Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. М. Алешин, О. О. Трубачев, О равновесном состоянии неоднородной плазмы,
ТМФ, 2004, том 138, номер 1, 157–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 15:24:45

© 2004 г.

И. М. Алешин*, О. О. Трубачев†

О РАВНОВЕСНОМ СОСТОЯНИИ НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЫ

Рассмотрена проблема самосогласованного определения существенно неоднородного равновесного состояния классической плазмы. Построены решения стационарных уравнений Власова–Пуассона в виде локализованного переходного слоя, который сопрягает области однородных плазм, имеющих разные равновесные параметры. Этот слой также может трансформироваться в локальное возмущение внутри однородной плазмы. В обоих случаях решение не содержит ни массовых, ни электрических токов и все электро- и гидродинамические величины непрерывны со своими производными. Параметры сопряженных областей однозначно определяют структуру переходного слоя.

Ключевые слова: нелинейная кинетическая теория, неоднородная горячая плазма, равновесное состояние.

1. ВВЕДЕНИЕ

В предлагаемой работе рассмотрена проблема самосогласованного определения существенно неоднородного равновесного состояния классической плазмы. Сразу уточним, что само понятие равновесия в системах “частицы–поле” может трактоваться по-разному. Можно выделить по крайней мере два подхода к построению равновесной функции распределения плазмы. Первый основан на применении к системам частиц с дальним действием методов кинетической теории нейтральных газов [1]–[3], а второй исходит из определяющей роли самосогласованного взаимодействия в таких системах [4]. Не останавливаясь подробно на анализе и сравнении указанных выше исследований, отметим, что они справедливы только для неограниченных систем. Общепризнанной самосогласованной модели неоднородной плазмы к настоящему времени не существует. В нейтральном газе учет стенок не принципиален ввиду перехода к статистическому пределу. В неоднородной плазме большое количество несвязанных заряженных частиц может привести к возникновению поверхностного заряда, а значит, и *объемного* элект-

*Объединенный институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, Москва, Россия. E-mail: ima@dubna-2.scgis.ru

†Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: oleg@decl.sinp.msu.ru

ромагнитного поля. Это означает, что в системах с дальнодействием малое изменение внешнего воздействия вносит возмущения, которые, вообще говоря, могут разрушить или сильно исказить исходное состояние системы. Не претендуя на исчерпывающее решение проблемы, мы предприняли попытку расширить понятие равновесного состояния квазинейтральной плазмы на существенно неоднородные системы.

Будем исходить из предположения, что равновесное распределение должно удовлетворять уравнению Власова. При этом предполагается выполнимость ряда *необходимых* условий. Во-первых, очевидно, что равновесное состояние должно быть стационарным. Во-вторых, должны отсутствовать макроскопические заряды и потоки (как массовый, так и зарядовый). Наконец, ввиду наличия в плазме большого количества собственных слабозатухающих мод возмущений, обеспечивающих макроскопическое взаимодействие между частями неоднородной системы, важно, чтобы исходное состояние было устойчиво по отношению к малым возмущениям.

В разделе 2 приведен краткий обзор существующих точных решений уравнений Власова–Пуассона и показано, что ни одно из них не может описывать равновесное состояние плазмы. Раздел 3 посвящен выяснению необходимых свойств равновесной неоднородной функции распределения. В разделе 4 рассмотрены конкретные примеры распределений. Заключение содержит основные выводы.

2. ИЗВЕСТНЫЕ ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–ПУАССОНА

Так как в равновесии временная зависимость должна отсутствовать, рассмотрим сначала известные стационарные состояния плазмы. Начало исследований в этом направлении было положено классической работой Бернштейн–Грина–Крускала [5], идея которой состоит в том, что если в некоторой системе отсчета возмущение в плазме не зависит от времени, легко найти решение уравнения Власова

$$v \frac{\partial f_\alpha}{\partial x} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} = 0, \quad (1)$$

которое является произвольной функцией интеграла уравнений характеристик

$$f_\alpha = f_\alpha(\mathcal{E}_\alpha), \quad \mathcal{E}_\alpha = \frac{m_\alpha v_\alpha^2}{2} + e_\alpha \varphi. \quad (2)$$

Здесь m_α – масса частицы сорта α , e_α – ее заряд, φ – электростатический потенциал. Если имеются области пространства, где потенциальная энергия частиц $e_\alpha \varphi$ образует “яму”, то явный вид функции f_α для пролетных частиц (т.е. частиц, движущихся инфинитно) может отличаться от соответствующей зависимости для захваченных частиц. В работе [5] было показано, что по заданным потенциалу и функции распределения пролетных частиц можно определить функцию распределения захваченных частиц, построив тем самым точное решение уравнений Власова–Максвелла (или, точнее, уравнений Власова–Пуассона, так как речь идет об электростатических возмущениях).

В дальнейшем оказалось, что более продуктивно задавать не потенциал возмущения, а распределение захваченных частиц, основываясь при этом на тех или иных предположениях о процессах в системе. Фактически делается попытка угадать ответ, задаваясь анзацем с несколькими параметрами. Последующее определение этих параметров позволяет сделать решение самосогласованным. В этом случае путем интегрирования по скоростям задача формально сводится к решению обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi \left(e_i \int_{-\infty}^{+\infty} f_i dv + e_e \int_{-\infty}^{+\infty} f_e dv \right) = -4\pi \rho(\varphi), \quad (3)$$

а параметры определяются либо в процессе, либо после интегрирования этого уравнения. Уравнение (3) имеет интеграл

$$W = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + U(\varphi), \quad \text{где } U(\varphi) = 4\pi \int \rho(\varphi) d\varphi \quad (4)$$

— потенциал Сагдеева, а константа W определяется из граничных условий, что позволяет получить решение в неявном виде

$$x = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{2(W - U(\varphi))}} + \text{const}. \quad (5)$$

Точные стационарные решения уравнений Власова–Пуассона можно разделить на два типа. Первые описывают движущиеся возмущения — ленгмюровские волны [6]–[9], уединенные [10], [11] и бесстолкновительные ударные волны [12]. Однако в выбранной нами (сопутствующей) системе отсчета эти решения сопровождаются потоком вещества и являются существенно неравновесными образованиями. Другой тип стационарных решений уравнений Власова получил название “двойного слоя” и рассматривался впервые в геофизических приложениях [13]–[16]. Сюда же следует отнести так называемые плазмиды, описанные в книге [17]. Однако и тут наличие в решении электрического тока не позволяет считать плазму с двойным слоем равновесной. Дополнительные ограничения на применимость решения типа двойного слоя (как и в родственной задаче о плоском диоде [18]–[20]) связаны с пренебрежением самосогласованным магнитным полем тока.

Таким образом, ни одно из перечисленных решений не может описывать равновесный переход от одного состояния к другому или к вакууму. Тем не менее в следующем разделе мы покажем, что нужное нам решение может быть построено.

3. ОБЩИЕ СВОЙСТВА ТОЧНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА–ПУАССОНА В КВАЗИРАВНОВЕСИИ

Приступим теперь к построению решения, удовлетворяющего требованиям, сформулированным во введении. Рассмотрим двухкомпонентную плазму, разделенную на две

области с разными равновесными параметрами – температурой и концентрацией компонент. Построим решение уравнений Власова–Пуассона, которое описывает стационарный переход между этими областями. При этом ограничимся рассмотрением наиболее простых структур, чтобы при удалении от области перехода полученное состояние как можно меньше отличалось от равновесия однородной системы. Поэтому будем считать, что распределение частиц по скоростям четное – это гарантирует нам отсутствие тока. Предположим, что потенциал монотонно изменяется от φ_0 , своего значения на минус бесконечности, до нуля на плюс бесконечности (рис. 1). Исследуем возможность существования такого решения и его общие свойства, не конкретизируя явный вид функций распределения $f_\alpha(\mathcal{E}_\alpha)$.

Рис. 1

Очевидно, что такая координатная зависимость потенциала обуславливает появление сепаратрис на фазовой плоскости частиц (x, v) , разделяющих пролетные и захваченные (в нашем случае – отраженные) частицы. Из физических соображений ясно, что функция распределения при переходе через сепаратрису не обязана быть непрерывной [11]. Более того, если предположить, что и функция распределения, и электрическое поле непрерывны, то решения с выбранной нами структурой потенциала не существует. Действительно, домножим уравнения (1) для частиц каждого сорта на v и проинтегрируем их по скоростям,

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} m v^2 f_\alpha dv = e_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} v \frac{\partial f_\alpha}{\partial v} dv. \quad (6)$$

Будем считать, что

$$v f_\alpha \rightarrow 0, \quad v \rightarrow \pm\infty.$$

Тогда в силу непрерывности f и $\partial f_\alpha / \partial v$ интегралы в равенстве (6) могут быть взяты по частям, что после суммирования по сортам частиц приводит к соотношению

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial x} &= -e_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} (n_i(x) - n_e(x)) \equiv E(x) \rho(x), \\ n_\alpha(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha dv, \quad \mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} m_i v^2 f_i dv + \int_{-\infty}^{\infty} m_e v^2 f_e dv. \end{aligned}$$

Здесь введены концентрации n_α частиц сорта α , полное газокINETическое давление $\mathcal{P}$, электрическое поле $E = -\varphi'(x)$ и плотность электрического заряда ρ ; e_0 – элементарный заряд. Используя уравнение Пуассона (3), получаем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{P} - \frac{1}{8\pi} E^2 \right) = 0, \quad \text{т.е.} \quad \mathcal{P} - \frac{1}{8\pi} E^2 = \text{const}. \quad (7)$$

Так как давление $\mathcal{P}$ по своему определению – величина существенно положительная, а $E(\pm\infty) = 0$, то отсюда следует постоянство газокINETического давления. При этом очевидно, что при выбранной нами структуре потенциала условие (7) не может быть реализовано равновесным распределением (например распределением Максвелла–Больцмана).

Поэтому рассмотрим, к чему приводит наличие скачков в функции распределения. В выбранной нами геометрии потенциала особенности возникают в двух точках: $v_i^* = \sqrt{2e_0(\varphi_0 - \varphi)/m_i}$ для ионов и $v_e^* = -\sqrt{2e_0\varphi/m_e}$ для электронов, учет которых при интегрировании по частям в формуле (6) приводит к появлению дополнительных слагаемых вида $2v_\alpha \Delta f_\alpha$, где $\Delta f_\alpha = f_\alpha(v_\alpha^* + 0) - f_\alpha(v_\alpha^* - 0)$. Поэтому вместо формулы (7) получим

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\mathcal{P} - \frac{1}{8\pi} E^2 - \frac{2(2e_0)^{3/2}}{3} \left(\frac{\Delta f_e}{\sqrt{m_e}} \varphi(x)^{3/2} - \frac{\Delta f_i}{\sqrt{m_i}} (\varphi_0 - \varphi(x))^{3/2} \right) \right] = 0, \quad (8)$$

что согласуется с предполагаемой координатной зависимостью потенциала. В частности, из последней формулы следует, что в рассматриваемой модели реализуется перепад давления

$$\Delta \mathcal{P} = \mathcal{P}(\varphi_0) - \mathcal{P}(0) = \frac{2}{3} (2e_0^{3/2}) (\Delta f_i + \Delta f_e).$$

Отметим, что наличие в формуле (8) полуцелых степеней потенциала приводит к неоднозначности его координатной зависимости.

Рассмотрим теперь, как отсутствие непрерывности функций распределения сказывается на координатной зависимости потенциала. Предполагая линейный закон изменения f_α вблизи соответствующих граничных значений v_α^* , легко получить, что функциональная зависимость плотности заряда от потенциала при $x \rightarrow -\infty$ должна иметь вид

$$\rho(\varphi) \sim c_1 \Delta f_i \sqrt{\varphi_0 - \varphi} + c_2 (\varphi_0 - \varphi), \quad \varphi \rightarrow \varphi_0,$$

где c_1, c_2 – константы, зависящие от явного вида функции распределения. Постоянное слагаемое отсутствует в силу требования нейтральности плазмы на бесконечности. Отсюда с учетом условия отсутствия электрического поля в бесконечно удаленных точках следует, что потенциал Сагдеева из (4), который в данном пределе имеет вид

$$U(\varphi) \sim W - \frac{3c_1}{2} (\varphi_0 - \varphi)^{3/2} - \frac{c_2}{2} (\varphi_0 - \varphi)^2, \quad \varphi \rightarrow \varphi_0,$$

должен иметь максимум при $\varphi = \varphi_0$. Из последней формулы видно, что именно слагаемое, обусловленное скачком функции распределения, определяет координатную зависимость гидродинамических величин на минус бесконечности. Естественно, что подбором явного вида f_α и значений параметров можно добиться обращения в нуль коэффициента c_1 (именно таким образом получается солитонное решение [11]). Однако в случае общего положения необходимо считать, что $c_1 \neq 0$. Тогда из равенства (5) следует, что электростатический потенциал изменяется по закону

$$\varphi_0 - \varphi \sim x^4$$

и достигает своего предельного значения на *конечном* расстоянии. Аналогичные рассуждения справедливы и при $\varphi \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \infty$). Это значит, что при достаточном удалении от области перехода электрическое поле, плотность заряда и производная плотности *строго* равны нулю. При этом информация о существовании переходного слоя содержится лишь в зависимости функции распределения от скорости. Такая структура потенциала приводит к тому, что при переходе через граничную область четвертая производная потенциала, или, что то же самое, вторая производная зарядовой плотности в двух точках терпят разрыв – характерное свойство, которое может быть использовано для экспериментального обнаружения подобных структур.

Описанное решение имеет еще одно интересное свойство – неединственность решения уравнения (3) и, следовательно, невозможность постановки задачи Коши для этого уравнения: одним и тем же (нулевым) начальным условиям на бесконечности соответствуют два решения – описанное выше и тривиальное. Это объясняется тем, что уравнение (3) получено из системы интегро-дифференциальных уравнений, т.е. должны существовать дополнительные *интегральные* ограничения.

4. КВАЗИРАВНОВЕСНОЕ СОСТОЯНИЕ МАКСВЕЛЛОВСКОЙ ПЛАЗМЫ

4.1. Построение решения. В качестве демонстрации выводов, полученных в предыдущем разделе, построим квазиравновесное состояние двухкомпонентной плазмы, исходя из максвелловского распределения частиц. Положим, что электроны и ионы имеют разные температуры, однако температура частиц одного сорта одинакова, а электростатический потенциал меняется монотонно (см. рис. 1). В этом случае функции распределения частиц будут иметь вид

$$f_e = \sqrt{\frac{m_e}{2\pi T_e}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_e}{T_e}\right) \times \begin{cases} n_{1e}, & \mathcal{E}_e \geq 0, \\ n_{2e}, & \mathcal{E}_e < 0, \end{cases}$$

$$f_i = \sqrt{\frac{m_i}{2\pi T_i}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{T_i}\right) \times \begin{cases} N, & \mathcal{E}_i \geq e_0\varphi_0, \\ n_{2i}, & \mathcal{E}_i < e_0\varphi_0. \end{cases}$$

Здесь коэффициенты $N, n_{1,2\alpha}$ пропорциональны концентрациям соответствующих частиц и будут нами использованы в качестве подгоночных параметров.

Перейдем к безразмерным величинам

$$\psi = \frac{e_0 \varphi_0}{T_e}, \quad \beta = \frac{T_e}{T_i}, \quad \xi = \frac{x}{\sqrt{\frac{T_e}{4\pi e_0^2 N}}},$$

$$n = \frac{n_{1e}}{N}, \quad n_1 = \frac{n_{2e}}{N}, \quad n_2 = \frac{n_{2i}}{N}$$

и введем функции

$$F_1(z) = e^z \operatorname{erfc}(\sqrt{z}), \quad F_2(z) = e^z \operatorname{erf}(\sqrt{z}),$$

где $\operatorname{erf}(x)$ и $\operatorname{erfc}(x)$ – интеграл ошибок и его дополнение до единицы, соответственно. Тогда уравнение Пуассона (3) будет выглядеть как

$$\psi'' = nF_1(\psi) + n_1F_2(\psi) - F_1(\beta(\psi_0 - \psi)) - n_2F_2(\beta(\psi_0 - \psi)), \quad (9)$$

штрих означает дифференцирование по переменной ξ . Для построения интересующего нас решения необходимо выполнение следующих условий:

$$\psi''|_{\psi=\psi_0} = \psi''|_{\psi=0} = 0, \quad \psi'|_{\psi=\psi_0} = \psi'|_{\psi=0} = 0, \quad (10)$$

выражающих требования отсутствия заряда и электрического поля на плюс и минус бесконечности. Еще раз обратим внимание на отличие задачи (9), (10) от классической задачи Коши: мы ставим условие на первую и вторую производные потенциала, так как именно эти величины имеют физическое значение.

Интегрирование правой части формулы (9) дает выражение для потенциала Сагдеева из (4) через интеграл ошибок и элементарные функции, которое не приводится из-за его громоздкости. Константа интегрирования W определяется одним из условий (10). Считая параметры β и ψ_0 свободными и используя оставшиеся три соотношения из (10), получаем систему из трех линейных уравнений относительно величин n , n_1 и n_2 . Решение этой системы фактически решает задачу, т.е. полностью определяет неявное решение (5). Численный анализ показал, что при фиксированном значении параметра $\beta = T_i/T_e$ существует достаточно широкая область значений допустимой разности потенциалов, определяющей соответствующее квазиравновесное состояние плазмы.

Полученные выражения позволяют оценить координатную зависимость потенциала и ширину переходной области δ (нормированную на радиус Дебая). Для этого нужно разложить правую часть уравнения (9) в ряд по малой величине ψ (или $\psi - \psi_0$). После несложных вычислений имеем

$$\psi \sim \xi^4 (\psi \rightarrow 0), \quad \psi_0 - \psi \sim -\xi^4 (\psi \rightarrow \psi_0), \quad \delta \sim \psi^{3/4} \sim O(1) \quad (11)$$

Рис. 2

в соответствии с общими результатами. Пример кривых для $\psi(x)$ и $\rho(x)$, полученных в результате численного решения уравнения (9), приведен на рис. 2.

4.2. Симметрия построенного состояния и другие квазиравновесные решения. Полученное решение не зависит от массы частиц, что естественно ввиду отсутствия динамических возмущений. Это приводит к некоторым соотношениям симметрии. Так, результат не изменится при замене

$$e_0 \rightarrow -e_0, \quad \beta \rightarrow \beta^{-1}, \quad x \rightarrow -x. \quad (12)$$

Симметрия будет максимальной, если температура электронов равна температуре ионов ($\beta = 1$). В этом случае, как нетрудно убедиться, плотность плазмы по обеим сторонам перехода оказывается одинаковой. При этом в плазме по-прежнему имеется неоднородный переходный слой, разность потенциалов и скачки в функциях распределения частиц. Используя описанную выше процедуру, можно построить еще более симметричное квазиравновесное состояние, в котором потенциал имеет форму симметричного горба (рис. 3).

Рис. 3

Положив в уравнении (9) $n_1 = n$, $n_2 = 0$ (второе условие – отсутствие запертых ионов – введено нами для простоты), получаем

$$\psi'' = ne^\psi - F_1(\psi_0 - \psi). \quad (13)$$

Здесь ψ_0 обозначает высоту барьера. Характер решения виден из потенциала Сагдеева

$$U(\psi) = -1 + e^{1/4} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2}\right) - e^{1/4} \operatorname{erf}\left(\psi - \psi_0 + \frac{1}{2}\right) - \\ - e^{\psi_0} (e^{\psi_0} - e^{\psi}) \operatorname{erfc}(\psi_0) + e^{\psi_0 - \psi} \operatorname{erfc}(\psi_0 - \psi),$$

имеющего теперь лишь один локальный максимум при $\psi = 0$ (рис. 4). При этом по-прежнему $U(\psi) \sim \psi^{3/2}$ ($\psi \ll 1$). Поэтому электростатический потенциал уменьшается от нулевого значения пропорционально $-\xi^4$, достигает минимального значения ψ_0 , после чего его форма зеркально повторяется. Это приводит к характерной координатной зависимости $\psi(x)$ (см. рис. 3).

Рис. 4

Из-за того что изменение потенциала происходит на конечном расстоянии, а также из-за симметрии решения относительно замены знака заряда такие потенциальные барьеры (равно как и ямы) могут следовать один за другим в произвольном порядке. При этом их параметры (ширина и амплитуда) могут меняться в широких пределах за счет захваченных частиц соответствующего знака. А так как в областях с нулевым потенциалом функции распределения частиц совпадают с максвелловскими, то из факта, что в достаточно большой области плазма однородна, не следует *a priori*, что она остается равновесной во всем объеме.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе построены решения стационарных уравнений Власова–Пуассона в виде локализованного переходного слоя. Он сопрягает области однородных плазм, имеющих разные равновесные параметры. Этот слой также может трансформироваться в локальное возмущение внутри однородной плазмы. В обоих случаях решение не содержит ни массовых, ни электрических токов и все электро- и гидродинамические величины непрерывны со своими производными. Параметры сопряженных областей однозначно определяют структуру переходного слоя. Это позволяет надеяться на то, что построенные состояния будут устойчивы. Однако полный анализ устойчивости представляет собой сложную задачу и требует отдельного рассмотрения.

Благодарности. Авторы искренне благодарны Л. С. Кузьменкову и А. П. Кропоткину за внимание к работе и полезные замечания.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау. ЖЭТФ. 1937. Т. 7. С. 203.
- [2] Р. Балеску. Равновесная и неравновесная статистическая механика. Т. 1, 2. М.: Мир, 1978.
- [3] Ю. Л. Климонтович. Статистическая физика. М.: Наука, 1982.
- [4] Л. С. Кузьменков. ТМФ. 1991. Т. 86. № 2. С. 231.
- [5] I. B. Bernstein, J. M. Green, M. D. Kruskal. Phys. Rev. 1957. V. 108. P. 546.
- [6] А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский. ДАН СССР. 1951. Т. 80. С. 193.
- [7] Л. С. Кузьменков, А. А. Соколов, О. О. Трубачев. Изв. ВУЗов. Физика. 1983. Т. 26. С. 17.
- [8] В. С. Владимиров, С. В. Кривицкий. ЖЭТФ. 1992. Т. 101. С. 1510.
- [9] I. M. Aleshin, M. A. Drofa, L. S. Kuzmenkov. J. Plasma Phys. 1994. V. 51. № 2. P. 177.
- [10] А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев. Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
- [11] И. М. Алешин, Д. В. Перегудов. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 2000. Т. 41. № 1. С. 8.
- [12] Р. З. Сагдеев. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб.: "Вопросы теории плазмы". Т. 4. Ред. М. А. Леонтович. М.: Атомиздат, 1964. С. 20.
- [13] L. P. Block. Cosmic Electrodynamics. 1976. V. 3. P. 349.
- [14] D. C. Montgomery, G. Joyce. Plasma Phys. 1969. V. 3. P. 1.
- [15] А. В. Гуревич, Б. Н. Меерсон, И. В. Рогачевский. Физика плазмы. 1985. Т. 11. № 10. С. 1213.
- [16] А. П. Кропоткин, С. А. Мартыянов. Геомагнетизм и аэрономия. 1985. Т. XXV. № 6. С. 259; 1989. Т. XXIX. № 6. С. 930.
- [17] А. А. Власов. Статистические функции распределения. М.: Наука, 1966.
- [18] I. Langmuir. Phys. Rev. 1913. V. 2. P. 450.
- [19] В. С. Воронин, Ю. Т. Зозуля, А. Н. Лебедев. ЖТФ. 1972. Т. 42. № 3. С. 546.
- [20] И. М. Алешин, Л. С. Кузьменков. Вестн. Моск. ун-та. Физика. Астрономия. 1994. Т. 35. № 2. С. 46.

Поступила в редакцию 5.11.2003 г.