Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Церковников, Оптимальный способ обрыва цепочки уравнений для двухвременных функций Грина, *ТМФ*, 2006, том 147, номер 3, 503–510

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1991>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 14:15:37

© 2006 г.

Ю. А. Церковников*

ОПТИМАЛЬНЫЙ СПОСОБ ОБРЫВА ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ДВУХВРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

На примере цепочки уравнений для системы бозе-частиц с парным взаимодействием разработана методика расщепления на втором звене цепочки. Получено приближение типа взаимодействующих мод, приводящее к системе нелинейных уравнений для одно-, двух- и трехчастичных функций.

Ключевые слова: функции Грина, цепочки уравнений, приближение взаимодействующих мод.

1. ИСХОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Будем исходить из цепочки уравнений для двухвременных температурных функций Грина, рассмотренной в работе [1] и в ряде предыдущих работ. Приведем сначала в общем виде основные соотношения, используемые в работе. Считаем, что последовательность динамических переменных $a(1), a(2), a(3), \dots$ связана уравнениями движения ($\hbar = 1$) достаточно общего вида:

$$ia(n) = \omega(n | \bar{n})a(\bar{n}) + \nu(n | \overline{n+1})a(\overline{n+1}). \quad (1.1)$$

Черта над парой аргументов $\bar{n}$ означает свертку по квантовому состоянию, соответствующему номеру “ n ”, а также и по векторным индексам, если $a(n)$ – операторный столбец. Рассматривая для определенности коммутаторные функции, произведем “ортогонализацию” последовательности $a(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, положив $A(1) \equiv a(1)$ и

$$A(n) = a(n) - \sum_{m=1}^{n-1} \langle [a(n), A^+(\bar{m}')]_- \rangle \eta^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) A(m), \quad n > 1, \quad (1.2)$$

где усреднение производится по ансамблю с гамильтонианом H , таким образом, $\langle \dots \rangle = Q^{-1} \text{Sp}\{e^{-\beta H} \dots\}$, $\beta = \theta^{-1}$. Коммутатор $\eta(m | m')$ в (1.2) задается формулой

$$\eta(m | m') = \langle [A(m), A^+(m')] \rangle = \langle [a(m), a^+(m')]_- \rangle_{m-1}. \quad (1.3)$$

*Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Функции Грина, диагональные по номеру n ,

$$\begin{aligned} G_E(n | n') &= \langle \langle A(n) | A^+(n') \rangle \rangle_{n-1, E} = \langle \langle a(n) | a^+(n') \rangle \rangle_{n-1} = \\ &= -i \int_0^\infty dt e^{iEt} \langle [a(n, t), a^+(n')]_- \rangle_{n-1}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

определяются уравнениями ($n = 1, 2, 3, \dots$)

$$\begin{aligned} EG_E(n | n') &= \eta(n | n') + \\ &+ \left\{ [i\dot{A}(n), A^+(\bar{n}')]_- + \langle \langle i\dot{A}(n) | -i\dot{A}^+(\bar{n}') \rangle \rangle_{n, E} \right\} \eta^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n'), \end{aligned} \quad (1.5)$$

из которых может быть составлена обобщенная бесконечная цепная дробь.

Входящие в уравнения неприводимые функции определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \langle A | B^+ \rangle \rangle_{n, E} &= \langle \langle A | B^+ \rangle \rangle_{n-1, E} - \\ &- \langle \langle A | A^+(\bar{n}') \rangle \rangle_{n-1, E} \langle \langle A(\bar{n}') | A^+(\bar{n}) \rangle \rangle_{n-1, E}^{-1} \langle \langle A(\bar{n}) | B^+ \rangle \rangle_{n-1, E}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Аналогичные соотношения будем иметь и для одновременных коммутаторов.

Недиагональные по n функции, если известны диагональные функции $G_E(n | n')$, вычисляются по формулам

$$\langle \langle A(n) | B^+ \rangle \rangle_{n-1, E} = G_E(n | \bar{n}') \eta^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) \left\{ \langle [A(\bar{n}) | B^+]_- \rangle + \langle \langle i\dot{A}(\bar{n}) | B^+ \rangle \rangle_{n, E} \right\}, \quad (1.7)$$

$$\langle \langle A | A^+(n') \rangle \rangle_{n-1} = \left\{ \langle [A, A^+(\bar{n}')]_- \rangle + \langle \langle A | -i\dot{A}^+(\bar{n}') \rangle \rangle_{n, E} \right\} \eta^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n'). \quad (1.8)$$

2. СИСТЕМА БОЗЕ-ЧАСТИЦ С ПАРНЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Воспользовавшись представленными в предыдущем разделе формулами, рассмотрим систему бозе-частиц с парным взаимодействием и обсудим возможности получения замкнутых уравнений путем обрыва цепочки на втором шаге. Согласно уравнениям цепочки (1.5) при $n = 1, 2$ и уравнению (1.8) имеем

$$EG_{q, E} = 1 + \left\{ \langle [i\dot{a}_q, a_q^+]_- \rangle + \langle \langle i\dot{a}_q | -ia_q^+ \rangle \rangle_{1, E} \right\} G_{q, E}, \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} EG_{q, E}(p, k | p', k') &= \eta_q(p, k | p', k') + \left\{ \langle [i\dot{A}_q(p, k), A_q^+(\bar{p}', \bar{k}')]_- \rangle + \right. \\ &+ \left. \langle \langle i\dot{A}_q(p, k) | -i\dot{A}_q^+(\bar{p}', \bar{k}') \rangle \rangle_{2, E} \right\} \eta_q^{-1}(\bar{p}', \bar{k}' | \bar{p}, \bar{k}) G_{q, E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k'), \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\langle \langle A_q(p, k | a_q^+) \rangle \rangle_E = \frac{1}{V} \sum_{p_1, k_1} \nu(k_1) G_{q, E}(p, k | p_1, k_1) G_{q, E}, \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} A_q(p, k) &= a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} - \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, a_q^+]_- \rangle a_q, \\ G_E(1 | 1') &\equiv G_{q, E} = \langle \langle a_q | a_q^+ \rangle \rangle_E, \\ G_E(2 | 2') &\equiv G_{q, E}(p, k | p', k') = \langle \langle a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ a_{p'} \rangle \rangle_{1, E}, \end{aligned}$$

$\eta(1 | 1') \equiv \langle [a_p, a_q^+]_- \rangle = 1$ и $\nu(k)$ – фурье-образ потенциала парного взаимодействия. В (2.3) в силу условия “ортогональности” $\langle [A_q(p, k), a_q^+]_- \rangle = 0$ не вошел первый член в (1.8) при $n = 1$.

Раскроем входящие в (2.2) одновременные ($t = 0$) коммутаторы $\eta_q(p, k | p', k')$ и $\langle [i\dot{A}_q(p, k), A_q^+(p', k')]_- \rangle$, выделив из них все возможные одночастичные спаривания $\langle a_k^+, a_k \rangle$. Предварительно по аналогии с квантовой теорией поля [2] введем нормальные произведения, положив, например,

$$a_p^+ a_p = \langle a_p^+ a_p \rangle + :a_p^+ a_p:, \quad (2.4)$$

$$a_q^+ :a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}: = (\delta_{k,0} + \delta_{k,-p+q}) \langle a_q^+ a_q \rangle :a_p^+ a_p: + :a_q^+ a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}:, \quad (2.5)$$

$$:a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}: a_q^+ = (\delta_{k,0} + \delta_{k,-p+q}) \langle a_q a_q^+ \rangle :a_p^+ a_p: + :a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} a_q^+:. \quad (2.6)$$

Соотношения (2.4)–(2.6) являются тождествами и могут служить для определения нормальных произведений, выделенных точками. Очевидно, что нормальные произведения не зависят от порядка сомножителей, так что все операторы рождения a^+ могут быть перемещены влево от a , и

$$:a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} a_q^+: = :a_q^+ a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}:. \quad (2.7)$$

Исходя из определения неприводимой функции при $n = 1$, производя спаривания коммутирующих операторов, с учетом (2.4)–(2.7) получаем

$$\begin{aligned} \eta_q(p, k | p', k') &= \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ a_{p'}]_- \rangle_1 = \\ &= \langle [:a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}:, :a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ a_{p'}:]_- \rangle = \{n_p(1 + n_{p+k} + n_{-k+q}) - n_{p+k} n_{-k+q}\} \times \\ &\quad \times \delta_{p,p'} (\delta_{k,k'} + \delta_{-k-p+q,k}) + \langle :a_p^+ a_{p'+k}^+ a_{p'} a_{p+k}: \rangle (\delta_{k,k'} + \delta_{-k+q,p'+k'}) + \\ &\quad + \langle :a_p^+ a_{p'-p-k+q}^+ a_{p'} a_{-k+q}: \rangle (\delta_{-k-p+q,k'} + \delta_{p+k,p'+k'}) - \\ &\quad - \langle :a_{p+k'}^+ a_{-k'+q}^+ a_{-k+q} a_{p+k}: \rangle \delta_{p,p'} = \eta_q(p, k) 2\delta_q(p, k | p', k') + u_q(p, k | p', k'). \end{aligned} \quad (2.8)$$

В правой части (2.8)

$$\delta_q(p, k | p', k') = \frac{1}{2} \delta_{p,p'} (\delta_{k,k'} + \delta_{-k-p+q,k}) \quad (2.9)$$

– обобщенный символ Кронекера; определения величин $\eta_q(p, k)$ и $u_q(p, k | p', k')$ следуют из двух последних равенств в (2.8). Обратная матрица $\eta_q^{-1}(p, k | p', k')$ может быть получена из интегрального уравнения с неоднородностью, пропорциональной $\eta_q^{-1}(p, k)$.

Аналогично (2.8) преобразуется и входящий в (2.2) коммутатор $\langle [i\dot{A}_q(p, k), A_q^+(p', k')]_- \rangle$. Не приводя подробных выкладок, представим только конечный результат вычислений:

$$\begin{aligned} \langle [i\dot{A}_q(p, k), A_q^+(p', k')]_- \rangle &= \varepsilon_q(p, k) \eta_q(p, k | p', k') + \\ &+ V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) \eta_q(\bar{p}, \bar{k} | p', k') + U_q(p, k | p', k'), \end{aligned} \quad (2.10)$$

где

$$\varepsilon_q(p, k) = \varepsilon_{-k+q} + \varepsilon_{p+k} - \varepsilon_p, \quad \varepsilon_q = \frac{q^2}{2m} - \mu + \frac{N}{V} \nu(0) + \frac{1}{V} \sum_{k_1} \nu(k_1) n_{-k_1+q}, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned}
V_q(p, k | p', k') = \frac{1}{V} \Bigg\{ & (1 + n_{p+k} + n_{-k+q}) \frac{1}{2} (\nu(k - k') + \nu(k + k' + p - q)) \delta_{p,p'} + \\
& + (n_p - n_{p+k}) (\nu(k) + \nu(p - p')) \delta_{k,k'} + \\
& + (n_p - n_{-k+q}) (\nu(p + k - q) + \nu(p - p')) \delta_{-k-p+q,k'} \Bigg\} \quad (2.12)
\end{aligned}$$

получены в результате всех допустимых спариваний в $i\dot{A}_q(p, k)$. В результате выделения нормальных произведений и спариваний по разные стороны от запятой, используя уравнения движения

$$\begin{aligned}
i\ddot{a}_p = \left\{ \frac{p^2}{2m} - \mu + \frac{N}{V} \nu(0) + \frac{1}{V} \sum_{k_1} \nu(k_1) n_{-k_1+q} \right\} a_q + i\dot{a}_q^{ir}, \\
i\dot{a}_q^{ir} = \frac{1}{V} \sum_{p_1 k_1} \nu(k_1) :a_{p_1}^+ a_{p_1+k_1} a_{-k_1+q}:, \quad (2.13)
\end{aligned}$$

где $i\dot{a}_q^{ir}$ – не приводимая к a_q часть оператора $i\dot{a}_q$, получаем, что $U_q = U_q^{(1)} + U_q^{(2)} + U_q^{(3)} + U_q^{(4)}$, где

$$\begin{aligned}
U_q^{(1)}(p, k | p', k') = U_q^{(1)}(p, k) \delta_{p,p'} (\delta_{k,k'} + \delta_{-k-p+q,k}), \\
U_q^{(1)}(p, k) = (n_p - n_{p+k}) \langle :i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k+q}^+ : \rangle + (n_p - n_{-k+q}) \langle :i\dot{a}_{p+k}^{ir} a_{p+k}^+ : \rangle + \\
+ (1 + n_{p+k} + n_{-k+q}) \langle :i\dot{a}_p^{ir} a_p : \rangle, \quad (2.14)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_q^{(2)}(p, k | p', k') = \delta_{p,p'} (n_p - n_{-k'+q}) \Big\langle : (a_{p+k} [i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k'+q}^+]_- + \\
+ [i\dot{a}_{p+k}^{ir} a_{-k'+q}^+]_- a_{-k+q}) a_{p+k}^+ : \Big\rangle + (n_{p'} - n_{-k'+q}) \times \\
\times \Big\langle : (a_p^+ a_{p+k} [a_{p'}, [i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k'+q}^+]_-]_- + a_p^+ [a_{p'}, [i\dot{a}_{p+k}^{ir} a_{-k'+q}^+]_-]_- a_{-k+q} + \\
+ [a_{p'}, [i\dot{a}_p^{ir} a_{-k'+q}^+]_-]_- a_{p+k} a_{-k+q}) a_{p'+k'}^+ : \Big\rangle + (k' \rightarrow -k' - p' + q), \quad (2.15)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_q^{(3)}(p, k | p', k') = (1 + n_{p'+k'} + n_{-k'+q}) \times \\
\times \Big\langle : a_p^+ a_{p+k} [[i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k'+q}^+]_-]_- a_{p'+k'}^+]_- a_{p'} : \Big\rangle + \\
+ (\delta_{k,k'} + \delta_{-k+q,p'+k'}) \Big\{ (1 + n_{-k+q} + n_{p'+k}) \times \\
\times \Big\langle : (a_p^+ [i\dot{a}_{p+k}^{ir} a_{p'+k}^+]_- + [i\dot{a}_p^{ir} a_{p'+k}^+]_- a_{p+k}) a_{p'} : \Big\rangle + \\
+ (n_{p'} - n_{-k+q}) \Big\langle : (a_p^+ [a_{p'}, i\dot{a}_{p+k}^{ir}]_- + [a_{p'}, i\dot{a}_p^{ir}]_- a_{p+k}) a_{p'+k}^+ : \Big\rangle \Big\} + \\
+ (k \rightarrow -k - p + q), \quad (2.16)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_q^{(4)}(p, k | p', k') = \Big\{ \Big\langle : (a_p^+ a_{p+k} [i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k'+q}^+]_- + a_p^+ [i\dot{a}_{p+k}^{ir} a_{-k'+q}^+]_- a_{-k+q} + \\
+ [i\dot{a}_p^{ir} a_{-k'+q}^+]_- a_{p+k} a_{-k+q}) a_{p'+k'}^+ a_{p'} : \Big\rangle + (k' \rightarrow -k' - p' + q) \Big\} + \\
+ \Big\{ \Big\langle : (a_p^+ i\dot{a}_{p+k}^{ir} + i\dot{a}_p^{ir} a_{p+k}) a_{p'+k}^+ a_{p'} : \Big\rangle - \Big\langle : a_{p+k} i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ : \Big\rangle -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle :a_p^+ a_{p+k} [a_{p'}, i\dot{a}_{-k+q}^{ir}] - a_{k'+q}^+ a_{p'+k'} : \rangle + (k \rightarrow -k - p + q) \Big\} - \\
& - \langle :[a_{p'}, i\dot{a}_p^{+ir}] - a_{p+k} a_{-k+q} a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ : \rangle.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

В (2.15)–(2.17) для краткости не выписаны явно члены, получающиеся заменами $k \rightarrow -k - p + q$ и $k' \rightarrow -k' - p' + q'$.

С учетом обозначений, введенных в (2.11), (2.12), (2.14)–(2.17), представим второе уравнение цепочки (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
EG_{q,E}(p, k | p', k') &= \eta_q(p, k | p', k') + \varepsilon_q(p, k) G_{q,E}(p, k | p', k') + \\
&+ V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k') + \\
&+ \left\{ U_q(p, k | \bar{p}', \bar{k}') + \langle \langle i\dot{A}_q(p, k) | -iA_q^+(\bar{p}', \bar{k}') \rangle \rangle_{2,E} \right\} \times \\
&\times \eta_q^{-1}(\bar{p}', \bar{k}' | \bar{p}, \bar{k}) G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k').
\end{aligned} \tag{2.18}$$

В этом уравнении легко устанавливаются порядки членов по взаимодействию $\nu(k)$. Так, величины $\eta_q(p, k)$, введенные в (2.8), и $\varepsilon_q(p, k)$ из (2.11) имеют нулевой порядок, коэффициент $V_q(p, k | p', k')$ (2.12) линеен по ν , а величины $U_q(p, k | p', k')$ квадратичны (имеют порядок ν^2).

Действительно, нормальные произведения в $U_q(p, k | p', k')$ такие, например, как $\langle :a_q^+ a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} : \rangle$, $\langle :a_p^+ a_{p_1+k_1} a_{-k_1-k+q} a_{p'-p-k+q} a_{p'} : \rangle$, при $\nu = 0$ обращаются в нуль по определению. В этом можно убедиться и непосредственно, воспользовавшись спектральным представлением [3] формулы (2.3):

$$\begin{aligned}
\langle :a_q^+ a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} : \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{e^{\beta\omega} - 1} \times \\
&\times \frac{1}{V} \sum \nu(k_1) \{ G_{q,\omega-i\varepsilon}(p, k | p_1, k_1) G_{q,\omega-i\varepsilon} - G_{q,\omega+i\varepsilon}(p, k | p_1, k_1) G_{q,\omega+i\varepsilon} \},
\end{aligned} \tag{2.19}$$

где в правую часть (2.19) входит $\nu(k_1)$. Кроме того, $\nu(k)$ входит и в комбинации типа $\langle :i\dot{a}_{-k+q}^{ir} a_{-k+q}^+ : \rangle$ явно. В результате получаем, что $U_q(p, k | p', k') \sim \nu^2$.

Наконец, последний член в фигурных скобках (2.18), зависящий от E , имеет очевидный порядок ν^2 .

Полагая $\eta_q(p, k | p', k') \cong \eta_q(p, k) 2\delta_q(p, k | p', k')$ в (2.8), сохраняя $V_q(p, k | p', k')$ (см. (2.12)) и отбрасывая все остальные (порядка ν^2) члены в правой части (2.18), приходим к линейному интегральному уравнению

$$\begin{aligned}
G_{q,E}(p, k | p', k') &= (E - \varepsilon_q(p, k))^{-1} \eta_q(p, k) \delta_{p,p'} (\delta_{k,k'} + \delta_{-k-p+q,k}) + \\
&+ (E - \varepsilon_q(p, k))^{-1} V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k') = \\
&= (E - \varepsilon_q(p, k))^{-1} 2\delta_q(p, k | p', k') + \\
&+ (E - \varepsilon_q(p, k))^{-1} \Theta_{q,E}(p, k | p', k') (E - \varepsilon_q(p', k'))^{-1} \eta_q(p', k'),
\end{aligned} \tag{2.20}$$

где $\Theta_{q,E}(p, k | p', k')$ – решение уравнения Липпмана–Швингера,

$$\Theta_{q,E}(p, k | p', k') = V_q(p, k | p', k') + V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) (E - \varepsilon_q(\bar{p}, \bar{k}))^{-1} \Theta_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k'). \tag{2.21}$$

Уравнение (2.21), как известно, может быть использовано для перенормировки двухчастичного взаимодействия или экранировки дальнедействующих сил (см., например, [4]). Целью настоящей работы является более детальный учет взаимодействия, включающий члены порядка ν^2 , входящие не только в стационарные величины $U_q(p, k | p', k')$, но и в $\langle\langle i\dot{A}_q(p, k) | -i\dot{A}_q^+(p', k') \rangle\rangle_{2,E}$ в уравнении (2.18).

3. ОПТИМАЛЬНОЕ РАСЦЕПЛЕНИЕ ЦЕПОЧКИ УРАВНЕНИЙ

Полученные выше соотношения (2.1), (2.2) (или (2.18)) и (2.3) представляют собой по сути своей тождества и превращаются в уравнения, если произвести конкретное расщепление в (2.18). Предварительно введем вспомогательную функцию $\tilde{G}_{q,E}(p, k | p', k')$, которая позволит учесть величины порядка ν^2 в обоих членах, расположенных в фигурных скобках в (2.18). Функция $\tilde{G}_{q,E}(p, k | p', k')$ получается из $G_{q,E}(p, k | p', k') = \langle\langle a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p \rangle\rangle_{1,E}$ спариванием операторов по разные стороны от вертикальной черты. В результате получаем

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q,E}(p, k | p', k') &= \langle\langle \underbrace{a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}}_{| a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p} \rangle\rangle_E \delta_{p,p'} (\delta_{k,k'} + \delta_{-k-p+q,k}) = \\ &= G_{q,E}(p, k) 2\delta_q(p, k | p', k') = \\ &= -i \int_0^\infty dt e^{iEt} \left\{ \langle a_p^+(t) a_p^+ \rangle \langle a_{p+k}(t) a_{p+k}^+ \rangle \langle a_{-k+q}(t) a_{-k+q}^+ \rangle - \right. \\ &\quad \left. - \langle a_p a_p^+(t) \rangle \langle a_{p+k}^+ a_{p+k}(t) \rangle \langle a_{-k+q}^+ a_{-k+q}(t) \rangle \right\} 2\delta_q(p, k | p', k'), \end{aligned} \quad (3.1)$$

где нижними скобками отмечены необходимые спаривания, а явный вид операции представлен последним равенством в (3.1).

Аналогично получаем и уравнение для функции (3.1):

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_{q,E}(p, k) &= \eta_q(p, k) + \langle\langle \underbrace{[a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p} \rangle\rangle_E = \\ &= \eta_q(p, k) - i \int_0^\infty dt e^{iEt} \left\{ \langle i\dot{a}_p^+(t) a_p \rangle \langle a_{p+k}(t) a_{p+k}^+ \rangle \langle a_{-k+q}(t) a_{-k+q}^+ \rangle + \right. \\ &\quad + \langle a_p^+(t) a_p \rangle \langle i\dot{a}_{p+k}(t) a_{p+k}^+ \rangle \langle a_{-k+q}(t) a_{-k+q}^+ \rangle + \\ &\quad + \langle a_p^+(t) a_p \rangle \langle a_{p+k}(t) a_{p+k}^+ \rangle \langle i\dot{a}_{-k+q}(t) a_{-k+q}^+ \rangle - \\ &\quad \left. - \text{члены с переставленными } a \text{ и } a^+ \right\}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя обозначения, введенные в (3.1) и (3.2), и умножая на $\tilde{G}_q^{-1}(p, k)\tilde{G}_q(p, k)$ второй член в правой части (3.2), последовательно получаем

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_{q,E}(p, k) &= \eta_q(p, k) + \langle\langle \underbrace{[a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p} \rangle\rangle_E \left\{ E - \right. \\ &\quad \left. - \tilde{G}_{q,E}(p, k) \langle\langle \underbrace{a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_-} \rangle\rangle_E \right\} \eta_q^{-1}(p, k) \tilde{G}_{q,E}(p, k) = \\ &= \eta_q(p, k) + \left\{ \langle\langle \underbrace{[a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_-, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p} \rangle\rangle_- + \right. \\ &\quad \left. + \langle\langle \underbrace{[a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_-} \rangle\rangle_E - \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p \rangle \rangle \tilde{G}_q^{-1}(p, k) \times \\
& \times \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_- \rangle \rangle_E \} \eta_q^{-1}(p, k) \tilde{G}_{q,E}(p, k) = \\
& = \eta_q(p, k) + \varepsilon_q(p, k) \tilde{G}_q(p, k) + \left\{ U_q^{(1)}(p, k) + \right. \\
& \left. + \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_- \rangle \rangle_{\bar{1}, E} \right\} \eta_q^{-1}(p, k) \tilde{G}_{q,E}(p, k), \quad (3.3)
\end{aligned}$$

где $U_q^{(1)}(p, k)$ определено в (2.14), а $\varepsilon_q(p, k)$ – в (2.11).

Уравнение (3.3) по форме близко к (2.18), однако никакой дополнительной информации по сравнению с одночастичной функцией (2.1) оно не содержит, представляя собой тождество для произведения трех одночастичных корреляционных функций.

Используем теперь вспомогательное уравнение, записанное в виде последнего равенства в (3.3). Вычтем из равенства (2.18) равенство (3.3), умноженное на $\tilde{G}_q^{-1}(p, k) G_{q,E}(p, k | p', k')$. В результате член $(E - \varepsilon_q(p, k)) G_{q,E}(p, k | p', k')$ сократится, и мы получим

$$\begin{aligned}
& \eta_q(p, k) \tilde{G}_q^{-1}(p, k) G_{q,E}(p, k | p', k') = \eta_q(p, k | p', k') + V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k') + \\
& + \left\{ U_q(p, k | \bar{p}', \bar{k}') + \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-\bar{k}'+q}^+ a_{\bar{p}'+k}^+ a_{\bar{p}'}]_- \rangle \rangle_{2,E} \right\} \times \\
& \times \eta_q^{-1}(\bar{p}', \bar{k}' | \bar{p}, \bar{k}) G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k') - \\
& - \left\{ U_q^{(1)}(p, k) + \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_- \rangle \rangle_{\bar{1}, E} \right\} \times \\
& \times \eta_q^{-1}(p, k) G_{q,E}(p, k | p', k'). \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Произойдет также вычитание из $U_q(p, k | p', k')$ величины $U_q^{(1)}(p, k)$, в результате чего величина $U_q^{(1)}(p, k | p', k')$, определяемая формулой (2.14), заменится на величину $U_q^{(1)}(p, k) \eta_q^{-1}(p, k) u_q(p, k | p', k')$ (см. (2.8)) порядка ν^3 .

Наконец, в последних (зависящих от E) членах в разности

$$\begin{aligned}
& \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-k'+q}^+ a_{p'+k}^+ a_{p'}]_- \rangle \rangle_{2,E} - \\
& - \langle \langle [a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}, H]_- | [H, a_{-k+q}^+ a_{p+k}^+ a_p]_- \rangle \rangle_{\bar{1}, E} \eta_q^{-1}(p, k) \eta(p, k | p', k') \sim \nu^2 \quad (3.5)
\end{aligned}$$

будем учитывать только величины, составленные из выражений типа $\langle a_p^+(t) a_p \rangle \times \langle a_{p+k}(t) a_{p+k}^+ \rangle \langle : \dot{a}_{-k+q}^{ir}(t) (-i \dot{a}_{-k+q}^{+ir}) : \rangle$, имеющие порядок ν^2 . Остальные члены типа $\langle a_p^+(t) a_p \rangle \langle : \dot{a}_{p+k}^{ir}(t) a_{p+k}^+ : \rangle \langle : a_{-k+q}(t) i \dot{a}_{-k+q}^{ir} : \rangle$, имеющие порядок ν^4 , и члены более высокого порядка в рассматриваемом приближении отбрасываются.

Переход от (2.18) с помощью (3.3) к тождеству (3.4) позволяет, отбрасывая согласно (3.5) члены порядка ν^4 , получить замкнутое уравнение, содержащее величины порядка ν^2 . Умножая (3.4) на $\tilde{G}_{q,E}(p, k) \eta_q^{-1}(p, k)$, для $G_{q,E}(p, k | p', k')$ получаем окончательное уравнение

$$\begin{aligned}
& G_{q,E}(p, k | p', k') = \tilde{G}_{q,E}(p, k) \eta_q^{-1}(p, k) \eta_q(p, k | p', k') + \tilde{G}_{q,E}(p, k) \eta_q^{-1}(p, k) \times \\
& \times \{ V_q(p, k | \bar{p}, \bar{k}) + \tilde{U}_{q,E}(p, k | \bar{p}', \bar{k}') \eta_q^{-1}(\bar{p}', \bar{k}' | \bar{p}, \bar{k}) \} G_{q,E}(\bar{p}, \bar{k} | p', k'), \quad (3.6)
\end{aligned}$$

где в обозначении $\tilde{U}$ учтена разница между U и $U^{(1)}$ в (3.4) и часть порядка ν^2 в (3.5).

Расщепление, приводящее к (3.6), является по сравнению с (2.20) оптимальным. Оно приводит к ускоренной сходимости (в уравнении (3.6) отбрасываются члены порядка ν^4 , в то время как в уравнении (2.20) – члены порядка ν^2). Благодаря учету членов порядка ν^2 (стационарных и зависящих от E) функция Грина свободных пропагаторов, пропорциональная $(E - \varepsilon_q(p, k))^{-1}$, в (2.20) заменяется в (3.6) на функцию $\tilde{G}_{q,E}(p, k)$, выражающуюся через произведения трех одночастичных функций (3.1), что характерно для приближения взаимодействующих мод.

В результате оптимального расщепления мы пришли к самосогласованной системе нелинейных уравнений (2.1), (2.3) и (3.6) для функций $G_{q,E} = \langle \langle a_q | a_q^+ \rangle \rangle_E$, $\langle \langle a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | a_q^+ \rangle \rangle_E$ и $G_{q,E}(p, k | p', k') = \langle \langle a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q} | a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ a_{p'} \rangle \rangle_{1,E}$ и связанных с ними спектральными представлениями стационарных функций.

Перейдя с помощью спектральных представлений [3] к корреляционным функциям, будем иметь соотношения, связывающие все входящие в уравнения величины $\langle a_q^+ a_q \rangle$, $\langle :a_q^+ a_p^+ a_{p+k} a_{-k+q}: \rangle$ и $\langle :a_p^+ a_{-k'+q}^+ a_{p'+k'}^+ a_{p'} a_{p+k} a_{-k+q}: \rangle$. При этом единственными определяющими систему частиц параметрами являются плотность и фурье-образ потенциала парного взаимодействия. Остальные функции входят как самосогласованные решения нелинейных уравнений.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенное в работе приближение, осуществляемое путем оптимального обрыва цепочки уравнений для одночастичной функции (2.1), (2.2), применимо также и в других задачах статистической механики. Ранее оно кратко рассматривалось в [5] при исследовании уравнений молекулярной гидродинамики. Характерной особенностью метода является построение вспомогательного уравнения, которое позволяет заменить появляющиеся в процессе вычислений свободные пропагаторы на точные одночастичные корреляционные функции. Другими словами, мы приходим в данном случае к приближению взаимодействующих мод, которое широко применялось в рамках метода Мори (см., например, работы [6]), но только интуитивно, без должного теоретического обоснования. Изложенный в настоящей работе подход может помочь в достижении этой цели.

Список литературы

- [1] Ю. А. Церковников, *ТМФ*, **129**:3 (2001), 432.
- [2] Н. Н. Боголюбов, Д. В. Ширков, *Квантовые поля*, Наука, М., 1980.
- [3] Д. Н. Зубарев, *УФН*, **71**:1 (1960), 71.
- [4] Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников, *Тр. МИАН*, **175** (1986), 134.
- [5] Ю. А. Церковников, *Тр. МИАН*, **228** (2000), 286.
- [6] W. S. Götze, M. Lücke, *Phys. Rev. A*, **11** (1975), 2173; S. Yip, *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **30** (1979), 547.

Поступила в редакцию 23.XI.2005 г.