Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Об одной модели слабо неидеального бозе-газа, приводящей к эффекту фонтанирования, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 524–528

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf199>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.135.184

26 апреля 2023 г., 14:03:23

ОБ ОДНОЙ МОДЕЛИ СЛАБО НЕИДЕАЛЬНОГО БОЗЕ-ГАЗА, ПРИВОДЯЩЕЙ К ЭФФЕКТУ ФОНТАНИРОВАНИЯ

Обычная термодинамика отвечает основному равновесному состоянию системы. Приводится модель, позволяющая построить “вторую” термодинамику – аналог равновесного состояния сверхтекучей жидкости. На ее основе объясняется эффект возникновения “пробки” в тонком капилляре для движущейся сверхтекучей жидкости, если ее нагревать до критической точки “второй” термодинамики.

Ключевые слова: термодинамика, сверхтекучесть, критический индекс.

Квантование свободной энергии в простейшем случае дискретного спектра ($\{E_n\}$ – собственные значения, $\{\Psi_n\}$ – собственные функции) самосопряженного оператора $\hat{H}$, постулированное автором [1]–[5], заключается в следующем. Пусть $\sigma(E_n)$ – кратность (вырождение) уровня, тогда оператор свободной энергии определяется совсем просто: это оператор $\hat{F}$ с теми же собственными функциями, что и у оператора $\hat{H}$ (оператора “внутренней энергии”), и с собственными значениями вида $E_n - \theta \ln \sigma(E_n)$, где $\theta = kT$, T – температура, k – постоянная Больцмана.

Если E_λ – спектральное семейство оператора $\hat{H}$, то

$$\hat{H} = \int \lambda dE_\lambda, \quad \hat{F} = \int [\lambda - \sigma(\lambda)] dE_\lambda.$$

В положение равновесия система приходит под влиянием возмущения типа трения. Пусть $\hat{W}$ – некоторый самосопряженный оператор, $(\bar{\Psi}_n, \hat{W} \Psi_k)$ – его матричные элементы, определяющие матрицу перехода из E_k в E_n под влиянием возмущения $\hat{W}$.

Рассмотрим несамосопряженный оператор $\hat{W}_{\text{тр}}$, матричные элементы которого равны матричным элементам $\hat{W}$ при $E_k > E_n$ и нулю при $E_k < E_n$. Тем самым действие возмущения $\hat{W}_{\text{тр}}$ разрешает системе лишь спуститься на более низкие уровни энергии. Если такое возмущение применять к $\hat{H}$ достаточно часто, то в конце концов система в простейшем случае перейдет на нижний уровень – основное состояние, а после применения к $\hat{F}$ – в состояние $\min_{E_n} (E_n - \theta \ln \sigma(E_n))$. Последнее, как нетрудно видеть, совпадает с классическим определением свободной энергии в квантовой статистике.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Мы приведем здесь очень простую модель со слабым парным взаимодействием, когда невзаимодействующий оператор имеет два сильно вырожденных уровня. Мы покажем, что:

1. Имеются два уровня оператора $\hat{H}$, на которые будут спускаться его собственные значения под влиянием оператора трения. Второй уровень (локальный минимум) соответствует непосредственной модели сверхтекучего состояния, полученной Боголюбовым [6], и удовлетворяет условию сверхтекучести Ландау, а именно при возмущении $\varepsilon \widehat{W}$, где $\varepsilon \ll 1$, он может только подняться, но не спуститься.

2. Ровно тот же эффект имеет место и для оператора $\hat{F}$ (для достаточно малых θ), но при $\theta = \theta_{кр}$ происходит фазовый переход первого рода с критическим индексом $1/2$ этого “сверхтекучего” состояния в нормальное.

Итак, рассмотрим двухуровневую модель слабо неидеального бозе-газа с парным взаимодействием следующего типа: любые пары бозонов, находящиеся (попавшие) на верхнем уровне, отдают квант энергии порядка $1/N$, где N – число частиц. Будем предполагать, что газ имеет два уровня ε_1 и ε_2 , $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$, а значит, две ячейки G_1 и G_2 , $G_1 + G_2 = M$, N_1 и N_2 – число частиц на уровне ε_1 и ε_2 , соответственно, $N_1 + N_2 = N$ [7]. Предположим, что энергия газа уменьшилась на величину V/N для любой пары частиц, попавших на верхний уровень ε_2 . Поскольку таких пар всего $N_2(N_2 - 1)/2$ штук, то спектр собственных значений энергии газа равен

$$\mathcal{E}(N_1, N_2) = \varepsilon_1 N_1 + \varepsilon_2 N_2 - \frac{V N_2(N_2 - 1)}{2N} + \ln \left(\frac{(N_1 + G_1 - 1)!(N_2 + G_2 - 1)!}{N_1!(G_1 - 1)!N_2!(G_2 - 1)!} \right).$$

Пусть $\mathcal{L}$ – пространство функций (в p -представлении) $\Psi(p_1, \dots, p_N)$, симметричных относительно дискретных переменных p_i , $i = 1, \dots, N$, которые принимают значения $1/M, 2/M, \dots, (M - 1)/M, 1$. Гамильтониан, отвечающий математической задаче, действует на функции пространства $\mathcal{L}$ следующим образом:

$$\hat{H}_N \Psi(p_1, \dots, p_N) = \left(\sum_{i=1}^N \lambda(p_i) + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N V(p_i, p_j) \right) \Psi(p_1, \dots, p_N), \quad (1)$$

где $\lambda(p) = \varepsilon_1$ при $1/M \leq p \leq G_1/M$ и $\lambda(p) = \varepsilon_2$ при $(G_1 + 1)/M \leq p \leq 1$; кроме того, $V(p, p') = -V$, если $(G_1 + 1)/M \leq p \leq 1$ и $(G_1 + 1)/M \leq p' \leq 1$, во всех остальных случаях $V(p, p') = 0$. Далее будем считать, что выполнены условия $\varepsilon_2 - \varepsilon_1 < V < 2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$. Введем функции $\varphi_i(p)$, $i = 1, \dots, G_1$, и $\phi_j(p)$, $j = 1, \dots, G_2$, где $G_2 = M - G_1$, следующим образом:

$$\varphi_i(p) = \begin{cases} 1, & p = \frac{i}{M}, \\ 0, & p \neq \frac{i}{M}, \end{cases} \quad \phi_j(p) = \begin{cases} 1, & p = \frac{j + G_1}{M}, \\ 0, & p \neq \frac{j + G_1}{M}. \end{cases} \quad (2)$$

Собственные функции гамильтониана (1) будем нумеровать двумя наборами неотрицательных целых чисел $\{k\} = k_1, \dots, k_{G_1}$ и $\{l\} = l_1, \dots, l_{G_2}$ такими, что

$$\sum_{i=1}^{G_1} k_i + \sum_{j=1}^{G_2} l_j = N.$$

Собственная функция $\Psi_{\{k\},\{l\}}$ выражается через функции (2) следующим образом:

$$\Psi_{\{k\},\{l\}} = \text{Symm}_{p_1, \dots, p_N} (\varphi_1(p_1) \dots \varphi_1(p_{k_1}) \varphi_2(p_{k_1+1}) \dots \varphi_2(p_{k_1+k_2}) \dots \varphi_{G_1}(p_{N_1}) \times \\ \times \phi_1(p_{N_1+1}) \dots \phi_1(p_{N_1+l_1}) \phi_2(p_{N_1+k_1+1}) \dots \phi_2(p_{N_1+k_1+k_2}) \dots \phi_{G_2}(p_N)), \quad (3)$$

где $\text{Symm}_{p_1, \dots, p_N}$ — оператор симметризации по переменным $p_1, \dots, p_N$, а N_1 зависит от набора $\{k\}$ следующим образом: $N_1 = \sum_{i=1}^{G_1} k_i$. Собственное значение гамильтониана $\hat{H}_N$, отвечающее собственной функции (3), имеет вид $E(N_2) = \varepsilon_1 N + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1) N_2 - V N_2(N_2 - 1)/(2N)$. Следовательно, поскольку выполнены неравенства $E(N_2 + 1) > E(N_2)$ при $N_2 \leq K - 1$ и $E(N_2 + 1) < E(N_2)$ при $N_2 \geq K$, где $K = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)N/V$, собственное значение $E(0)$ является наименьшим. Будем называть его глобальным минимумом собственных значений. Кроме того, из последних неравенств следует, что собственное значение $E(N)$ является локальным минимумом собственных значений, так как для любого N_2 такого, что $K \leq N_2 < N$, справедливо неравенство $E(N_2) < E(N)$.

Рассмотрим возмущения гамильтониана $\hat{H}_N$ самосопряженными операторами $\widehat{W}_s$, которые действуют в пространстве $\mathcal{L}$ как операторы умножения на функции

$$W_s(p_1, \dots, p_2) = \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq \dots \neq i_s \leq N} U_s(p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_s}), \quad (4)$$

где $s \geq 1$, а функции U_s действительные. Такие операторы $\widehat{W}_s$ являются операторами s -частичного взаимодействия. Легко убедиться, что для матричных элементов таких операторов на собственных функциях (3) имеет место равенство

$$(\Psi_{\{k\},\{l\}}, \widehat{W}_s \Psi_{\{k'\},\{l'\}}) = 0 \quad \text{при} \quad \sum_{i=1}^{G_1} |k_i - k'_i| + \sum_{j=1}^{G_2} |l_j - l'_j| > 2s. \quad (5)$$

Если $s = O(N^\delta)$, $0 < \delta < 1$, то из (5) следует, что под действием s -частичных возмущений собственные функции, отвечающие глобальному и локальному минимумам собственных значений, могут переходить только в состояния, у которых собственные значения больше. Согласно концепции Ландау это означает, что состояния локального минимума являются сверхтекучими.

Предположим теперь, что возмущение гамильтониана $\hat{H}_N$ является s -частичным не-самосопряженным и допускает только переходы на уровни с меньшими собственными значениями. В таком случае из (5) следует, что среди собственных функций (3) выделяются два класса. Собственные функции $\Psi_{\{k\},\{l\}}$, для которых справедливо неравенство

$$N_2 = \sum_{j=1}^{G_2} l_j \leq K - s - 1, \quad (6)$$

под действием указанного возмущения со временем придут в состояние глобального минимума, а собственные функции, для которых выполняется неравенство

$$N_2 = \sum_{j=1}^{G_2} l_j \geq K + s, \quad (7)$$

под действием указанного возмущения со временем придут в состояние локального минимума.

Пусть теперь $N \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$, $\lim G_1/N = g_1 = \text{const}$, $\lim G_2/N = g_2 = \text{const}$, $\lim N_2/G_2 = \bar{n}_2$, $n = G_2 \bar{n}_2/N$.

Собственные значения оператора $\hat{F}$ имеют вид

$$F(n, \theta) = N \left(\varepsilon_1 + \varepsilon n - \frac{V n^2}{2} + \theta \left(n \ln \left(\frac{n}{g_2} \right) - (g_2 + n) \ln \left(1 + \frac{n}{g_2} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + (1 - n) \ln \left(\frac{1 - n}{g_1} \right) - (g_1 + 1 - n) \ln \left(1 + \frac{1 - n}{g_1} \right) \right) \right), \quad 0 \leq n \leq 1.$$

Ищем решение n уравнения

$$0 = \frac{\partial F}{\partial n}(n, \theta) = \varepsilon - V n + \theta \ln \left(\frac{n}{g_2 + n} \frac{g_1 + 1 - n}{1 - n} \right). \quad (8)$$

Уравнение (8) имеет три решения $n^{(1)}$, $n^{(2)}$, $n^{(3)}$, если $\theta > 0$ и достаточно мало, и одно решение n_0 , если θ велико. Асимптотика решений при $\theta \rightarrow 0$ имеет вид

$$n^{(1)} \approx \frac{g_2}{1 + g_1} e^{-\varepsilon/\theta}, \quad n^{(2)} - 1 \approx -\frac{g_1}{1 + g_2} e^{-(V-\varepsilon)/\theta}, \\ n^{(3)} - \frac{\varepsilon}{V} \approx \frac{\theta}{V} \ln \left(\frac{\varepsilon/V}{g_2 + \varepsilon/V} \frac{g_1 + 1 - \varepsilon/V}{1 - \varepsilon/V} \right). \quad (9)$$

Поскольку $N \rightarrow \infty$, а s конечно, то в формулах (6) и (7), поделенных на N , можно пренебречь членами $(s-1)$ и s . Тогда собственные значения при $n > \varepsilon/V$ под действием трения перейдут в локальный минимум $n^{(2)} = 1$.

Аналогично при $n > n^{(3)}$ собственные значения оператора $\hat{F}$ перейдут в локальный минимум $n^{(2)}$ (см. (9)). Условие локальной устойчивости Ландау также будет выполняться. Ясно также и из аналитичности формул по θ , что формулы (9) дают естественное продолжение “сверхтекучего” состояния $n^{(2)}$ при θ , отличном от нуля.

Критические значения параметров определяются из уравнения

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial n^2}(n, \theta) = N \left(-V + \theta \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{g_2 + n} + \frac{1}{1 - n} - \frac{1}{g_1 + 1 - n} \right) \right),$$

где n удовлетворяет уравнению (8).

Производная энтропии S , отвечающей решениям уравнения (8), по температуре будет иметь вид

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \ln \left(\frac{g_2 + n}{n} \frac{1 - n}{g_1 + 1 - n} \right) \frac{\partial n}{\partial \theta}. \quad (10)$$

Таким образом, при приближении температуры к критическому значению $S_0(\theta, \varepsilon, g_1, g_2)$ выражение (10) растет как $1/\sqrt{|\theta - \theta_0|}$, т.е. имеет место фазовый переход второго рода с критическим индексом $1/2$ для метастабильного состояния. Однако дальше кривые не продолжают. Это значит, что при достаточно сильном трении течение останавливается. Этот эффект называется эффектом фонтанирования, он был открыт Д. Алланом в 1938 году для достаточно тонких капилляров (см. [8], [9]), где трение нормальной жидкости столь высоко, что она внезапно останавливается.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. Квантование термодинамики и ультратворичное квантование. М.: Институт компьютерных исследований, 2001.
- [2] В. П. Маслов. Докл. РАН. 2003. Т. 389. № 4. С. 439–440.
- [3] В. П. Маслов. Матем. заметки. 2003. Т. 73. № 4. С. 637–640.
- [4] В. П. Маслов. Вестн. МГУ. Сер. Физика. Астрономия. 2003. № 1. С. 3–11.
- [5] V. P. Maslov. Russ. J. Math. 2002. V. 9. № 1. P. 112–122.
- [6] Н. Н. Боголюбов. Избранные труды. Т. 2. Киев: Наукова думка, 1970.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М.: Наука, 1964.
- [8] В. Кeesom. Гелий. М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
- [9] К. Мендельсон. Жидкий гелий. В сб.: Физика низких температур. Ред. А. И. Шальников. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. С. 783–882.

Поступила в редакцию 12.III.2003 г.