корни, мы получим максимальное количество обобщенных инвариантов, а именно 6. Повторяя эту процедуру для оператора порядка n , мы получим максимально $n!$ обобщенных инвариантов. Таким образом, для оператора произвольного порядка n мы можем построить иерархию его инвариантов

$$l_n, l_{n-1}, \dots, l_2,$$

и их явная форма задается БК-факторизацией. Что же касается семиинвариантов, то заметим, что оператор произвольного порядка n всегда можно переписать как факторизацию с остатками вида

$$l_n \partial_x^k + l_{n,1} \partial_x^{k-1} + \dots + l_{n,k-1}, \quad k < n,$$

и явные выражения для l_i заданы БК-факторизацией. Те же рассуждения показывают, что l_n всегда является обобщенным инвариантом, а каждый $l_{n,k-i_0}$ является i_0 -м семиинвариантом, т.е. становится инвариантом в случае $l_{n,k-i} = 0$ при любом $i < i_0$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим гиперболический оператор третьего порядка вида

$$C = a_{30} \partial_x^3 + a_{21} \partial_x^2 \partial_y + a_{12} \partial_x \partial_y^2 + a_{03} \partial_y^3 + \text{члены низшего порядка} \quad (7)$$

с постоянными коэффициентами при высших производных, т.е. $a_{ij} = \text{const}$ при всех $i + j = 3$, и пусть все корни характеристического многочлена

$$a_{30}\omega^3 + a_{21}\omega^2 + a_{12}\omega + a_{03} = \mathcal{P}_3(\omega)$$

являются простыми и действительными. Тогда три простых независимых обобщенных инварианта можно построить следующим образом. Заметим прежде всего, что в этом случае высшие члены уравнения (7) можно переписать в виде

$$(\alpha_1 \partial_x + \beta_1 \partial_y)(\alpha_2 \partial_x + \beta_2 \partial_y)(\alpha_3 \partial_x + \beta_3 \partial_y)$$

для непропорциональных α_j , β_i , и после подходящей замены переменных это выражение легко преобразуется к виду $\partial_x \partial_y (\partial_x + \partial_y)$.

Введем обозначения $\partial_1 = \partial_x$, $\partial_2 = \partial_y$, $\partial_3 = \partial_1 + \partial_2 = \partial_t$; тогда все члены третьего и второго порядка переписутся как

$$C_{ijk} = (\partial_i + a_i)(\partial_j + a_j)(\partial_k + a_k) = \partial_i \partial_j \partial_k + a_k \partial_i \partial_j + a_j \partial_i \partial_k + a_i \partial_j \partial_k + \\ + (\partial_j + a_j)(a_k) \partial_i + (\partial_i + a_i)(a_k) \partial_j + (\partial_i + a_i)(a_j) \partial_k + (\partial_i + a_i)(\partial_j + a_j)(a_k),$$

где

$$a_{20} = a_2, \quad a_{02} = a_1, \quad a_{11} = a_1 + a_2 + a_3$$

и $c_{ijk} = C - C_{ijk}$ является оператором первого порядка, который можно выписать явно. Как уже было показано, коэффициенты c_{ijk} перед первыми производными являются (семи)инвариантами и, следовательно, любая линейная комбинация инвариантов сама является инвариантом. Прямые вычисления дают три простейших обобщенных инварианта первоначального оператора C :

$$l_{21} = a_{2,x} - a_{1,y}, \quad l_{32} = a_{3,y} - a_{2,t}, \quad l_{31} = a_{3,x} - a_{1,t}.$$

ЛЕММА 2. *Обобщенные инварианты l_{21} , l_{32} , l_{31} одновременно равны нулю тогда и только тогда, когда оператор C эквивалентен оператору*

$$L = \partial_1 \partial_2 \partial_3 + b_1 \partial_1 + b_2 \partial_2 + c, \quad (8)$$

т.е. существует функция f такая, что $f^{-1}C \circ f = L$.

Очевидно, что

$$f^{-1}(\partial_x \partial_y \partial_t) \circ f = (\partial_x + (\ln f)_x)(\partial_y + (\ln f)_y)(\partial_t + (\ln f)_t)$$

для любой гладкой функции f . Заметим, что это есть форма оператора C_{ijk} , и введем функцию f так, что

$$a_1 = (\ln f)_x, \quad a_2 = (\ln f)_y, \quad a_3 = (\ln f)_t.$$

Эта система уравнений для функции f является переопределенной и имеет решение f_0 тогда и только тогда, когда

$$a_{2,x} - a_{1,y} = 0, \quad a_{3,y} - a_{2,t} = 0, \quad a_{3,x} - a_{1,t} = 0, \quad (9)$$

т.е. $l_{21} = l_{32} = l_{31} = 0$.

Наоборот, если C эквивалентен оператору (8), то $a_{20} = a_{02} = a_{11} = 0$ и, очевидно,

$$l_{21} = l_{32} = l_{31} = 0.$$

Заметим, что утверждение леммы 1 слабее, чем приведенная во введении теорема.

ПРИМЕР 2. Два первых уравнения системы (9) задают решение единственным образом с точностью до константы и, таким образом, определяют

$$\partial_3 f = (\partial_1 + \partial_2)f = a_1 + a_2.$$

Однако условия совместности выполняются, если $\partial_2 a_1 = \partial_1 a_2$ и $a_3 = a_1 + a_2 + c$ для некоторой константы c . В общем случае условия совместности означают только, что два уравнения системы (9) выполняются, но третье уравнение может выполняться за счет константы. К примеру, два оператора с постоянными коэффициентами

$$\partial_x \partial_y (\partial_x + \partial_y), \quad \partial_x \partial_y (\partial_x + \partial_y + 1)$$

имеют одни и те же обобщенные инварианты (нулевые), но не эквивалентны.

4. ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ

ПРИМЕР 3. Рассмотрим гиперболический оператор вида

$$\partial_{xx} - \partial_{yy} + a_{10}\partial_x + a_{01}\partial_y + a_{00} \quad (10)$$

с $a_{20} = 1$, $a_{11} = 0$, $a_{02} = -1$ и $\omega = \pm 1$, $\mathcal{L} = \partial_x - \omega \partial_y$. Тогда l_2 имеет вид

$$l_2 = a_{00} - \mathcal{L} \left(\frac{\omega a_{10} - a_{01}}{2\omega} \right) - \frac{\omega a_{10} - a_{01}}{2\omega} \frac{\omega a_{10} + a_{01}}{2\omega},$$

что дает, к примеру, для корня $\omega = 1$

$$l_2 = a_{00} - \mathcal{L} \left(\frac{a_{10} - a_{01}}{2} \right) - \frac{a_{10}^2 - a_{01}^2}{4} = a_{00} - (\partial_x - \partial_y) \left(\frac{a_{10} - a_{01}}{2} \right) - \frac{a_{10}^2 - a_{01}^2}{4},$$

и после очевидной замены переменных в выражении (10) мы получаем первый инвариант Лапласа $\hat{a}$:

$$l_2 = c - \partial_{\bar{x}} a - ab = \hat{a},$$

где

$$a = \frac{a_{10} - a_{01}}{2}, \quad b = \frac{a_{10} + a_{01}}{2}, \quad c = a_{00}.$$

Выбор второго корня ($\omega = -1$) дает второй инвариант Лапласа $\hat{b}$, т.е. инварианты Лапласа являются частными случаями обобщенных инвариантов, соответствующими специальному выбору ω .

ПРИМЕР 4. Аналогично для эллиптического оператора

$$\partial_{xx} + \partial_{yy} + a_{10}\partial_x + a_{01}\partial_y + a_{00}, \quad (11)$$

тогда $\omega = \pm i$, $\mathcal{L} = \partial_x - \omega \partial_y$ и

$$l_2 = a_{00} + (\partial_x \mp i \partial_y) \left(\frac{\pm a_{10} + a_{01} i}{2} \right) + i \frac{a_{10}^2 + a_{01}^2}{4},$$

где выбор верхних знаков соответствует выбору корня $\omega = i$, а выбор нижних знаков – выбору $\omega = -i$.

ПРИМЕР 5. Рассмотрим оператор третьего порядка

$$B = \partial_x^2 \partial_y + \partial_x \partial_y^2 + a_{11} \partial_x \partial_y + a_{10} \partial_x + a_{01} \partial_y + a_{00}, \quad (12)$$

где $a_{30} = a_{03} = a_{20} = a_{02} = 0$, $a_{21} = a_{12} = 1$, а все остальные коэффициенты являются функциями x, y . Тогда (семи)инварианты

$$l_3 = \partial_x a_{11} - a_{01}, \quad l_{31} = \partial_x a_{10} - a_{00}$$

имеют простую форму и немедленно дают нам много информации о свойствах операторов вида (12): например, такие операторы факторизуются, т.е. имеют нулевые инварианты $l_3 = l_{31} = 0$, тогда и только тогда, когда

$$a_{11} = \int a_{01} dx + f_1(y), \quad a_{10} = \int a_{00} dx + f_2(y),$$

где $f_1(y)$ и $f_2(y)$ – произвольные функции.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Теперь, когда построение инвариантов Лапласа обобщено на случай линейного оператора в частных производных произвольного порядка и произвольного типа, следующим очевидным шагом будет обобщение преобразований Дарбу–Лапласа на этот класс операторов, построение обобщенной решетки Тоды и т.д. Это потребует глубокого изучения специальных свойств обобщенных инвариантов. Например, начиная с оператора порядка 4 максимальное число инвариантов больше, чем число коэффициентов данного оператора:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} < n!$$

для всех $n > 3$. Это означает, что обобщенные инварианты зависимы, и очень непростой задачей является извлечение подмножества независимых инвариантов, т.е. построение базиса в конечном пространстве инвариантов. Другим важным шагом стало бы построение такого подмножества, которое давало бы полный аналог приведенной во введении теоремы для операторов произвольного порядка.

Уже в случае трех переменных проблема факторизации соответствующего оператора и построение его инвариантов становится более сложной даже при постоянных коэффициентах. Причина в том, что в случае двух переменных достаточно просто факторизовать многочлен, соответствующий старшим членам оператора, что всегда возможно над $\mathbb{C}$. Для случая более чем двух независимых переменных это не так, и легко построить контрпример.

ПРИМЕР 6. Многочлен

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - zy)$$

факторизуется, но легко доказать, что $x^3 + y^3 + z^3$ не делится на линейный многочлен

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$$

для произвольных комплексных коэффициентов $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Таким образом, необходимо найти нетривиальные условия факторизации многочленов от более чем двух переменных.

Благодарности. Автор благодарит Austrian Science Foundation (FWF) за поддержку в рамках проекта SFB F013/F1304. Автор также благодарен проф. А. Б. Шабату за полезные обсуждения во время написания этой работы и проф. С. П. Цареву, который заметил, в частности, что построенная иерархия инвариантов может рассматриваться как аналог классической решетки Тоды. Автор также благодарит неизвестного рецензента и проф. Р. Билса за существенную помощь во время подготовки последнего варианта этой статьи.

Список литературы

- [1] А. Б. Шабат, *ТМФ*, **103**:1 (1995), 170–175.
- [2] L. Bianchi, *Lezioni di Geometria Differenziale*, Zanichelli, Bologna, 1924; А. Н. Лезнов, М. В. Савельев, *Групповые методы интегрирования нелинейных динамических систем*, Наука, М., 1985; S. P. Tsarev, “An algorithm for complete enumeration of all factorizations of a linear ordinary differential operator”, *Proc. of the Int. Symp. on Symbolic and Algebraic Computation (ISSAC’96) (Zurich, Switzerland, July 24–26, 1996)*, ed. Y. N. Lakshman, ACM Press, N.Y., 1996, 226–231; S. P. Tsarev, “Factorization of linear partial differential operators and Darboux integrability of nonlinear PDEs”, *Poster at ISSAC’98 (Rostock, Germany, August 13–15, 1998)*, 1998; *cs.SC/9811002*; G. Tzitzeica, *Compt. Rend. Acad. Sci.*, **150** (1910), 955–956; 971–974.
- [3] D. Grigoriev, F. Schwarz, *J. Comput.*, **73** (2004), 179–197.
- [4] E. Kaltofen, “Factorization of polynomials”, *Computing (Archive vor Informatics and Numerical Computation)*, eds. B. Buchberger, G. E. Collins and R. Loos, Springer, Wien, 1982, 95–113.
- [5] Р. Билс, Е. А. Карташова, *ТМФ*, **145** (2005), 165–180.
- [6] E. Kartashova, “BK-factorization and Darboux–Laplace transformations”, *Int. Conf. on Scientific Computing. Proc. CSC’05 (Las Vegas, Nevada, USA, June 20–23, 2005)*, eds. H. R. Arabnia, G. A. Gravvanis, C.S.R.E.A. Press, Athens, Georgia, USA, 2005, 144–150.

Поступила в редакцию 23.IX.2005 г.,
после доработки 25.XI.2005 г.