Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Маршаков, Матричная модель и стационарная задача в цепочке Тоды,
ТМФ, 2006, том 146, номер 1, 3–16

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2004>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 15:53:05

© 2006 г.

А. В. Маршаков*

МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ И СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА В ЦЕПОЧКЕ ТОДЫ

Рассмотрена стационарная задача в цепочке Тоды и продемонстрировано, что возникающие в ней геометрические структуры в точности отвечают много связному решению одноматричной модели с полиномиальным потенциалом. Для простейших нетривиальных примеров гамильтонианы и симплектические формы вычислены явно, и полученные формулы проверены на самосогласованность. Сформулирована соответствующая квантовая задача и обсуждены некоторые ее свойства и перспективы.

Ключевые слова: матричные модели, комплексная геометрия, интегрируемые системы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уже достаточно давно было обнаружено (см., например, работы [1], [2]), а впоследствии особо отмечено в контексте струнной геометрии и вытекающих из нее следствий для суперсимметричных калибровочных теорий [3], [4], что решение одноматричной модели

$$Z = \int_{N \times N} d\Phi \exp \left(-\frac{1}{\hbar} \text{Tr } W(\Phi) \right) \quad (1)$$

с полиномиальным потенциалом

$$W(\Phi) = \sum_{k=1}^{n+1} t_k \Phi^k \quad (2)$$

в планарном приближении $(1/N)$ -разложения формулируется геометрически в терминах гиперэллиптической комплексной кривой

$$y^2 = W'(\lambda)^2 - 4f_{n-1}(\lambda), \quad (3)$$

оснащенной производящим дифференциалом (связанным с плотностью распределения собственных значений матрицы Φ)

$$dS = y d\lambda. \quad (4)$$

*Физический институт им. П. Н. Лебедева, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, mars@itep.ru

Параметры t_k потенциала (2) в данном подходе фиксированы и являются казимирами, в то время как динамические переменные связаны с нетривиальными периодами производящего дифференциала (4) на гиперэллиптической кривой (3).

Такая геометрическая картина предполагает, в частности, что наиболее эффективным способом описания планарного решения матричной модели (1) является теория интегрируемых систем. Действительно, уже в работе [2] было отмечено, что статсумма матричной модели (1) $\mathcal{F} = \hbar^2 \ln Z$ в пределе $N \rightarrow \infty$ при фиксированном $\hbar N$ формулируется геометрически в терминах (логарифма) квазиклассической тау-функции [5]. Данная конструкция представляет собой частный случай так называемых алгебро-геометрических голоморфных интегрируемых систем, часто возникающих в последнее время в контексте теории струн или теории Виттена–Зайберга (см. [6], [7] и списки литературы в этих книгах).

С другой стороны, хорошо известно, что матричный интеграл (1) как функция параметров потенциала (2) и размера матрицы N есть тау-функция (полубесконечной “ограниченной”) цепочки Тоды [8]. Цепочки Тоды представляют собой хорошо известное семейство интегрируемых моделей, являющихся частным случаем алгебро-геометрических интегрируемых систем: аффинные или периодические версии цепочек Тоды буквально отвечают интегрируемым системам Виттена–Зайберга, ассоциированным с “чистыми” ($\mathcal{N} = 2$ суперсимметричными) калибровочными теориями [9]. При этом возникает естественный вопрос: связана ли интегрируемая система, определяемая геометрией (3), (4), с семейством моделей Тоды?

В данной работе будет продемонстрировано, что комплексная кривая (3), оснащенная дифференциалом (4), непосредственно отвечает конкретной интегрируемой задаче в цепочке Тоды, а именно, *стационарной* задаче в цепочке Тоды¹⁾. Мы обсудим общую интегрируемую структуру классической стационарной задачи и приведем явные вычисления для простейших нетривиальных примеров порядка $n = 2, 3$, а также кратко обсудим проблемы ее квантования. Мы надеемся, что обнаруженная эквивалентность геометрий матричной модели и стационарной задачи в цепочке Тоды окажется первым шагом к выявлению правильных аналогов дополнительных квазиклассических переменных, а рассмотренная ниже модель будет играть роль удачного модельного примера.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ

Оператор Лакса цепочки Тоды представляет собой бесконечную трехдиагональную матрицу с элементами

$$L_{ij} = r_i \delta_{j,i-1} + p_i \delta_{ji} + r_{i+1} \delta_{j,i+1}, \quad i, j \in \mathbb{Z}. \quad (5)$$

Введем обозначения

$$r_i = e^{(q_i - q_{i-1})/2}, \quad (6)$$

$$R_i = r_i^2 = e^{q_i - q_{i-1}}, \quad (7)$$

¹⁾ Аналогичная стационарная задача для иерархии КдФ хорошо известна и описана в литературе [10].

удобные при дальнейшем рассмотрении.

Уравнения движения цепочки Тоды следуют из представления Лакса

$$\frac{\partial L}{\partial t_1} = [L, A_1], \quad (8)$$

где $A_1 = \mathcal{R} \circ L/2$, с учетом явного представления для $\mathcal{R}$ -матрицы

$$(A_1)_{ij} = \frac{1}{2} (r_{i+1} \delta_{j,i+1} - r_i \delta_{j,i-1}). \quad (9)$$

При этом (8) эквивалентно хорошо известным уравнениям движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_i}{\partial t_1} &= r_i (p_i - p_{i-1}), \\ \frac{\partial p_i}{\partial t_1} &= r_{i+1}^2 - r_i^2 = R_{i+1} - R_i \end{aligned} \quad (10)$$

для цепочки частиц с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями.

Стандартным образом нелинейные уравнения (10) могут быть представлены как условие совместности вспомогательной линейной задачи

$$(L\psi)_i = r_{i+1}\psi_{i+1} + p_i\psi_i + r_i\psi_{i-1} = \lambda\psi_i. \quad (11)$$

Базис двумерного пространства решений вспомогательной линейной задачи может быть описан разложениями

$$\psi_i^\pm = \lambda^{\pm i} e^{\mp \frac{1}{2} q_i} \left(1 + \frac{\xi_i^\pm}{\lambda} + \frac{\eta_i^\pm}{\lambda^2} + \dots \right), \quad (12)$$

где для коэффициентов разложения имеют место формулы

$$\xi_{i-1}^+ - \xi_i^+ = p_{i-1}, \quad \xi_i^- - \xi_{i-1}^- = p_i, \quad (13)$$

а также

$$\begin{aligned} \eta_{i-1}^+ - \eta_i^+ &= R_{i-1} + \xi_{i-1}^+ (\xi_{i-1}^+ - \xi_i^+), \\ \eta_i^- - \eta_{i-1}^- &= R_{i+1} + \xi_i^- (\xi_i^- - \xi_{i-1}^-), \end{aligned} \quad (14)$$

и это непосредственно связывает их с фазовыми переменными цепочки Тоды.

3. СТАЦИОНАРНАЯ ЗАДАЧА

Бесконечная цепочка Тоды является вполне интегрируемой системой с бесконечным количеством коммутирующих с представлением (8) интегралов движения, которые генерируют высшие потоки. Высшие потоки можно определить следующим образом:

$$\frac{\partial L}{\partial t_k} = [L, A_k], \quad (15)$$

где $A_k = \mathcal{R} \circ L^k/2$ с той же $\mathcal{R}$ -матрицей, что и в формуле (9). Существует много способов ограничить бесконечную цепочку Тоды на конечномерное подпространство

ее фазового пространства; наиболее известными являются N -периодическая цепочка и открытая цепочка (“тодовская молекула”) из N частиц.

Ниже мы собираемся сконцентрировать свое внимание на стационарной задаче, определяемой условием коммутативности

$$[L, A] = 0, \quad (16)$$

где

$$A = \sum_{k=1}^n c_k A_k \quad (17)$$

при некоторых фиксированных “порядке” n и коэффициентах $\{c_k\}$.

Как в любой задаче коммутативности двух операторов, в стационарной задаче (16) возникает комплексная кривая

$$\det(A(\lambda) - Y) = 0, \quad (18)$$

где матрица

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} a(\lambda) & b(\lambda) \\ c(\lambda) & d(\lambda) \end{pmatrix} \quad (19)$$

с некоторыми полиномиальными матричными элементами является записью оператора (17) в базисе двумерного пространства собственных функций задачи (11) для оператора (5). Поэтому кривая (18) является гиперэллиптической,

$$y^2 = P_{2n}(\lambda) \equiv (a - d)^2 + 4bc, \quad (20)$$

где $y = 2Y - \text{Tr } A(\lambda) = 2Y - a - d$.

Наиболее естественной симплектической формой для бесконечной цепочки Тоды является $\Omega_\infty = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \delta q_i \wedge \delta p_i$. Хорошо известно, что эта формула остается неизменной при редукции на $2N$ -мерное фазовое пространство N -периодической задачи или N -частичной открытой “молекулы”, т.е. $\Omega_N = \sum_{i=1}^N \delta q_i \wedge \delta p_i$. Последнюю формулу можно переписать также в виде

$$\Omega_N = \text{res}_{w=\infty} \left(\frac{dw}{w} \text{Tr} (\Psi^{-1} \delta L(w) \wedge \delta \Psi) \right)$$

в терминах зависящего от спектрального параметра оператора Лакса N -периодической задачи, см. подробности в работах [6], [11].

Симплектическая структура стационарной задачи может быть определена аналогичной формулой

$$\Omega = \text{res}_{\lambda=\infty} (d\lambda \text{Tr} (\Psi^{-1} \delta A(\lambda) \wedge \delta \Psi)), \quad (21)$$

где теперь $\delta A(\lambda)$ обозначает вариацию (при фиксированном спектральном параметре λ !) оператора, определяемого формулами (17), (19), а

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_i^+ & \psi_i^- \\ \psi_{i-1}^+ & \psi_{i-1}^- \end{pmatrix} \quad (22)$$

обозначает матричную функцию Бейкера–Ахиезера, для которой Ψ^{-1} является просто обратной матрицей.

В дальнейшем мы используем более удобную и отличную от (12) нормировку функций Бейкера–Ахиезера:

$$\Psi \rightarrow \Psi \begin{pmatrix} e^{\frac{q_i}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-\frac{q_{i-1}}{2}} \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Отметим, что нормировка функций Бейкера–Ахиезера не влияет на симплектическую форму (21), так как разность двух выражений, скажем, при изменении нормировки (23), пропорциональна

$$\text{res}(\delta Y d\lambda) \wedge \delta(q_i - q_{i-1}) = 0. \quad (24)$$

4. ЯВНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Проиллюстрируем теперь общую конструкцию конкретными явными примерами.

4.1. Случай $n = 1$. Это тривиальный случай стационарности оператора (9), который в базисе собственных функций (11) принимает вид

$$A_1(\lambda) \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda - p_i) & -r_i \\ r_i & -\frac{1}{2}(\lambda - p_{i-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

что приводит к кривой нулевого рода (см. формулу (20))

$$y^2 = \lambda^2 - (p_i + p_{i-1})\lambda + \frac{1}{4}(p_i + p_{i-1})^2 + 4R_i \quad (26)$$

и разложению

$$y d\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} d\lambda \left(\lambda - \frac{1}{2}(p_i + p_{i-1}) + \frac{2R_i}{\lambda} + \dots \right). \quad (27)$$

Условие коммутативности $[L, A_1] = 0$ приводит к дальнейшим ограничениям:

$$p_{i+1} = p_i = p_{i-1}, \quad R_{i+1} = R_i, \quad (28)$$

что полностью фиксирует коэффициенты уравнений (26) или (27), при этом все переменные превращаются в константы.

В тривиальном случае $n = 1$ явное вычисление симплектической формы (21) приводит к формуле

$$\Omega_1 = e^{q_i - q_{i-1}} dq_i \wedge dq_{i-1} + \frac{1}{2} (d\xi_i^+ \wedge d\xi_i^- + d\xi_{i-1}^+ \wedge d\xi_{i-1}^-) - d\xi_i^+ \wedge d\xi_{i-1}^-. \quad (29)$$

Поскольку в силу (13) имеет место равенство

$$\frac{1}{2} (d\xi_i^+ \wedge d\xi_i^- + d\xi_{i-1}^+ \wedge d\xi_{i-1}^-) - d\xi_i^+ \wedge d\xi_{i-1}^- = \frac{1}{2} (d\xi_i^+ \wedge dp_i + dp_{i-1} \wedge d\xi_{i-1}^-), \quad (30)$$

учитывая условия (28), заключаем, что симплектическая форма (29) обращается в нуль.

4.2. Случай $n = 2$. Обратимся теперь к простейшему нетривиальному случаю $c_k \propto \delta_{kn}$ для $n = 2$, т.е. к случаю $A = A_2 = \mathcal{R} \circ L^2/2$. Применяя дважды оператор (5), получим

$$(L^2\psi)_i = r_{i+2}r_{i+1}\psi_{i+2} + r_{i+1}(p_{i+1} + p_i)\psi_{i+1} + (R_{i+1} + p_i^2 + R_i)\psi_i + r_i(p_i + p_{i-1})\psi_{i-1} + r_i r_{i-1}\psi_{i-2} \quad (31)$$

или

$$(A_2\psi)_i \propto r_{i+2}r_{i+1}\psi_{i+2} + r_{i+1}(p_{i+1} + p_i)\psi_{i+1} - r_i(p_i + p_{i-1})\psi_{i-1} - r_i r_{i-1}\psi_{i-2}, \quad (32)$$

в то время как условие стационарности градиента $\text{Tr } L^2 = \sum_i (p_i^2 + 2R_i)$ в (31), не дающего вклада в оператор (32), приводит в точности к условиям связи (28) предыдущего тривиального примера.

Условия коммутативности в данном примере приводят к равенствам

$$R_{i+1}(p_{i+1} + p_i) = R_i(p_i + p_{i-1}), \quad R_{i+1} + p_i^2 = R_{i-1} + p_{i-1}^2, \quad (33)$$

которые редуцируют размерность фазового пространства до четырех независимых переменных (R_i и p_i на двух соседних узлах).

Теперь, используя (11), легко переписать оператор (32) в базисе собственных функций оператора Лакса (5):

$$A_2(\lambda) \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(\lambda^2 - p_i^2 - R_{i+1} + R_i) & -r_i(\lambda + p_i) \\ r_i(\lambda + p_{i-1}) & -\frac{1}{2}(\lambda^2 - p_{i-1}^2 - R_{i-1} + R_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_i \\ \psi_{i-1} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

В частности, из условия (33) следует, что $\text{Tr } A_2(\lambda) = 0$.

Для оператора (34) уравнение кривой (20) принимает вид

$$y^2 = \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}Q \right)^2 - 4R_i(\lambda + p_i)(\lambda + p_{i-1}), \quad (35)$$

$$Q \equiv R_{i+1} + R_{i-1} - 2R_i + p_i^2 + p_{i-1}^2.$$

Разлагая производящий дифференциал при $\lambda \rightarrow \infty$, получаем с учетом равенства $Q + 4R_i = 2C_2$, что

$$\begin{aligned} y d\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} d\lambda \left(\lambda^2 - \frac{1}{2}(Q + 4R_i) - \frac{2R_i}{\lambda}(p_i + p_{i-1}) - \frac{R_i}{\lambda^2}(2p_i p_{i-1} + Q + 2R_i) + \dots \right) = \\ = d\lambda \left(\lambda^2 - C_2 - \frac{2C_1}{\lambda} - \frac{2R_i}{\lambda^2}(p_i p_{i-1} - R_i + C_2) - \right. \\ \left. - \frac{2C_1 C_2}{\lambda^3} - \frac{2}{\lambda^4}(C_1^2 + C_2 H) + \dots \right). \end{aligned} \quad (36)$$

Принимая во внимание соотношение $2C_2 = R_{i+1} + R_{i-1} + 2R_i + p_i^2 + p_{i-1}^2$ и коэффициент при $d\lambda/\lambda$, приходим к следующей форме казимиров:

$$C_1 = R_i(p_i + p_{i-1}), \quad C_2 = R_{i+1} + R_i + p_i^2 = R_{i-1} + R_i + p_{i-1}^2, \quad (37)$$

которые вместе с равенствами (33) редуцируют фазовое пространство до двумерного. Удобно в качестве координат в этом пространстве выбрать R_i (для некоторого фиксированного узла i) и разность соответствующих импульсов $p_- = p_i - p_{i-1}$.

Гамильтонианом H является с точностью до численного множителя коэффициент при члене $d\lambda/\lambda^2$ разложения (36),

$$H = R_i (p_i p_{i-1} - R_i + C_2) = \frac{C_1^2}{4} \frac{1}{R_i} - \frac{1}{4} R_i p_-^2 - R_i + C_2 R_i. \quad (38)$$

Принимая во внимание равенства (37), уравнение кривой (35) можно переписать в виде

$$y^2 = (\lambda^2 - C_2)^2 - 4(C_1 \lambda + H), \quad (39)$$

так что оно в точности совпадает с кривой (3) матричной модели с потенциалом $W = \lambda^3/3 - C_2 \lambda$ и функцией $f_1 = C_1 \lambda + H$.

Явное вычисление симплектической формы для случая $n = 2$ на основании формул (23) и (19) с учетом (37) приводит к равенствам

$$\begin{aligned} \Omega_2 &= \frac{1}{2} d(R_{i-1} + R_i + p_{i-1}^2) \wedge d\xi_{i-1}^- - \\ &\quad - \frac{1}{2} d(R_{i+1} + R_i + p_i^2) \wedge d\xi_i^+ + d(p_i - p_{i-1}) \wedge dR_i = \\ &= d(p_i - p_{i-1}) \wedge dR_i. \end{aligned} \quad (40)$$

Наконец, чтобы согласовать друг с другом гамильтониан (38), кривую (39) и симплектическую форму (40), следует переписать уравнение (39) в форме, используемой в теории Виттена–Зайберга (см., например, [6] и [12]), т.е. в виде

$$w + \frac{C_1 \lambda + H}{w} = \lambda^2 - C_2, \quad w - \frac{C_1 \lambda + H}{w} = y. \quad (41)$$

Это означает, в частности, что $2w = y + \lambda^2 - C_2$ и

$$\frac{1}{2} dy \wedge d\lambda = dw \wedge d\lambda. \quad (42)$$

Первое из уравнений (41) может теперь быть переписано как

$$H = w\lambda^2 - C_1 \lambda - C_2 w - w^2 = w \left(\lambda - \frac{C_1}{2w} \right)^2 - \frac{C_1^2}{4w} - C_2 w - w^2, \quad (43)$$

что в точности совпадает с формулой (38), если произвести отождествления

$$w \leftrightarrow -R_i, \quad \lambda - \frac{C_1}{2w} \leftrightarrow \pm p_-. \quad (44)$$

4.3. Случай $n = 3$. Для случая $n = 3$ при $c_k \propto \delta_{k3}$ явное выражение для оператора $A_3 = \mathcal{R} \circ L^3/2$ принимает вид

$$(A_3 \psi)_i \propto r_{i+3} r_{i+2} r_{i+1} \psi_{i+3} + r_{i+2} r_{i+1} (p_{i+2} + p_{i+1} + p_i) \psi_{i+2} +$$

$$\begin{aligned}
& + r_{i+1} (p_{i+1}^2 + p_{i+1}p_i + p_i^2 + r_{i+2}^2 + R_{i+1} + R_i) \psi_{i+1} - \\
& - r_i (p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2 + R_{i+1} + R_i + R_{i-1}) \psi_{i-1} - \\
& - r_{i-1} r_{i-2} (p_i + p_{i-1} + p_{i-2}) \psi_{i-2} - r_i r_{i-1} r_{i-2} \psi_{i-3},
\end{aligned} \tag{45}$$

в то время как стационарность градиента следовой части

$$\frac{1}{3} \text{Tr } L^3 = \frac{1}{3} \sum_i p_i^3 + \sum_i p_i (R_i + R_{i+1}) \tag{46}$$

приводит к условиям (33) предыдущего примера. Условие коммутативности (16) теперь может быть записано как

$$\begin{aligned}
& p_i^3 + (p_{i+1} + 2p_i) R_{i+1} + p_i R_i p_{i-1}^3 + (p_{i-2} + 2p_{i-1}) R_{i-1} + p_{i-1} R_i = \\
& = R_{i+1} (p_{i+1}^2 + p_{i+1}p_i + p_i^2 + R_{i+2} + R_{i+1} + R_i) \times \\
& \times R_i (p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2 + R_{i+1} + R_i + R_{i-1}).
\end{aligned} \tag{47}$$

В базисе собственных функций оператора Лакса оператор A_3 в (45) представляется матрицей с элементами

$$\begin{aligned}
(A_3(\lambda))_{11} &= \frac{1}{2}(\lambda^3 + 2r_i^2\lambda - p_i^3 - (p_{i+1} + 2p_i)r_{i+1}^2 + p_{i-1}r_i^2), \\
(A_3(\lambda))_{12} &= -r_i(\lambda^2 + p_i\lambda + p_i^2 + r_{i+1}^2 + r_i^2), \\
(A_3(\lambda))_{21} &= r_i(\lambda^2 + p_{i-1}\lambda + p_{i-1}^2 + r_i^2 + r_{i-1}^2), \\
(A_3(\lambda))_{22} &= -\frac{1}{2}(\lambda^3 + 2r_i^2\lambda - p_{i-1}^3 - (p_{i-2} + 2p_{i-1})r_{i-1}^2 + p_i r_i^2),
\end{aligned} \tag{48}$$

а уравнение кривой (20) для оператора (48) принимает вид

$$\begin{aligned}
y^2 \lambda^6 &= (p_i^3 + p_{i-1}^3 + (p_{i-2} + 2p_{i-1})R_{i-1} + 3(p_i + p_{i-1})R_i + (p_{i+1} + 2p_i)R_{i+1}) \lambda^3 - \\
& - 4R_i (R_{i+1} + R_i + R_{i-1} + p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2) \lambda^2 - \\
& - 2R_i ((p_{i+1} + 2p_i + 2p_{i-1})R_{i+1} + (p_i + p_{i-1})R_i + \\
& + (p_{i-2} + 2p_{i-1} + 2p_i)R_{i-1} + p_i^3 + 2p_i^2 p_{i-1} + 2p_i p_{i-1}^2 + p_{i-1}^3) \lambda + \\
& + \frac{1}{4} ((p_{i+1} + 2p_i)R_{i+1} - (p_i + p_{i-1})R_i + (p_{i-2} + 2p_{i-1})R_{i-1} + p_i^3 + p_{i-1}^3)^2 - \\
& - 4R_i (p_i^2 + R_{i+1} + R_i) (p_{i-1}^2 + R_i + R_{i-1}).
\end{aligned} \tag{49}$$

Разлагая производящий дифференциал, получим

$$\begin{aligned}
y d\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} d\lambda & \left(\lambda^3 - \frac{1}{2}((p_{i+1} + 2p_i)R_{i+1} + 3(p_i + p_{i-1})R_i + (p_{i-2} + 2p_{i-1})R_{i-1} + \right. \\
& + p_i^3 + p_{i-1}^3) - \frac{2R_i}{\lambda} (R_{i+1} + R_i + R_{i-1} + p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2) - \\
& - \frac{R_i}{\lambda^2} ((p_{i+1} + 2p_i + 2p_{i-1})R_{i+1} + (p_i + p_{i-1})R_i + \\
& + (p_{i-2} + 2p_{i-1} + 2p_i)R_{i-1} + p_i^3 + 2p_i^2 p_{i-1} + 2p_i p_{i-1}^2 + p_{i-1}^3) -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{R_i}{\lambda^3} ((p_{i+1}p_i + p_{i+1}p_{i-1} + 2p_i^2 + 2p_i p_{i-1} + \\
& + 2p_{i-1}^2)R_{i+1} + (3p_i^2 + 3p_{i-1}^2 + 2p_i p_{i-1})R_i + \\
& + (p_{i-1}p_{i-2} + p_i p_{i-2} + 2p_i p_{i-1} + 2p_{i-1}^2 + 2p_i^2)R_{i-1} + \\
& + 2(R_{i+1}R_i + R_{i+1}R_{i-1} + R_i^2 + R_i R_{i-1}) + \\
& + p_i^4 + p_i^3 p_{i-1} + 2p_i^2 p_{i-1}^2 + p_i p_{i-1}^3 + p_{i-1}^4) + \dots \Big). \tag{50}
\end{aligned}$$

Полагая, что коэффициенты при сингулярных членах разложения $y d\lambda$ являются числами, не зависящими от динамических параметров (казимирами), и используя (48), имеем

$$\begin{aligned}
C_1 &= R_i (p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2 + R_{i+1} + R_i + R_{i-1}), \\
C_3 &= p_i^3 + (p_{i+1} + 2p_i) R_{i+1} + (p_{i-1} + 2p_i) R_i p_{i-1}^3 + \\
& + (p_{i-2} + 2p_{i-1}) R_{i-1} + (2p_{i-1} + p_i) R_i. \tag{51}
\end{aligned}$$

Вместе с условиями (47) соотношения (51) налагают четыре связи на восьмимерное пространство переменных (R_j и p_j при $j = i-1, i, i+1$, а также R_{i-2} и p_{i+2}), так что в данном примере фазовое пространство является четырехмерным.

Таким образом, разложение (50) с учетом равенств (51) может быть переписано как

$$\begin{aligned}
y d\lambda \underset{\lambda \rightarrow \infty}{\sim} d\lambda \Big(\lambda^3 - C_3 - \frac{2R_i}{\lambda} (R_{i+1} + R_i + R_{i-1} + p_i^2 + p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2) - \\
- \frac{2R_i}{\lambda^2} (p_{i-1} R_{i+1} - (p_i + p_{i-1}) R_i + p_i R_{i-1} + p_i^2 p_{i-1} + p_i p_{i-1}^2 + C_3) + \dots \Big) = \\
= d\lambda \Big(\lambda^3 - C_3 - \frac{2C_1}{\lambda} - \frac{2H_1}{\lambda^2} - \frac{2H_2}{\lambda^3} + \dots \Big), \tag{52}
\end{aligned}$$

так что первые два независимых гамильтониана (пропорциональные коэффициентам при $d\lambda/\lambda^2$ и $d\lambda/\lambda^3$) могут быть с помощью (51) представлены в виде

$$\begin{aligned}
H_1 &= C_3 R_i + \frac{C_1}{2} (p_i + p_{i-1}) - \\
& - \frac{1}{2} R_i (p_i^3 + p_{i-1}^3 + 3R_i (p_i + p_{i-1}) + (p_i - p_{i-1})(R_{i+1} - R_{i-1})), \tag{53}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H_2 &= \frac{C_1^2}{4R_i} + \frac{C_1}{2} (R_i - p_i p_{i-1}) + C_3 R_i (p_i + p_{i-1}) + \frac{1}{4} R_i^3 - \\
& - \frac{1}{4} R_i (R_{i+1} - R_{i-1})^2 - \frac{1}{2} R_i (R_{i+1} - R_{i-1})(p_i^2 - p_{i-1}^2) - \\
& - \frac{1}{4} R_i (p_i^4 + 3p_i^2 p_{i-1}^2 + p_{i-1}^4) - R_i^2 \left(p_i^2 + \frac{5}{3} p_i p_{i-1} + p_{i-1}^2 \right). \tag{54}
\end{aligned}$$

Уравнение кривой (49) теперь превращается в

$$y^2 = (\lambda^3 - C_3)^2 - 4(C_1 \lambda^2 + H_1 \lambda + H_2), \tag{55}$$

вновь совпадая с уравнением кривой для матричной модели (3) с потенциалом $W = \lambda^4/4 - C_3\lambda$ и функцией $f_2 = C_1\lambda^2 + H_1\lambda + H_2$.

Явное вычисление симплектической формы Ω_3 приводит к выражению

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & \frac{1}{2} d\xi_{i-1}^- \wedge d(p_{i-1}^3 + (p_{i-2} + 2p_{i-1})R_{i-1} + (p_i + 2p_{i-1})R_i) + \\ & + \frac{1}{2} d(p_i^3 + (p_{i+1} + 2p_i)R_{i+1} + (p_{i-1} + 2p_i)R_i) \wedge d\xi_i^+ \\ & + d(R_{i+1} - R_{i-1}) \wedge dR_i + 2R_i dp_i \wedge dp_{i-1} + \\ & + d(p_i^2 - p_{i-1}^2) \wedge dR_i + (p_{i-1} dp_i - p_i dp_{i-1}) \wedge dR_i. \end{aligned} \quad (56)$$

Используя (51) и вводя $R_- \equiv R_{i+1} - R_{i-1}$, это выражение можно слегка упростить до

$$\begin{aligned} \Omega_3 = & dR_- \wedge dR_i + 2R_i dp_i \wedge dp_{i-1} + \\ & + d(p_i^2 - p_{i-1}^2) \wedge dR_i + (p_{i-1} dp_i - p_i dp_{i-1}) \wedge dR_i \end{aligned} \quad (57)$$

(естественно, $d(\Omega_3) = 0$) или

$$\Omega_3 = (dR_- \ dR_i \ dp_i \ dp_{i-1}) \cdot \hat{\Omega}_3 \cdot \begin{pmatrix} dR_- \\ dR_i \\ dp_i \\ dp_{i-1} \end{pmatrix}, \quad (58)$$

где подразумевается внешнее произведение, а матрица $\hat{\Omega}_3$ имеет вид

$$\hat{\Omega}_3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -(p_i + \frac{p_{i-1}}{2}) & p_{i-1} + \frac{p_i}{2} \\ 0 & p_i + \frac{p_{i-1}}{2} & 0 & R_i \\ 0 & -(p_{i-1} + \frac{p_i}{2}) & -R_i & 0 \end{pmatrix}. \quad (59)$$

Нетривиальной является проверка того, что гамильтонианы (53) и (54) действительно коммутируют:

$$\{H_1, H_2\}_{\Omega_3} = 0 \quad (60)$$

относительно скобки Пуассона, отвечающей симплектической структуре (57), т.е. определяемой обратной к (59) матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & \frac{2p_{i-1}+p_i}{R_i} & \frac{2p_i+p_{i-1}}{R_i} \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2p_{i-1}+p_i}{R_i} & 0 & 0 & -\frac{1}{R_i} \\ -\frac{2p_i+p_{i-1}}{R_i} & 0 & \frac{1}{R_i} & 0 \end{pmatrix}, \quad (61)$$

приводящей к “элементарным” скобкам

$$\begin{aligned}
\{R_i, R_-\}_{\Omega_3} &= 1, \\
\{p_i, p_{i-1}\}_{\Omega_3} &= -\frac{1}{2R_i}, \\
\{R_-, p_i\}_{\Omega_3} &= \frac{1}{R_i} \left(p_{i-1} + \frac{p_i}{2} \right), \\
\{R_-, p_{i-1}\}_{\Omega_3} &= \frac{1}{R_i} \left(p_i + \frac{p_{i-1}}{2} \right).
\end{aligned} \tag{62}$$

Симплектическую структуру (57) можно привести к канонической форме, вводя новые переменные так, что $p_i = p \operatorname{ch} \theta$ и $p_{i-1} = p \operatorname{sh} \theta$, тогда

$$\begin{aligned}
\Omega_3 &= dR_- \wedge dR_i + R_i d(p^2) \wedge d\theta + p^2 dR_i \wedge d\theta + d(p^2) \wedge dR_i = \\
&= d(R_- + p^2) \wedge dR_i + d(R_i p^2) \wedge d\theta,
\end{aligned} \tag{63}$$

и мы приходим к выводу, что переменными Дарбу являются θ , $R \equiv R_i$ вместе с

$$\rho = R_i p^2, \quad \Delta = R_- + p^2. \tag{64}$$

Для этих переменных скобки Пуассона имеют вид

$$\{\Delta, R\}_{\Omega_3} = 1, \quad \{\rho, \theta\}_{\Omega_3} = 1, \tag{65}$$

а все остальные равны нулю. Гамильтонианы (53), (54) в этих переменных записываются как

$$\begin{aligned}
H_1 &= C_3 R + \frac{C_1}{2} \rho^{1/2} R^{-1/2} e^\theta - \frac{1}{2} \Delta \rho^{1/2} R^{1/2} e^{-\theta} + \\
&\quad + \frac{1}{8} (e^{-\theta} - e^{3\theta}) \rho^{3/2} R^{-1/2} - \frac{3}{2} \rho^{1/2} R^{3/2} e^\theta, \\
H_2 &= \frac{C_1^2}{4R} + \frac{C_1}{2} R + \frac{C_1}{8} \frac{\rho}{R} (e^{-2\theta} - e^{2\theta}) + C_3 \rho^{1/2} R^{1/2} e^\theta + \\
&\quad + \frac{1}{4} R^3 - \frac{1}{4} \Delta^2 R - \frac{1}{32} \frac{\rho^2}{R} - \frac{9}{8} \rho R e^{2\theta} + \frac{1}{8} \rho R e^{-2\theta} + \frac{1}{64} \frac{\rho^2}{R} (e^{4\theta} + e^{-4\theta}),
\end{aligned} \tag{66}$$

т.е. являются функциями, вообще говоря, от *дробных* степеней динамических переменных. Зависимость от дробных степеней, однако, пропадает для H_2 при нулевом казимире $C_3 = 0$ и для квадрата гамильтониана H_1^2 при $C_1 = C_3 = 0$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Обсудим некоторые проблемы, связанные с данной задачей, а также перечислим оставшиеся открытыми вопросы.

Геометрия стационарной и периодической задач. Определяя стационарную задачу, мы исходили из бесконечной цепочки Тоды. Вместо этого, оставляя все рассуждения практически без изменений, в качестве отправной точки можно взять

N -периодическую задачу для цепочки Тоды ($q_{i+N} = q_i$, $p_{i+N} = p_i$, $\psi_{i+N} = w\psi_i$ и т.п.) при достаточно большом N .

Эту процедуру, однако, можно проинтерпретировать полностью в терминах алгебро-геометрических интегрируемых систем. Исходя из кривой N -периодической цепочки

$$w + \frac{1}{w} = P_N(\lambda), \quad (67)$$

оснащенной производящим дифференциалом $dS = \lambda dw/w$, можно рассмотреть редукцию цепочки в $2n$ -мерное подпространство в пространстве модулей при $n < N$. Естественный способ осуществить такую редукцию – потребовать существования на кривой (67) однозначной мероморфной функции с не более чем двумя полюсами (в точках, где $\lambda = \infty$) порядка n . Существование такой функции на кривой (67) в точности эквивалентно стационарности потока n -ого порядка в периодической цепочке Тоды, ассоциированного с линейной комбинацией мероморфных дифференциалов $d\Omega_A = \sum_{k=1}^n c_k d\Omega_k$. Поскольку в ситуации общего положения на кривой (67) не существует естественной функции с такими свойствами, это условие эффективно уменьшает (гладкий) род римановой поверхности от $N - 1$ до $n - 1$, и в результате мы получаем кривую (3) стационарной задачи. Подобная редукция уже обсуждалась в литературе в контексте связей между геометриями Дийкграафа–Вафы и Виттена–Зайберга, см. [3] и, например, [13]. Заметим также, что соответствующие производящие дифференциалы или симплектические структуры остаются при данной процедуре “развязанными”, и это отвечает различию в симплектических структурах (21), (40) и (57) стационарной задачи и бесконечной цепочки, которое уже обсуждалось выше.

О квантовой задаче. Глядя на кривую (39) и симплектическую форму (42), можно сразу написать “наивное” уравнение Шредингера

$$\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \Upsilon = (W'(\lambda)^2 - \hbar W''(\lambda)) \Upsilon \quad (68)$$

с решением

$$\Upsilon = e^{-W(\lambda)/\hbar}, \quad (69)$$

поскольку

$$\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} - W'(\lambda)^2 + \hbar W''(\lambda) = \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda} - W'(\lambda) \right) \left(\hbar \frac{\partial}{\partial \lambda} + W'(\lambda) \right). \quad (70)$$

Сравнение формул (68) и (39) для потенциала $W'(\lambda) = \lambda^2 - C_2$ дает $H = 0$ и $C_1 = \hbar/2$, а сравнение с уравнением (55) приводит к $H_2 = H_1 = 0$ и $C_1 = 3\hbar/4$. Формулы (41) и (42) позволяют думать, что квантовать систему лучше в переменных (y, w) . Для периодической цепочки Тоды (67) подобный путь приводит к уравнению Бакстера (разностному уравнению второго порядка), но для стационарной задачи из уравнения (41) в силу (42) в уравнении Бакстера появляется *интегральный* оператор. Главным препятствием на этом пути является неясность с выбором “правильных” переменных для квантования стационарной задачи, так как в наивных

переменных Дарбу уже в случае $n = 3$ гамильтонианы являются, вообще говоря, неаналитическими функциями.

Тем не менее можно попытаться решать квантовую задачу

$$\hat{\mathcal{H}}_i \mathcal{Z} = H_i \mathcal{Z}, \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (71)$$

для матрично-модельной $\mathcal{Z}$ -функции, которая в отличие от изначальной статсуммы матричной модели Z , определенной интегральным представлением (1), содержит явную информацию о (квантовом аналоге) геометрии (3), (4), т.е. буквально следует искать решение (71) для функции

$$\mathcal{Z}(c, H) = \exp \left(\frac{1}{\hbar^2} F_0(c, H) + \dots \right). \quad (72)$$

Такая постановка задачи согласована с тем фактом, что вид гамильтонианов (66) упрощается для нулевых (классических) казимиров, т.е. при условии, что их значения пропорциональны $\hbar$ (являются квантовыми поправками). При этом классические формулы (66) для гамильтонианов H_i (или некоторых полиномиальных функций от них) превращаются в дифференциальные или разностные операторы $\hat{\mathcal{H}}_i$ посредством замены $\Delta \rightarrow \partial/\partial R$ и $\theta \rightarrow \partial/\partial \rho$, так что $e^{\pm\theta}$ являются операторами сдвига по переменной ρ . Определенная таким образом $\mathcal{Z}$ -функция (72) является буквальным матрично-модельным аналогом некрасовского обобщения [14] препотенциала Виттена–Зайберга.

Благодарности. Автор признателен Г. Брадену, А. Веселову, Р. Донаги, Х. Канно, А. Миронову, Н. Некрасову, М. Ольшанецкому, В. Рубцову, С. Харчёву, Б. Хесину и особенно И. Кричеверу за полезные обсуждения. Работа была выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00642), Программы поддержки научных школ (грант № 1578.2003.2), Федеральной программы Министерства промышленности, науки и технологий РФ (грант № 40.052.1.1.1112) и Фонда поддержки Российской науки.

Список литературы

- [1] A. A. Migdal. Phys. Rep. 1983. V. 102. P. 199.
- [2] F. David. Phys. Lett. B. 1993. V. 302. P. 403–410; hep-th/9212106; G. Bonnet, F. David, B. Eynard. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. 6739–6768; cond-mat/0003324.
- [3] F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa. Nucl. Phys. B. 2001. V. 603. P. 3–41; hep-th/0103067; F. Cachazo, C. Vafa. $N = 1$ and $N = 2$ geometry from fluxes. hep-th/0206017.
- [4] R. Dijkgraaf, C. Vafa. Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories. hep-th/0206255; On geometry and matrix models. hep-th/0207106; A perturbative window into non-perturbative physics. hep-th/0208048.
- [5] I. Krichever. Commun. Pure Appl. Math. 1992. V. 47. P. 437; hep-th/9205110.
- [6] A. Marshakov. Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems. Singapore: World Scientific, 1999.
- [7] Integrability: The Seiberg–Witten and Whitham Equations. Eds. H. W. Braden, I. M. Krichever. Amsterdam: Gordon and Breach, 2000.

- [8] *A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 357. P. 565; *S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, A. Zabrodin.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 366. P. 569.
- [9] *A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466–477; hep-th/9505035.
- [10] *О. И. Богоявленский, С. П. Новиков.* Функц. анализ и его прилож. 1976. Т. 10. № 1. С. 9; *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, П. П. Питаевский.* Теория солитонов: метод обратной задачи. М.: Наука, 1980; *Б. А. Дубровин, И. М. Кривевер, С. П. Новиков.* Интегрируемые системы. В сб.: Итоги науки и техники. Сер. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. Ред. Р. В. Гамкредидзе, В. И. Арнольд, С. П. Новиков. М.: ВИНТИ, 1985. С. 179.
- [11] *I. M. Krichever, D. H. Phong.* J. Diff. Geom. 1997. V. 45. P. 349; hep-th/9604199; Symplectic forms in the theory of solitons. hep-th/9708170; *A. Marshakov.* From nonperturbative SUSY gauge theories to integrable systems. In: Proc. 10th Int. Conf. “Problems of Quantum Field Theory” (Dubna, 1996); hep-th/9607159.
- [12] *A. Marshakov.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 1169; hep-th/9602005; *A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 380. P. 75; hep-th/9603140.
- [13] *T. J. Hollowood.* JHEP. 2003. V. 0310. P. 051; hep-th/0305023; *R. Boels, J. de Boer, R. Duivenvoorden, J. Wijnhout.* JHEP. 2004. V. 0403. P. 010; hep-th/0305189; *H. Itoyama, H. Kanno.* Nucl. Phys. B. 2004. V. 686. P. 155; hep-th/0312306.
- [14] *N. A. Nekrasov.* Adv. Theor. Math. Phys. 2004. V. 7. P. 831; hep-th/0206161; Z theory. hep-th/0412021; *A. S. Losev, A. Marshakov, N. A. Nekrasov.* Small instantons, little strings and free fermions. hep-th/0302191; *N. Nekrasov, A. Okounkov.* Seiberg–Witten theory and random partitions. hep-th/0306238; *A. Braverman.* Instanton counting via affine Lie algebras. I: Equivariant J-functions of (affine) flag manifolds and Whittaker vectors. math.AG/0401409; *A. Braverman, P. Etingof.* Instanton counting via affine Lie algebras II: from Whittaker vectors to the Seiberg–Witten prepotential. math.AG/0409441.