Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Уточнение закона Ципфа–Мандельброта
и лакунарность в идеальном газе, *ТМФ*, 2006, том 147,
номер 3, 511–512

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf1992>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.84.234.179

26 апреля 2023 г., 14:31:27

© 2006 г.

В. П. Маслов*

УТОЧНЕНИЕ ЗАКОНА ЦИПФА–МАНДЕЛЬБРОТА И ЛАКУНАРНОСТЬ В ИДЕАЛЬНОМ ГАЗЕ

Формула Ципфа–Мандельброта для частот встречаемости уточнена и применена к идеальному газу. Это уточнение существенно сказывается на величине префактора c_2 и, следовательно, на величине лакунарности.

Ключевые слова: закон Ципфа–Мандельброта, идеальный газ, префактор, лакунарность.

Рассматривается нестационарное уравнение Шредингера одной частицы с дискретным спектром. Замена $\Psi(x, t) = \varphi_i(x)e^{i\omega_i t/\hbar}$ приводит к спектру “частот” $\omega_1, \dots, \omega_l, \dots$, отвечающих одной частице. Пусть

$$\sum_{i=l}^n N_i \omega_i = E, \quad (1) \quad \{1\}$$

где E – заданная энергия, а N_i – число частиц на уровне ω_i , $\sum_{i=l}^n N_i = N$, где N – общее число частиц в диапазоне (1), $N \rightarrow \infty$, а $n \gg N$.

Пусть $\{\omega_{i_k}\}$ – последовательность тех частот, на которых встречается хотя бы одна частица. Оставшиеся частицы называются лакунарными [1]. Пронумеруем частицы, начиная от самой высокой частоты из $\{\omega_{i_k}\}$ в формуле (1) в следующем порядке: присвоим частице первый номер на самой высокой частоте, далее на следующей частоте, при этом частицы, отвечающие одной частоте, нумеруем в любом порядке. Предполагается, что l столь велико, что таких частиц конечное число при $N \rightarrow \infty$, и лакунарность достаточно велика. Таким образом, все N частиц оказываются пронумерованными и каждой частице $N^{(s)}$ можно сопоставить частоту $\omega^{(s)} \in \{\omega_{i_k}\}$. Некоторым частицам сопоставляется одна и та же частота. Следовательно, сумма частот $\sum_s \omega^{(s)} = E$.

Теперь закодируем это расположение частиц. Отметим, что любое другое упорядочение $\{\omega_{i_k}\}$ приводит к удлинению кода. Для того чтобы можно было однозначно декодировать это расположение, будем производить нумерацию частиц простыми числами (ясно, что нумерацию можно производить или целыми, или четными, или нечетными, или простыми числами, лишь бы порядок был сохранен, но только в этом последнем случае мы можем однозначно декодировать их расположение¹⁾).

¹⁾Эта идеология близка к идеологии доказательства теоремы Геделя о неполноте [2].

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: v.p.maslov@mail.ru

Пусть Υ_i – последовательность простых чисел: $\Upsilon_1 = 1$, $\Upsilon_2 = 2$, $\Upsilon_3 = 3$, $\Upsilon_4 = 5$, $\Upsilon_5 = 7$, В Интернете легко найти последовательность простых чисел до самых высоких значений. Разумеется, минимальным код будет для случая, когда мы не пропускаем ни одного простого числа при нумерации.

Длина кода s -й частицы равна $[\log_2 \Upsilon_s] + 1$, а длина кода всего расположения равна

$$\sum_s \omega^{(s)} ([\log_2 \Upsilon_s] + 1) = \Gamma.$$

При фиксированной длине закодированного расположения $\Gamma' \geq \Gamma$ найдем наиболее вероятное расположение частот $\omega^{(s)}$ из условия максимума энтропии Шеннона. Нормируя $P_s = \omega^{(s)}/E$, находим энтропию Шеннона

$$S = - \sum_s P_s \log_2 P_s.$$

При условии постоянства длины кода Γ находим максимум энтропии Шеннона, используя метод неопределенных множителей Лагранжа аналогично [3], получаем

$$\omega^{(s)} = c_1 + c_2 e^{-c_3([\log_2 \Upsilon_s] + 1)},$$

где c_1 , c_2 , c_3 – некоторые константы, а поскольку, как известно, $\Upsilon_s \sim s/\log_2 s$, то мы получаем

$$\omega^{(s)} = c_1 + c_2 \left(\frac{\log_2 s}{s} \right)^{c_3}, \quad (2) \quad \{2\}$$

что, если выбросить член $\log_2 s$, совпадает с законом Ципфа–Мандельброта (c_3 – размерность, c_2 – префактор, а величину c_1 , которая зависит от $\Gamma' - \Gamma$, назовем переопределенностью) [1].

Отметим, что с учетом [4] и считая, что N конечно, а частицы разбросаны по частотам “без предпочтения”, мы получим

$$\sum_{i=0}^k \omega_{n-i} = \sum_{i=0}^k \frac{c_4}{1 - e^{-c_5 N_{n-i}}},$$

где c_4 , c_5 – константы, а $k \leq n$, т.е. распределение Бозе–Эйнштейна, в котором число частиц поменялось местами с частотами, не противоречит формуле (2), так как описывает все частоты, в том числе и лакунарные [1], на которых частиц нет (и N конечно). Таким образом, полученная формула отличается от формулы Ципфа–Мандельброта

$$\omega_s = \frac{c'_2}{(s - c'_1)^{c'_3}}.$$

Список литературы

- [1] Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.
- [2] Э. Мендельсон, *Введение в математическую логику*, Наука, М., 1976.
- [3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Статистическая физика*, Наука, М., 1964.
- [4] В. П. Маслов, *ТМФ*, **145**:3 (2005), 433–436.

Поступила в редакцию 10.V.2006 г.