Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Выврожденная плазма в полупространстве во внешнем электрическом поле, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 3, 487–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1990>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 15:57:21

© 2006 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ВЫРОЖДЕННАЯ ПЛАЗМА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ВО ВНЕШНЕМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Получено аналитическое решение задачи о поведении столкновительной вырожденной плазмы во внешнем переменном электрическом поле. Выяснена структура экранированного электрического поля. Исследован случай, когда частота внешнего поля близка к частоте плазменных колебаний (резонанс). Показано существование двух слоев, примыкающих к поверхности, в которых поведение экранированного поля существенно различно.

Ключевые слова: колебания плазмы, полупространство, зеркальное граничное условие, резонанс.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача о колебаниях электронной плазмы впервые рассматривалась Власовым [1]. Ландау [2] аналитически решил задачу о поведении бесстолкновительной плазмы в полупространстве в присутствии внешнего продольного (перпендикулярно поверхности) электрического поля при зеркальном отражении электронов от границы. Данная задача имеет большое значение в теории плазмы (см., например, [3] и имеющиеся там ссылки, а также [4], [5]).

С диффузным граничным условием задача рассмотрена в работе [6] методом интегральных преобразований. Общий асимптотический анализ поведения электрического поля на большом расстоянии от поверхности проведен в работе [7], где указано на особое значение анализа поведения поля вблизи плазменного резонанса. При этом в работе [7] утверждается, что поведение поля в этом случае для зеркального и диффузного рассеяния электронов на поверхности существенно различно.

Целью настоящей работы является аналитическое решение задачи о поведении вырожденной электронной плазмы в полупространстве в присутствии внешнего переменного электрического поля. Рассматривается случай зеркального отражения электронов от границы. Проведен анализ характера и условий существования дискретных мод задачи. Кроме того, исследовано поведение электрического поля в том случае, когда частота внешнего поля близка к плазменной частоте; поведение поля

*Московский государственный областной университет, Москва, Россия.
E-mail: avlatyshev@mail.ru, yushkanov@inbox.ru

изучалось во всем объеме металла, включая слой, непосредственно примыкающий к поверхности.

В работах [8] и [9] рассматривались общие вопросы разрешимости данной задачи, но с диффузными граничными условиями. В работе [9] исследована структура дискретного спектра в зависимости от параметров задачи. Детальный анализ решения в общем случае в указанных работах не проводился ввиду сложного характера этого решения. Однако в рассматриваемом случае, когда частота колебаний ω внешнего электрического поля $E_0 e^{-i\omega t}$ близка к частоте ω_p плазменных колебаний, проведение такого анализа оказывается возможным. В этом случае квадрат модуля нуля дисперсионной функции задачи много больше единицы. Воспользовавшись этим обстоятельством, решение задачи можно привести к виду, допускающему непосредственное исследование. Именно такое исследование, основанное на аналитическом решении задачи, и проводится в настоящей работе.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть вырожденная плазма занимает полупространство $x > 0$. Будем считать внешнее поле достаточно слабым, чтобы было применимо линейное приближение [2]. Используем τ -модельное уравнение Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e_0 \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \nu(f_{\text{eq}} - f) \quad (2.1)$$

и уравнение Пуассона для электрического поля

$$\text{div } \mathbf{E} = 4\pi\rho, \quad \rho = \frac{2e_0}{(2\pi\hbar)^3} \int (f - f_0) d^3p. \quad (2.2)$$

Здесь f_{eq} – локально равновесная функция распределения Ферми, $f_{\text{eq}} = H(\varepsilon_F(x) - \varepsilon)$, $H(x)$ – функция Хевисайда, равная единице при $x > 0$ и нулю при $x < 0$, f_0 – невозмущенная функция распределения Ферми (абсолютный фермиан), $f_0 = H(\varepsilon_F - \varepsilon)$, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ – импульс электрона, $\varepsilon = mv^2/2$ – кинетическая энергия электрона (поверхность Ферми считается сферической), $\varepsilon_F = mv_F^2/2$ – невозмущенная кинетическая энергия Ферми, e_0 – заряд электрона, ρ – плотность заряда, $\hbar$ – постоянная Планка, ν – эффективная частота рассеяния электронов.

Внешнее электрическое поле вне плазмы перпендикулярно границе плазмы и меняется по закону $E_0 e^{-i\omega t}$. Ввиду симметрии задачи функция распределения f зависит только от пространственной координаты x , т.е. $f = f(x, \mathbf{v}, t)$. Линеаризацию уравнений (2.1) и (2.2) проведем относительно абсолютного фермиана f_0 , полагая $f = f_0 + f_1$, f_1 – новая неизвестная функция. Заметим, что в линейном приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{E} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} &= E(x) e^{-i\omega t} \frac{\partial f_0}{\partial p_x} = -E(x) e^{-i\omega t} v_x \delta(\varepsilon_F - \varepsilon), \\ f_{\text{eq}} &= f_0 + \delta(\varepsilon_F - \varepsilon)(\varepsilon_F(x) - \varepsilon_F), \end{aligned}$$

где $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Вместо уравнений (2.1) и (2.2) получаем

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} + \nu f_1 = \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) [e_0 e^{-i\omega t} E(x) v_x + \nu(\varepsilon_F(x) - \varepsilon_F)], \quad (2.3)$$

$$E'(x) = \frac{8\pi e_0}{(2\pi\hbar)^3} \int f_1 d^3 p. \quad (2.4)$$

Правая часть уравнения (2.3) пропорциональна дельта-функции. Из вида уравнения (2.3) следует, что функцию f_1 можно искать в виде

$$f_1 = e^{-i\omega t} \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) \psi(x, v_x). \quad (2.5)$$

Величина $\varepsilon_F(x) - \varepsilon_F$ определяется из закона сохранения числа частиц:

$$\int f_{\text{eq}} d^3 p = \int f d^3 p. \quad (2.6)$$

Заметим, что

$$f_{\text{eq}} - f = \delta(\varepsilon_F - \varepsilon) [(\varepsilon_F(x) - \varepsilon_F) - e^{-i\omega t} \psi(x, v_x)].$$

Подставляя это равенство в (2.6) и учитывая, что $v_x = v_F \mu$, $\mu = \cos \theta$, находим

$$e^{i\omega t} (\varepsilon_F(x) - \varepsilon_F) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'. \quad (2.7)$$

Подставим (2.5) в (2.3) и (2.4), а (2.7) в (2.3). Получим систему уравнений

$$\begin{aligned} (\nu - i\omega) \psi(x, \mu) + \mu v_F \frac{\partial \psi}{\partial x} &= e_0 \mu v_F E(x) + \frac{\nu}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu) d\mu, \\ E'(x) &= \frac{2e_0 m^2 v_F}{\pi \hbar^3} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu'. \end{aligned}$$

В этих уравнениях перейдем к безразмерным величинам

$$x' = \frac{\nu x}{v_F}, \quad e(x) = \frac{E(x)}{E_0}, \quad \varphi(x, \mu) = \frac{\nu \psi(x, \mu)}{e_0 v_F E_0}.$$

Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} r\varphi(x', \mu) + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x'} &= \mu e(x') + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \varphi(x', \mu') d\mu', \\ e'(x') &= \frac{3\omega_p^2}{2\nu^2} \int_{-1}^1 \varphi(x', \mu') d\mu', \end{aligned} \quad (2.8)$$

где ω_p – ленгмюровская (собственная) частота плазмы, $\omega_p^2 = 4\pi e_0^2 n m^{-1}$, $r = 1 - i\omega\nu^{-1}$, n – числовая плотность (концентрация) электронов. Далее штрих у координаты будем опускать.

Известно, что частота плазменных колебаний, как правило, много больше частоты столкновений электронов в металле [10]. Поэтому в случае, когда $\omega \sim \omega_p$, выполняется условие $\omega_p \gg \nu$.

Рассмотрим случай зеркального отражения электронов от границы полупространства. Тогда для функции распределения имеем следующее граничное условие:

$$\varphi(0, \mu) = \varphi(0, -\mu), \quad -1 < \mu < 1. \quad (2.9)$$

Граничное условие для поля на поверхности плазмы имеет вид

$$e(0) = 1, \quad (2.10)$$

а вдали от поверхности поле предполагается ограниченным:

$$|e(+\infty)| < +\infty. \quad (2.11)$$

3. СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА

Будем искать решение граничной задачи (2.8)–(2.11) в виде

$$\varphi_\eta(x, \mu) = e^{-rx/\eta} \Phi(\eta, \mu), \quad e_\eta(x) = e^{-rx/\eta} E(\eta), \quad (3.1)$$

где η – спектральный параметр, или параметр разделения.

Подставим равенства (3.1) в уравнения (2.8). Получим характеристическую систему уравнений

$$r(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = \eta\mu E(\eta) + \frac{\eta}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu') d\mu', \quad (3.2)$$

$$E(\eta) = -\frac{3\omega_p^2\eta}{2\nu^2r} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu. \quad (3.3)$$

Введем обозначения:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{\omega_p}, \quad \gamma = \frac{\omega - \omega_p}{\omega_p}, \quad c = \frac{\nu - i\omega_p}{\omega_p}, \quad \eta_1^2 = \frac{\varepsilon c}{3}.$$

Ясно, что

$$1 + \gamma = \frac{\omega}{\omega_p}, \quad \nu r = c\omega_p, \quad c = \varepsilon r, \quad r = -\frac{i}{\varepsilon}(1 + \gamma + i\varepsilon),$$

$$c = -i(1 + \gamma + i\varepsilon), \quad \eta_1^2 = -\frac{i\varepsilon}{3}(1 + \gamma + i\varepsilon), \quad \frac{3\omega_p^2}{\nu^2r} = \frac{1}{\eta_1^2}.$$

Подставляя интеграл из уравнения (3.3) в (3.2), приходим к следующей системе уравнений:

$$r(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu) = E(\eta)(\eta\mu - \eta_1^2),$$

$$-\eta_1^2 E(\eta) = \frac{\eta}{2} \int_{-1}^1 \Phi(\eta, \mu) d\mu. \quad (3.4)$$

Решение системы уравнений (3.4) существенно зависит от того, принадлежит ли спектральный параметр η интервалу $-1 < \eta < 1$. Поэтому этот интервал назовем непрерывным спектром характеристической системы. Далее будем рассматривать

лишь убывающие (по переменной x , $x > 0$) решения исходной системы. Согласно (3.1) убывающими решения являются тогда и только тогда, когда $\eta \in (0, 1)$, интервал $0 < \eta < 1$ является непрерывным спектром граничной задачи.

Пусть $\eta \in (-1, +1)$. Тогда из уравнений (3.4) в пространстве обобщенных функций [11] найдем собственные функции характеристической системы:

$$\Phi(\eta, \mu) = F(\eta, \mu) \frac{E(\eta)}{r},$$

где

$$F(\eta, \mu) = P \frac{\mu\eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} - 2\eta_1^2 r \frac{\lambda(\eta)}{\eta} \delta(\eta - \mu). \quad (3.5)$$

Функция $\lambda(z)$ называется дисперсионной функцией задачи,

$$\lambda(z) = 1 - \frac{z}{2\eta_1^2 r} \int_{-1}^1 \frac{\mu z - \eta_1^2}{\mu - z} d\mu,$$

Px^{-1} – символ главного значения интеграла от x^{-1} .

Функции (3.5) называются собственными функциями непрерывного спектра, ибо спектральный параметр η сплошным образом заполняет континуум $(0, +1)$. Собственные решения исходной задачи даются равенствами (3.1).

Граничные значения дисперсионной функции сверху и снизу на действительной оси вычисляются согласно формулам Сохоцкого:

$$\begin{aligned} \lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) &= \frac{i\pi\mu}{\eta_1^2 r} (\eta_1^2 - \mu^2), \\ \lambda^\pm(\mu) &= \lambda(\mu) \pm \frac{i\pi\mu}{2\eta_1^2} (\eta_1^2 - \mu^2), \end{aligned}$$

где

$$\lambda(\mu) = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{\eta_1^2 r} (\eta_1^2 - \mu^2) \lambda_0(\mu), \quad \lambda_0(\mu) = 1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1 - \mu}{1 + \mu},$$

$\lambda_0(z)$ – дисперсионная функция Кейза [12].

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЛАЗМЕННОЙ МОДЫ

По определению дискретным спектром характеристического уравнения является множество нулей дисперсионного уравнения

$$g(z) \equiv \frac{\lambda(z)}{z} = 0.$$

Найдем эти нули. Разложим дисперсионную функцию в асимптотический ряд в окрестности бесконечно удаленной точки:

$$\lambda(z) = \lambda_\infty + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_4}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty, \quad (4.1)$$

где

$$\lambda_\infty \equiv \lambda(\infty) = 1 - \frac{1}{r} + \frac{1}{3r\eta_1^2} = \frac{2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)}{(1 + \gamma + i\varepsilon)^2},$$

Рис. 1

$$\lambda_2 = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5r\eta_1^2} \right) = -\frac{9 + 5i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{15(1 + \gamma + i\varepsilon)^2},$$

$$\lambda_4 = -\frac{1}{r} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{9\eta_1^2} \right) = -\frac{15 + 7i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{35(1 + \gamma + i\varepsilon)^2}.$$

Нетрудно видеть, что дисперсионное уравнение в качестве нуля имеет бесконечно удаленную точку $\eta_i = \infty$, которой отвечают дискретные собственные решения исходной системы

$$\varphi_\infty(x, \mu) = \frac{E_\infty}{r} \mu, \quad e_\infty(x) = E_\infty.$$

Это решение естественно назвать модой Друде. Оно описывает объемную проводимость металла, рассмотренную Друде (см., например, [13]).

Остановимся подробнее на вопросе существования плазменной моды. Найдем конечные комплексные нули дисперсионной функции. Воспользуемся принципом аргумента. Выберем контур $\Gamma_\varepsilon = \Gamma_R \cup \gamma_\varepsilon$ (см. рис. 1), проходимый в положительном направлении и ограничивающий двухсвязную область D_R . Этот контур состоит из окружности $\{\Gamma_R: |z| = R, R = 1/\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ и контура γ_ε , охватывающего разрез $[-1, +1]$ и отстоящего от него на расстояние ε . В силу принципа аргумента число нулей N в области D_R

$$N = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_\varepsilon} d \ln \lambda(z).$$

Переходя к пределу в этом равенстве при $\varepsilon \rightarrow 0$ и учитывая, что дисперсионная функция аналитична в окрестности бесконечно удаленной точки, получаем, что

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 d \ln \lambda^+(\tau) - \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 d \ln \lambda^-(\tau).$$

Во втором интеграле сделаем замену переменной $\tau \rightarrow -\tau$. Учитывая, что $\lambda^+(-\tau) = \lambda^-(\tau)$, получаем

$$N = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 d \ln \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)}.$$

Разобьем этот интеграл на два – по отрезкам $[-1, 0]$ и $[0, 1]$. В первом интеграле снова проведем указанную замену и получим

$$N = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 d \ln \frac{\lambda^+(\tau)}{\lambda^-(\tau)}. \quad (4.2)$$

Рассмотрим кривую $\gamma: z = G(\tau)$, $0 \leq \tau \leq +1$, где $G(\tau) = \lambda^+(\tau)/\lambda^-(\tau)$. Ясно, что $G(0) = 1$, $\lim_{\tau \rightarrow +1} G(\tau) = 1$. Следовательно, согласно (4.2) число нулей N равно удвоенному числу оборотов кривой γ вокруг начала координат, т.е. $N = 2\kappa(G)$, $\kappa(G) = \text{Ind}_{[0, +1]} G(\tau)$. Таким образом, число нулей дисперсионной функции, лежащих в комплексной плоскости вне действительной оси, равно удвоенному индексу функции $G(\tau)$, вычисленному на отрезке $[0, +1]$.

Выделим у функции $G(\mu)$ действительную и мнимую части:

$$G(\mu) = \frac{g_1(\mu)}{g(\mu)} + i \frac{g_2(\mu)}{g(\mu)}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} g(\mu) &= [(1 + \gamma)^2 + \lambda_0(3\mu^2 - \varepsilon^2) - \varepsilon(1 + \gamma)s]^2 + [\varepsilon(1 + \gamma)(1 + \lambda_0) - s(3\mu^2 - \varepsilon^2)]^2, \\ g_1(\mu) &= [(1 + \gamma)^2 + \lambda_0(3\mu^2 - \varepsilon^2)]^2 - \varepsilon^2(1 + \gamma)^2[s^2 - (1 + \lambda_0)^2] - (3\mu^2 - \varepsilon^2)^2 s^2, \\ g_2(\mu) &= 2s[(1 + \gamma)^2(3\mu^2 - \varepsilon^2) + \lambda_0(3\mu^2 - \varepsilon^2)^2 + \varepsilon^2(1 + \gamma)^2(1 + \lambda_0)], \end{aligned}$$

где $\lambda_0 = \lambda_0(\mu)$, $s = s(\mu) = \pi\mu/2$.

Выделим кривую $L: g_1(\mu; \gamma, \varepsilon) = 0$, $g_2(\mu; \gamma, \varepsilon) = 0$, $0 \leq \mu \leq 1$, лежащую на плоскости параметров задачи (γ, ε) , такую, что при переходе через эту кривую индекс функции $G(\mu)$ на положительной полуоси меняется скачком (см. рис. 2). Из уравнения $g_2 = 0$ находим

$$(1 + \gamma)^2 = -\frac{\lambda_0(\mu)(3\mu^2 - \varepsilon^2)}{3\mu^2 + \varepsilon^2\lambda_0(\mu)}. \quad (4.3)$$

Теперь из уравнения $g_1 = 0$ с помощью (4.3) находим

$$\varepsilon = \sqrt{L_2(\mu)}, \quad L_2(\mu) = -\frac{3\mu^2 s^2(\mu)}{\lambda_0(\mu)[s^2(\mu) + (1 + \lambda_0(\mu))^2]}. \quad (4.4)$$

Рис. 2

Подставляя (4.4) в (4.3), получаем

$$\gamma = -1 + \sqrt{L_1(\mu)}, \quad L_1(\mu) = -\frac{3\mu^2[s^2(\mu) + \lambda_0(\mu)(1 + \lambda_0(\mu))]^2}{\lambda_0(\mu)[s^2(\mu) + (1 + \lambda_0(\mu))^2]}. \quad (4.5)$$

Функции (4.4) и (4.5) определяют в параметрическом виде кривую L – границу области D^+ (через D^- обозначим ее внешность) (см. рис. 2). Так же, как и в работе [14], можно доказать, что если $(\gamma, \varepsilon) \in D^+$, то $\varkappa(G) = \text{Ind}_{[0, +1]} G(\mu) = 1$ (кривая L один раз охватывает начало координат), а если $(\gamma, \varepsilon) \in D^-$, то $\varkappa(G) = \text{Ind}_{[0, +1]} G(\mu) = 0$ (кривая L не охватывает начала координат). Отметим, что в работе [14] разработан метод исследования граничного режима, когда $(\gamma, \varepsilon) \in L$.

Из выражения (4.2) видно, что число нулей дисперсионной функции равно двум, если $(\gamma, \varepsilon) \in D^+$, и равно нулю, если $(\gamma, \varepsilon) \in D^-$. В силу четности дисперсионной функции ее нули различаются лишь знаком. Обозначим эти нули $\pm\eta_0$, причем за η_0 возьмем такой нуль, у которого $\text{Re } \eta_0 > 0$. Нулю η_0 отвечает следующее решение:

$$\varphi_{\eta_0}(x, \mu) = e^{-rx/\eta_0} \frac{E_0}{r} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu}, \quad e_{\eta_0}(x) = e^{-rx/\eta_0} E_0.$$

Это решение естественно назвать модой Дебая (это плазменная мода). В низкочастотном случае она описывает известное экранирование Дебая [13].

5. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЭЛЕКТРОНОВ И ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Покажем, что задача (2.8)–(2.11) имеет решение, представимое в виде разложения по собственным функциям характеристической системы:

$$\begin{aligned}\varphi(x, \mu) &= \frac{E_\infty}{r} \mu + \frac{E_0}{r} \frac{\eta_0 \mu - \eta_1^2}{\eta_0 - \mu} e^{-rx/\eta_0} + \frac{1}{r} \int_0^1 e^{-rx/\eta} F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta, \\ e(x) &= E_\infty + E_0 e^{-rx/\eta_0} + \int_0^1 e^{-rx/\eta} E(\eta) d\eta,\end{aligned}\quad (5.1)$$

где E_0 и E_∞ – неизвестные коэффициенты, отвечающие дискретному спектру (E_0 – амплитуда Дебая, E_1 – амплитуда Друде), $E(\eta)$ – неизвестная функция, называемая коэффициентом непрерывного спектра. При $(\gamma, \varepsilon) \in D^-$ в разложениях (5.1) следует положить $E_0 = 0$.

Подставим разложения (5.1) в граничные условия. Получаем следующую систему уравнений:

$$2E_\infty \mu + E_0 \varphi_0(\mu) + \int_0^1 [F(\eta, \mu) - F(\eta, -\mu)] E(\eta) d\eta, \quad (5.2)$$

$$E_\infty + E_0 + \int_0^1 E(\eta) d\eta = 1, \quad \varphi_0(\mu) = \frac{\eta_1^2 - \eta_0 z}{z - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0 z}{z + \eta_0}. \quad (5.3)$$

Продолжим функцию $E(\eta)$ в интервал $(-1, 0)$ четным образом: $E(\eta) = E(-\eta)$. Тогда нетрудно видеть, что $F(-\eta, -\mu) = -F(\eta, \mu)$. Преобразуем уравнение (5.2) к следующему виду:

$$2E_\infty \mu + E_0 \varphi_0(\mu) + \int_{-1}^1 F(\eta, \mu) E(\eta) d\eta = 0.$$

Подставим в последнее уравнение собственные функции, получаем сингулярное интегральное уравнение с ядром Коши [15] в интервале $-1 < \mu < +1$:

$$2E_\infty \mu + E_0 \varphi_0(\mu) + \int_{-1}^1 \frac{\mu \eta - \eta_1^2}{\eta - \mu} E(\eta) d\eta - 2\eta_1^2 r \frac{\lambda(\mu)}{\mu} E(\mu) = 0. \quad (5.4)$$

Введем вспомогательную функцию

$$M(z) = \int_{-1}^1 \frac{z\eta - \eta_1^2}{\eta - z} E(\eta) d\eta, \quad (5.5)$$

для которой

$$M^+(\mu) - M^-(\mu) = 2\pi i(\mu^2 - \eta_1^2)E(\mu), \quad \mu \in (-1, +1). \quad (5.6)$$

С помощью (5.5) и (5.6) преобразуем сингулярное уравнение (5.4) к краевой задаче Римана:

$$\lambda^+(\mu) [M^+(\mu) + 2E_\infty \mu + E_0 \varphi_0(\mu)] = \lambda^-(\mu) [M^-(\mu) + 2E_\infty \mu + E_0 \varphi_0(\mu)]. \quad (5.7)$$

Задача (5.7) имеет следующее решение:

$$M(z) = -2E_\infty z - E_0 \frac{\eta_1^2 - \eta_0 z}{z - \eta_0} + \frac{\eta_1^2 + \eta_0 z}{z + \eta_0} + \frac{C_1 z}{\lambda(z)}. \quad (5.8)$$

Устраняя полюс в бесконечно удаленной точке, получаем $C_1 = 2E_\infty \lambda_\infty$. Амплитуда Дебая находится при устранении полюсов решения (5.8) в точках $\pm\eta_0$. В силу четности дисперсионной функции эти полюсы устраняются введением одного условия:

$$E_0 = \frac{C_1 \eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2) \lambda'(\eta_0)}.$$

Коэффициент непрерывного спектра найдем, если подставим решение (5.8) в формулу Сохоцкого (5.6):

$$E(\mu) = \frac{C_1 \mu}{2\pi i (\mu^2 - \eta_1^2)} \left(\frac{1}{\lambda^+(\mu)} - \frac{1}{\lambda^-(\mu)} \right) = \frac{E_\infty \lambda_\infty \mu^2}{r \eta_1^2 \lambda^+(\mu) \lambda^-(\mu)}.$$

Для нахождения E_∞ воспользуемся уравнением (5.3), которое перепишем с учетом четности $E(\eta)$:

$$E_\infty + E_0 + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 E(\eta) d\eta = 1,$$

или в явном виде

$$\frac{1}{\lambda_\infty} + \frac{2\eta_0}{(\eta_1^2 - \eta_0^2) \lambda'(\eta_0)} + \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2} = \frac{1}{\lambda_\infty E_\infty}. \quad (5.9)$$

Здесь интеграл

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta d\eta}{\eta^2 - \eta_1^2}$$

можно вычислить аналитически. Функция

$$\varphi(z) = \frac{z}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2)},$$

для которой $\varphi(z) = O(z^{-1})$, $z \rightarrow \infty$, аналитична в комплексной плоскости вне разреза, за исключением точек $\pm\eta_1$, $\pm\eta_0$. Следовательно,

$$J = [\text{Res}|_{\eta_0} + \text{Res}|_{-\eta_0} + \text{Res}|_{\eta_1} + \text{Res}|_{-\eta_1} + \text{Res}|_{\infty}] \varphi(z).$$

Замечая, что

$$\text{Res}|_{\pm\eta_1} \varphi(z) = \frac{1}{2\lambda_1}, \quad \lambda_1 = \lambda(\eta_1),$$

$$\text{Res}|_{\pm\eta_0} \varphi(z) = \frac{\eta_0}{\lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)},$$

получаем

$$J = \frac{2\eta_0}{\lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)} + \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_\infty}.$$

Подставляя это равенство в (5.9), получаем, что $E_\infty = \lambda_1/\lambda_\infty$, $C_1 = 2\lambda_1$. Таким образом, разложения (5.1) установлены. Структура электрического поля в общем случае такова:

$$e(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0 e^{-rx/\eta_0}}{\lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)} + \frac{\lambda_1}{r\eta_1^2} \int_0^1 \frac{\eta^2 e^{-rx/\eta}}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)} d\eta. \quad (5.10)$$

Напомним, что формула (5.10) справедлива при $(\gamma, \varepsilon) \in D^+$. В случае $(\gamma, \varepsilon) \in D^-$ нуль η_0 дисперсионной функции не существует. Следовательно, можно считать, что в этом случае $\eta_0 = 0$; тогда второе слагаемое в (5.10) пропадает.

6. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ

Электрическое поле (5.10) представим в виде суммы двух слагаемых: $e(x) = e_d(x) + e_c(x)$, где $e_d(x)$ отвечает дискретному спектру, а $e_c(x)$ – непрерывному,

$$e_d(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0 e^{-rx/\eta_0}}{\lambda'(\eta_0)(\eta_1^2 - \eta_0^2)}, \quad (6.1)$$

$$e_c(x) = \frac{\lambda_1}{r\eta_1^2} \int_0^1 \frac{\eta^2 e^{-rx/\eta}}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)} d\eta. \quad (6.2)$$

В общем случае анализ решения по формулам (6.1) и (6.2) провести затруднительно. Однако в рассматриваемом случае вблизи резонанса такой анализ провести возможно.

В основе проводимого ниже анализа лежит идея поиска в явном виде нулей $\pm\eta_0$ дисперсионной функции. При $\omega \rightarrow \omega_p$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ оказывается, что $\eta_0(\gamma, \varepsilon) \rightarrow \infty$. Это значит, что параметры γ и ε вблизи резонанса являются малыми параметрами. Далее будем считать эти параметры малыми. Воспользуемся разложением дисперсионной функции при $|\eta_0| > 1$. Отбрасывая в разложении (4.1) члены, начиная со степени η_0^{-6} , из уравнения $\lambda(\eta_0) = 0$ находим

$$\eta_0^2 = \frac{9 + 5i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{15[2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)]} + \frac{45 + 21i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{63 + 35i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}. \quad (6.3)$$

Подчеркнем, что макропараметры плазмы существенно зависят от величины η_0 , поэтому требуется большая точность при вычислении нуля дисперсионной функции.

Из выражения (6.3) видно, что вблизи резонанса модуль нуля дисперсионной функции быстро возрастает, но остается конечной величиной даже при $\gamma = 0$, поскольку для столкновительной плазмы $\varepsilon > 0$.

Оценим величины $r\eta_0^{-1}$ и r при $\gamma = 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\frac{r}{\eta_0} = (1 - i)\sqrt{\frac{2}{3\varepsilon}}, \quad r = -\frac{i}{\varepsilon}. \quad (6.4)$$

Из выражения (6.2) для непрерывного спектра с учетом асимптотики (6.4) следует, что соответствующая часть электрического поля имеет коэффициент убывания по x , пропорциональный $(\sqrt{\varepsilon})^{-1}$. Из выражения (6.1) для дискретного спектра

Рис. 3

с учетом асимптотики r видно, что соответствующая часть поля имеет декремент убывания, пропорциональный ε^{-1} . Это означает, что существуют два слоя $0 \leq x \leq \varepsilon$ и $\varepsilon \leq x \leq \sqrt{\varepsilon}$, примыкающие к границе плазмы. В первом слое следует учитывать вклад в электрическое поле, обусловленный и непрерывным, и дискретным спектрами. На рис. 3 изображены кривые 1 и 2, отвечающие дискретному и непрерывному спектрам, и кривая 3, отвечающая их сумме, в случае $\gamma = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$.

Во втором слое решающий вклад в электрическое поле вносит второе слагаемое правой части (6.1). Второй слой при $x \sim \sqrt{\varepsilon}$ переходит в область сплошной среды, где определяющий вклад в электрическое поле вносит первое слагаемое – амплитуда Друде.

Переходя к размерным координатам, получим, что первый слой соответствует области $0 \leq x \leq l\varepsilon$, а второй слой – области $l\varepsilon \leq x \leq l\sqrt{\varepsilon}$. Учитывая определение ε , получаем для первого слоя область $0 \leq x \leq r_D$, а для второго слоя – область $r_D \leq x \leq \sqrt{lr_D}$, где r_D – дебаевский радиус экранирования поля, $r_D = v_F/(\sqrt{3}\omega_p)$.

Третий слой соответствует области $\sqrt{lr_D} \leq x \leq +\infty$. В этой области мода Дебая и волны Ван Кампена [16], [17] затухают и доминирует объемное решение Друде. Следовательно, третий слой – это область, где справедлива электродинамика сплошной среды.

Интересно, что взаимное расположение и характерные размеры слоев для рассматриваемого резонансного случая существенно отличаются от низкочастотного случая, когда $\omega \ll \omega_p$, $\omega \ll \nu$. Анализ общего выражения для поля (5.10) показывает, что и в этом случае первый слой имеет размер порядка r_D . Второй же слой соответствует области $r_D \leq x \leq l$. Таким образом, второй слой в этом случае существенно (в $\sqrt{l/r_D}$ раз) шире, чем в резонансном случае. При этом во втором

слое влияние моды Дебая в низкочастотном случае пренебрежимо мало, в отличие от резонансного случая.

Особо отметим, что вклад непрерывного спектра в электрическое поле при больших $|\eta_0|$ в первом слое имеет тот же порядок, что и вклад дискретного спектра. При переходе из первого слоя во второй вклад непрерывного спектра становится близким к нулю. Этот факт объясняется тем обстоятельством, что интеграл из (5.10) начинает быстро осциллировать с ростом x , а интеграл от быстро осциллирующей функции начинает исчезать с ростом частоты осцилляции.

Найдем, каковы вклады непрерывного и дискретного спектров в величину электрического поля. Дифференцируя (4.1) в точке η_0 , находим

$$\lambda'(\eta_0) = -\frac{2\lambda_2}{\eta_0^3} - \frac{4\lambda_4}{\eta_0^4} - \dots$$

Следовательно, при больших $|\eta_0|$ величина электрического поля, отвечающая дискретному спектру, равна

$$e_d(x) = -\frac{\eta_0^2}{\lambda_2} \left[1 - \frac{e^{-rx/\eta_0}}{1 + 2\lambda_4/(\lambda_2\eta_0^2)} \right].$$

Отсюда получаем, что вблизи резонанса

$$\lim_{\eta_0 \rightarrow \infty} e_d(x) = -2\frac{\lambda_4}{\lambda_2} = 2.38.$$

Учитывая, что $e_d(0) + e_c(0) = 1$, имеем $e_c(0) = -1.38$. Таким образом, вклад в электрическое поле вблизи границы плазмы от непрерывного спектра составляет 36.7%, а от дискретного – 63.3%. Итак, в первом слое вклады в электрическое поле дискретного и непрерывного спектров сопоставимы по величине (см. рис. 3). Это означает, что вклад непрерывного спектра вблизи поверхности (в первом слое) следует учитывать, поскольку величины $e_d(0)$ и $e_c(0)$ имеют одинаковый порядок при $\eta_0 \rightarrow \infty$.

Таким образом, вклад непрерывного спектра (волн Ван Кампена) у границы плазмы существен. Более того, обе составляющие электрического поля $e_d(0)$ и $e_c(0)$ на границе плазмы остаются конечными, в отличие от случая диффузных граничных условий [8], [9], где обе составляющие неограниченно возрастают.

На рис. 4 приведены графики зависимости действительной (кривые 1 и 2) и мнимой (кривые 3 и 4) частей электрического поля от расстояния до границы плазмы в случае $\varepsilon = 0.001$. На рис. 4а кривые 1, 3 отвечают случаю $\gamma = 0$, кривые 2, 4 – случаю $\gamma = -0.001$. На рис. 4б кривые 1, 3 отвечают случаю $\gamma = 0.001$, кривые 2, 4 – случаю $\gamma = 0.0025$. Из рис. 4 видно, что при положительных значениях γ наблюдается затухающий осцилляционный режим, т.е. поле осциллирует, амплитуды осцилляций затухают, приближаясь к своему асимптотическому значению при $x \rightarrow +\infty$. Этот осцилляционный режим становится все более выраженным по мере роста величины γ . При $\gamma = 0$ и $\gamma < 0$ осцилляции не наблюдаются. При этом величина поля в объеме плазмы при малых значениях γ и ε значительно превышает

Рис. 4

величину поля на поверхности, что естественно для рассматриваемого резонансного случая.

Продольная диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_{\parallel}$ согласно Ландау [2] связана с ω и ω_p соотношением: $\varepsilon_{\parallel} = 2(1 - \omega_p \omega^{-1}) = 2\gamma(1 + \gamma)^{-1}$. При малых γ отсюда имеем $\varepsilon_{\parallel} = 2\gamma$. Вдали от границы плазмы (при больших x) Ландау [2] получил следующие выражения для электрического поля: при малых отрицательных $\varepsilon_{\parallel}$

$$e(x) = \frac{1}{\varepsilon_{\parallel}} \left[1 - \exp\left(-\frac{x}{r_D} \sqrt{\frac{|\varepsilon_{\parallel}|}{3}}\right) \right].$$

Из этой формулы видно, что поле монотонно возрастает с ростом x до амплитуды Друде $1/\varepsilon_{\parallel}$; этот факт совпадает с результатом данной работы для столкновительной плазмы.

Затухающая часть дискретной моды (мода Дебая) для резонансного случая $\omega = \omega_p$ согласно (6.1) может быть представлена в виде

$$e_D(x) = \frac{i}{\varepsilon} \exp\left(\sqrt{\frac{5}{6\varepsilon}}(i-1)x\right). \quad (6.5)$$

В работе [7] при $\omega = \omega_p$ получена формула, в точности совпадающая с формулой (6.5), т.е. наблюдается согласие формулы (6.1) с соответствующей формулой из работы [7].

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналитически решена классическая задача о колебаниях вырожденной электронной плазмы в полупространстве в присутствии внешнего переменного электрического поля. В явном виде найдены функция распределения электронов и экранированное электрическое поле внутри плазмы.

Показано, что на плоскости параметров задачи (γ, ε) существует область D^- такая, что при $(\gamma, \varepsilon) \in D^-$ мода Дебая исчезает.

Исследован случай, когда частота колебаний внешнего поля близка к собственной частоте плазменных колебаний. Такое исследование оказалось возможным благодаря тому обстоятельству, что квадрат модуля нуля дисперсионной функции задачи много больше единицы. Воспользовавшись этим обстоятельством, мы привели решение задачи к виду, допускающему непосредственное исследование.

Исследование показало, что в плазме можно выделить три области, в которых поведение электрического поля существенно различно. К поверхности плазмы прижимается первый слой ширины $0 \leq x \leq r_D$, где поведение поля определяется тремя слагаемыми – модами Друде, Дебая (обе отвечают дискретному спектру задачи) и Ван Кампена (непрерывный спектр).

Второй слой имеет ширину $r_D \leq x \leq \sqrt{tr_D}$. В этом слое поведение поля определяется модами Друде и Дебая, причем мода Дебая является основной характеристикой, ответственной за осцилляционный режим, а влияние волн Ван Кампена пренебрежимо мало.

Наконец, третья область $\sqrt{lr_D} \leq x \leq +\infty$ является областью сплошной среды. Определяющей поведение поля является мода Друде, которую также можно найти из уравнений сплошной среды и уравнений Максвелла, не прибегая к решению кинетического уравнения.

Благодарности. А. В. Латышев благодарен РФФИ за частичную финансовую поддержку (грант № 03-01-00281).

Список литературы

- [1] А. А. Власов, *ЖЭТФ*, **8**:3 (1938), 291.
- [2] Л. Д. Ландау, *ЖЭТФ*, **26**:7 (1946), 547.
- [3] В. В. Веденяпин, *Кинетическая теория по Максвеллу, Больцману и Власову*, Изд-во МГОУ, М., 2005.
- [4] Ю. Ю. Архипов, В. В. Веденяпин, *Тр. МИРАН*, **203** (1994), 13.
- [5] И. В. Морозов, Г. Э. Норман, *ЖЭТФ*, **137**:2 (2005), 412.
- [6] J. M. Keller, R. Fuchs, K. L. Kliewer, *Phys. Rev. B*, **12**:6 (1976), 2012.
- [7] В. М. Гохфельд, М. А. Гулянский, М. И. Каганов, А. Г. Плявенек, *ЖЭТФ*, **89**:3 (1985), 985.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *Поверхность. Физика. Химия. Механика*, 1993, № 2, 25.
- [9] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ЖВМиМФ*, **41**:8 (2001), 1229.
- [10] Д. Пайнс, *Элементарные возбуждения в твердых телах*, Мир, М., 1965.
- [11] В. С. Владимиров, В. В. Жаринов, *Уравнения математической физики*, Физматлит, М., 2000.
- [12] К. Кейз, П. Цвайфель, *Линейная теория переноса*, Мир, М., 1972.
- [13] Дж. Займан, *Электроны и фононы*, ИЛ, М., 1962.
- [14] А. В. Латышев, А. А. Юшканов, *ТМФ*, **116**:2 (1997), 305.
- [15] И. К. Лифанов, *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн)*, Янус, М., 1995.
- [16] Б. Б. Кадомцев, *Коллективные явления в плазме*, Наука, М., 1988.
- [17] Ван Кампен, "Дисперсионное уравнение для волн в плазме", *Колебания сверхвысоких частот в плазме*, ред. Г. А. Бернашевский, З. С. Чернов, ИЛ, М., 1961, 57.

Поступила в редакцию 16.IX.2005 г.