Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, AdS_3/CFT_2 -соответствие на торе в суммировании по геометриям,
ТМФ, 2006, том 146, номер 1, 17–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2005>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 16:03:58

© 2006 г.

Л. О. Чехов*

AdS_3/CFT_2 -СООТВЕТСТВИЕ НА ТОРЕ В СУММИРОВАНИИ ПО ГЕОМЕТРИЯМ

Исследуется AdS_3/CFT_2 -соответствие в случае евклидова трехмерного пространства анти-де Ситтера, компактифицированного на заполненный тор с конформным полем на регуляризующей поверхности, погруженной в объемлющее пространство. Корреляционные функции, отвечающие теории в объемлющем пространстве при конечной температуре, стремятся к стандартным корреляционным функциям конформной теории в пределе снятой регуляризации. Как в регулярном случае, так и в случае теории на $\mathbb{Z}_N$ -орбифолде в сумме по геометриям двухточечная корреляционная функция для безмассовых полей преобразуется с точностью до расходящихся членов, пропорциональных объему группы $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$, в конечную сумму произведений конформных–антиконформных функций Грина конформной теории поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

AdS/CFT -соответствие [1] было проверено для случая взаимодействующих полей [2] (трех- и четырехгравитонное рассеяние и т.д.). Представляется интересным проверить его также и в случае, когда геометрия пространства-времени оказывается более сложной, чем просто сферическая. Различные подходы к этой проблеме были предложены в работах [3]–[5].

В работах [4], [5] рассматривалось безмассовое скалярное поле на пространстве AdS_3 , компактифицированном на заполненный тор (тороидальное тело с ручками). В данной работе рассматривается как случай однородно компактифицированного AdS_3 -многообразия без топологических сингулярностей, так и случай $\mathbb{Z}_N$ -орбифолда. Показано, что при этом классическая скалярная теория поля на AdS_3 -многообразии в объемлющем пространстве задает подходящие квантовые корреляционные функции на границе.

Напомним, что компактификация в евклидовом случае соответствует рассмотрению теории при конечной температуре для многообразия с сигнатурой $2+1$, так что можно считать, что на самом деле вычисляются корреляционные функции граничных полей для пространства AdS_3 при конечной температуре [6]. Следуя работе [6],

*Математический институт РАН им. В. А. Стеклова, Институт теоретической и экспериментальной физики им. А. И. Алиханова, Москва, Россия. E-mail: chekhov@mi.ras.ru

необходимо принять в расчет все возможные решения эйнштейновской гравитации, имеющие заданную AdS -метрику на бесконечности. В случае пространства AdS_3 решения в виде черных дыр, полученные Хокингом и Пейджем [6], [7], оказываются T -дуальными пустым пространствам AdS_3 , не содержащим внутренних сингулярностей [5], [8]; это также остается справедливым для соответствующих корреляционных функций [5]. В развитие этих идей авторы работы [9] предположили, что полная свободная энергия конформной теории поля должна задаваться суммой по всем возможным AdS_3 -геометриям с одной и той же двумерной граничной поверхностью. Это с необходимостью влечет суммирование по модулярной группе $SL(2, \mathbb{Z})$, факторизованной по параболической подгруппе $\mathbb{Z}$; при этом в рассмотрение включаются AdS -геометрия, BTZ-геометрия черной дыры и т.д. Каждая такая геометрия оказывается эквивалентной единственной AdS_3 -геометрии, *не имеющей* внутренней сингулярности, так что можно вычислять суммы только по таким гладким геометриям.

Температурные корреляционные функции в $(1 + 1)$ -мерной граничной теории в присутствии лоренцевой черной дыры BTZ были получены с помощью техники отображений в работе [10]. Наш подход отличается от техники этой работы, поскольку мы не предполагаем априори конформной инвариантности граничной теории. Вместо этого, также как и в работах [4], [5], вводится регуляризующая поверхность *внутри* пространства AdS_3 ; эта поверхность должна быть инвариантна относительно действия группы дискретных симметрий. Этот подход во многом схож с подходом Краснова [11] к 3D-гравитации ¹⁾.

В разделе 2 описана общая структура AdS_3 -многообразий и вводится регуляризация типа ε -конуса, в которой объем и площадь ограничивающей поверхности становятся конечными в случае заполненного тора. В разделе 3 выводятся функции Грина для полей, сконцентрированных в точках, расположенных на границе тора в объемлющем пространстве, в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$. В разделе 4 вычисляется сумма по геометриям в случае гладкого пространства AdS_3 с необходимыми вычитаниями и показано, что в случае безмассового поля достигается голоморфная–антиголоморфная факторизация соответствующей двухточечной корреляционной функции. В разделе 5 исследуется соответствующая сумма по геометриям для корреляционных функций безмассового скалярного поля в случае геометрии $\mathbb{Z}_N$ -орбифолда и показано, что эта сумма расщепляется в конечную сумму по конформным блокам. Краткое обсуждение массивного случая и возможных перспектив содержится в разделе 6.

2. ГЕОМЕТРИЯ AdS_3 -МНОГООБРАЗИЙ

Группа $SL(2, \mathbb{C})$ конформных преобразований комплексной плоскости допускает продолжение своего действия в верхнее полупространство $\mathbb{H}_3^+$, снабженное метрикой постоянной отрицательной кривизны (пространство AdS_3). В униформизации

¹⁾В подходе Краснова для тела с ручками произвольного рода выбирается граничная ε -поверхность, инвариантная относительно действия соответствующей фуксовой подгруппы и имеющая индуцированную постоянную двумерную кривизну. Эта поверхность задается своей функцией высоты $\varepsilon e^{\phi(\xi, \bar{\xi})}$ с полем $\phi(\xi, \bar{\xi})$, удовлетворяющим уравнению Лиувилля.

Шоттки римановы поверхности старших родов получаются из $\mathbb{C}$ при факторизации по конечно-порожденной дискретной (фуксовой) подгруппе $\Gamma \subset SL(2, \mathbb{C})$ со свободным действием. Поэтому действие этой подгруппы можно продолжить на все пространство AdS_3 и получить после факторизации трехмерное многообразие постоянной отрицательной кривизны (AdS_3 -многообразие), граница которого представляет собой (топологически) двумерную риманову поверхность [12].

Простейшее AdS_3 -многообразие рода один (тело с тороидальной границей) получается при отождествлении

$$(\xi, \bar{\xi}, t) \sim (q\xi, \bar{q}\bar{\xi}, |q|t), \quad (2.1)$$

где $q = e^{2i\pi\tau}$ – модулярный параметр, $\text{Im } \tau > 0$, $\xi = x + iy$ – координата на $\mathbb{C}$, $\bar{\xi} = x - iy$, $t > 0$ представляет собой третью координату на $\mathbb{H}_3^+$.

Принимая принцип AdS/CFT-соответствия, необходимо ввести в теорию некоторые промежуточные регуляризации, позволяющие получать искомые величины [5], [11]. Для этого поместим граничные данные на таком двумерном подмногообразии пространства AdS_3 , которое будет инвариантно относительно действия фуксовой группы в полном пространстве. Такое подмногообразие в случае тора задается ε -конусом – множеством точек (ξ, t) , таких, что $t = \varepsilon|\xi|$. Этот конус, очевидно, инвариантен относительно отождествления (2.1), осуществляемого фуксовым элементом, и превращается в тор после отождествления. Часть пространства $\mathbb{H}_3^+$, ограниченная снизу этим конусом, становится после факторизации внутренностью тороидального тела. Задание граничных данных на этом конусе влечет единственность решения уравнения Лапласа (мы имеем дело с задачей Дирихле на компактном многообразии).

С геометрической точки зрения, вводя регуляризацию ε -конуса и факторизуя по группе Γ преобразований (2.1), мы получаем заполненный тор, на поверхности которого (на двумерном торе) задано поле конформной теории. При этом “центр” тора представляет собой единственную замкнутую геодезическую (образ вертикальной полупрямой $\xi = \bar{\xi} = 0$), имеющую длину $\ln |q|$, в то время как AdS-инвариантное (собственное) расстояние r от этой геодезической до образа ε -конуса постоянно, $\text{ch } r = 1/\varepsilon$.

Следуя подходу суммирования по геометриям [9], необходимо фиксировать двумерное подмногообразие и рассмотреть все возможные метрики тех AdS_3 -многообразий, границей которых служит данное подмногообразие. Ограничимся рассмотрением возможных классов метрик тел, задаваемых единственной геодезической на границе, которая оказывается гомеоморфной единственному стягиваемому циклу (a -циклу) в теле. Выбор дополнительного b -цикла, гомеоморфного замкнутой геодезической внутри заполненного тора, не единствен; свобода его выбора в точности определяется абелевой (параболической) подгруппой $\mathbb{Z}$, позволяющей добавлять накрутки a -циклов к заданному b -циклу. Поэтому сначала найдем функцию Грина заполненного тора более простым способом, чем в работе [5], а затем выполним суммирование по геометриям. Особый интерес при этом представляет случай безмассового скалярного поля на пространстве AdS_3 . Вставки этого поля соответ-

ствуют на языке AdS/CFT-соответствия вставкам тензора энергии-импульса $\partial X \bar{\partial} X$ скалярного поля $X(z, \bar{z})$ конформной ($c = 1$)-теории поля на границе многообразия. В результате для этого поля будет воспроизведена (с точностью до некоторых расходимостей) структура конформных блоков корреляционных функций конформной теории на торе.

3. ФУНКЦИЯ ГРИНА НА ПРОСТРАНСТВЕ AdS_3

Как известно, пространство AdS_3 однородно, т.е. можно ввести интервал в терминах собственного расстояния до точки отсчета,

$$ds^2 = dr^2 + \text{sh}^2 r [d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2]. \quad (3.1)$$

Для полноты картины представим действие скалярного поля Φ массы m на пространстве AdS_3 в координатах (3.1):

$$S = \int dr d\theta d\varphi \text{sh}^2 r \sin \theta \left\{ (\partial_r \Phi)^2 + \frac{(\partial_\theta \Phi)^2}{\text{sh}^2 r} + \frac{(\partial_\varphi \Phi)^2}{\text{sh}^2 r \sin \theta} + m^2 \Phi^2 \right\}. \quad (3.2)$$

Это действие после отщепления угловых переменных приводит к следующему уравнению движения для радиальной составляющей $\Phi(r)$:

$$\partial_r (\text{sh}^2 r \partial_r \Phi(r)) - l(l+1)\Phi(r) - m^2 \text{sh}^2 r \Phi(r) = 0, \quad (3.3)$$

где l – полный угловой момент. Функция Грина поля массы m в случае объемлющего пространства AdS_d произвольной размерности должна удовлетворять уравнению

$$\text{sh}^{-(d-1)} r \partial_r (\text{sh}^{d-1} r \partial_r G(r|m)) - m^2 G(r|m) = \delta^{(d)}(r) \quad (3.4)$$

с очевидными условиями убывания на бесконечности. Нас интересуют выражения для $G(r|m)$ только лишь в режиме больших r . Тогда

$$G(r|m)|_{r \rightarrow \infty} \propto e^{-\kappa r}, \quad \kappa^2 - (d-1)\kappa - m^2 = 0. \quad (3.5)$$

Напомним, что спектр масс в пространстве AdS_d задается собственными значениями оператора полного углового момента на дополнительной сфере S_d , что обеспечивает дискретный спектр масс, $m^2 = l(l+d-1)$, в то время как соответствующие значения параметра κ оказываются целыми числами:

$$\kappa = d + l - 1, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (3.6)$$

С этого момента ограничимся рассмотрением пространства AdS_3 . Тогда

$$G(r|m) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{1+m^2}r}}{\text{sh} r} = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-(l+1)r}}{\text{sh} r}. \quad (3.7)$$

Выбирая две точки ξ и χ на комплексной плоскости и рассматривая их образы на ε -конусе, т.е. точки с $\mathbb{H}_3^+$ -координатами $(\xi, \varepsilon|\xi|)$ и $(\chi, \varepsilon|\chi|)$, определим расстояние между этими точками в объемлющем пространстве. Для двух произвольных точек в

верхнем полупространстве, евклидовы расстояния которых до плоскости $\mathbb{C}$ суть R_1 и R_2 , расстояние между проекциями этих точек на плоскость $\mathbb{C}$ равно d , точное собственное расстояние имеет вид

$$r = \ln \left[-\frac{R_2}{2R_1} - \frac{R_1}{2R_2} + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{R_2}{R_1} + \frac{R_1}{R_2} + \frac{d^2}{R_1 R_2} \right)^2 - 4} \right] \quad (3.8)$$

причем в нашем случае $R_1 = \varepsilon|z|$, $R_2 = \varepsilon|w|$ и $d = |z - w|$. Можно принять во внимание, что $d \gg |R_1 - R_2|$ для любых двух точек на ε -конусе, а потому

$$r \simeq \ln \left[-\frac{R_2}{2R_1} - \frac{R_1}{2R_2} + \frac{d}{2R_1 R_2} \sqrt{2R_1 + 2R_2 + d^2} \right], \quad (3.9)$$

и при больших расстояниях это просто приводит к следующему соотношению:

$$r \simeq \ln \left(\frac{|\xi - \chi|^2}{2\varepsilon^2 |\xi| |\chi|} + O(\varepsilon^2) \right), \quad (3.10)$$

где

$$\xi = e^{i2\pi z}, \quad \chi = e^{i2\pi w} \quad (3.11)$$

– экспоненциальное отображение.

Переходя от униформизации Шоттки к стандартной комплексной структуре на двумерном торе с использованием данного отображения и учитывая (3.5), получим функцию Грина для двух вставок на ε -конусе при больших собственных расстояниях:

$$G(z, w | m) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{|e^{i2\pi z} - e^{i2\pi w}|^2}{2\varepsilon^2 |e^{i2\pi z}| |e^{i2\pi w}|} \right)^{-\kappa} = \frac{\varepsilon^{2\kappa}}{8\pi} |\sin(\pi(z - w))|^{-2\kappa}. \quad (3.12)$$

Будем удерживать масштабный множитель $\varepsilon^{2\kappa}/8\pi$, который мы уберем лишь в самом конце вычислений после суммирования по геометриям. Причина этого выяснится в следующем разделе. Функция Грина (3.12) периодична относительно сдвигов $z \rightarrow z + m$ и $w \rightarrow w + k$ при $k, m \in \mathbb{Z}$. Чтобы получить теперь функцию Грина на границе заполненного тора, необходимо вычислить сумму по всем образам z_n точки z , $z_n = z + n\tau$. Таким образом, окончательный ответ для функции Грина на границе тороидального тела имеет вид

$$G_{\text{torus}}(z, w | m) = \frac{\varepsilon^{2\kappa}}{8\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\sin(\pi(z - w + n\tau))|^{-2\kappa}. \quad (3.13)$$

Эта формула (с точностью до масштабных множителей) воспроизводит ответ, полученный в работе [5] в безмассовом случае ($\kappa = 2$), и результат работы [13] для общего массивного поля.

4. СУММА ПО ГЕОМЕТРИЯМ

Наиболее сложной проблемой при вычислении суммы по геометриям оказывается выбор правильной меры суммирования. Для этого предлагались различные

варианты [9], [13]. Если принять подход работы [9], то следует рассматривать *одну и ту же* граничную двумерную поверхность, при этом правильное продолжение в пространство AdS_3 полностью определяется набором (стягиваемых) a -циклов; в случае тороидальной геометрии имеется ровно один a -цикл, задаваемый двумя взаимно простыми целыми числами (c, d) с отождествлением $(c, d) \propto (-c, -d)$. При этом модулярное преобразование из фактор-пространства $SL(2, \mathbb{Z})/\mathbb{Z}$ имеет вид

$$\tau \rightarrow \tau' \equiv \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad z \rightarrow z' \equiv \frac{z}{c\tau + d}, \quad w \rightarrow w' \equiv \frac{w}{c\tau + d}, \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 1, \quad (4.1)$$

где пару (a, b) следует выбирать по модулю преобразований из параболической группы $(a, b) \rightarrow (a + c, b + d)$. Это следует из того, что стягиваемый цикл полностью задается парой чисел (c, d) как образ прямой с направляющим вектором $c\tau + d$ и с отождествлением $z \simeq z + 1 \simeq z + \tau$. Выбор дополнительного b -цикла (образ прямой с направляющим вектором $a\tau + b$) фиксирован только с точностью до добавления векторов, параллельных a -циклу. Условие равенства единице детерминанта в формуле (4.1) при этом выражает то, что эти два цикла имеют единственную точку пересечения на торе.

Примем, что мера суммирования есть просто *гиперболический объем* тороидального тела, ограниченного тором в AdS -пространстве с выбранным a -циклом. Теорема Грэма и Ли [14] утверждает, что задание конформной метрики на границе шара однозначно задает гладкое продолжение с AdS -метрикой во внутренность шара. Для тела с ручками AdS -метрика во внутренности при этом полностью определяется конформной метрикой на граничной римановой поверхности и набором стягиваемых a -циклов. Для того чтобы вычислить соответствующую метрику и объем, используем схему, представленную на рисунке.

В геометрии, представленной на рисунке, рассматривается действие группы Шоттки на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с модулярным параметром $\tau_{(c,d)} = \tau' \equiv (a\tau + b)/(c\tau + d)$. Она действует, отождествляя окружность $|z| = 1$ и окружность $|z| = \text{Im } \tau_{(c,d)}$. Заметим, что для матрицы $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ с единичным детерминантом

$$\text{Im } \tau_{(c,d)} = \frac{\text{Im } \tau_{(0,1)}}{|c\tau + d|^2}. \quad (4.2)$$

Используя формулу (2.1), продолжим теперь это отождествление на все пространство AdS_3 . Естественными координатами на рисунке будут сферические координаты $(\rho, \varepsilon, \varphi)$, где $\rho = \ln(\xi\bar{\xi} + t^2)/2$ – логарифм евклидова расстояния до точки начала отсчета, а ε и φ – соответствующие углы; интервал (3.1) в этих координатах имеет вид

$$ds^2 = \frac{d\rho^2 + d\varepsilon^2 + \cos^2 \varepsilon d\varphi^2}{\sin^2 \varepsilon}. \quad (4.3)$$

Выберем такую ограничивающую поверхность, для которой собственная *длина* $l_a^{(c,d)}$ a -цикла в метрике AdS_3 в точности пропорциональна длине соответствующей гео-

дезической в плоской метрике на $\mathbb{C}$, т.е. положим

$$l_a^{(c,d)} = 2\pi \frac{\cos \varepsilon_{(c,d)}}{\sin \varepsilon_{(c,d)}} = |c\tau + d| l_a^{(0,1)} = |c\tau + d| 2\pi \frac{\cos \varepsilon_{(0,1)}}{\sin \varepsilon_{(0,1)}}, \quad (4.4)$$

следовательно,

$$\frac{\cos \varepsilon_{(c,d)}}{\sin \varepsilon_{(c,d)}} = |c\tau + d| \frac{\cos \varepsilon_{(0,1)}}{\sin \varepsilon_{(0,1)}}. \quad (4.5)$$

Этот выбор оправдан тем, что он приводит к правильному поведению функций Грина при преобразованиях масштаба (см. ниже). При этом из гиперболической геометрии следует, что

$$l_b^{(c,d)} = \frac{\text{Im } \tau_{(c,d)}}{\sin \varepsilon_{(c,d)}} = \frac{\text{Im } \tau_{(0,1)}}{|c\tau + d|^2 \sin \varepsilon_{(c,d)}}. \quad (4.6)$$

Регуляризирующая поверхность для тора. Здесь $l_a^{(c,d)}$ – собственная (AdS) длина окружности регуляризирующего конуса (который представляет собой цилиндр в геометрии собственного расстояния) и $l_b^{(c,d)}$ – собственное (AdS) расстояние между отождествляемыми окружностями на конусе.

Объем тороидального тела, ограниченного тором индуцированной площади $S_{(c,d)}$ и имеющего ε -конус, лежащий на расстоянии $\text{arcsch } \varepsilon$ от единственной замкнутой геодезической, задается формулой

$$V_{(c,d)} = \frac{1}{2} S_{(c,d)} \cos \varepsilon_{(c,d)} = \frac{1}{2} l_a^{(c,d)} l_b^{(c,d)} \cos \varepsilon_{(c,d)}. \quad (4.7)$$

С помощью формул (4.4)–(4.6) можно получить простое соотношение

$$V_{(c,d)} = V_{(0,1)}, \quad (4.8)$$

т.е. в указанных ограничениях гиперболический объем регуляризующего многообразия оказывается модулярно-инвариантным, и весовые множители при суммировании функций Грина вида (3.13) *совпадают*. Тогда в силу соотношения (4.5) множитель $\varepsilon_{(c,d)}^{2\kappa}$ в выражении (3.12) в пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ стремится к собственному масштабному множителю $|c\tau + d|^{-2\kappa} \varepsilon_{(0,1)}^{2\kappa}/2$, стоящему перед соответствующей функцией Грина: при преобразовании (4.1), получим

$$G_{\text{torus}}(z, w | m) \rightarrow G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z - w | m) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} |(c\tau + d) \sin(\pi(z' - w' + n\tau'))|^{-2\kappa}, \quad (4.9)$$

где мы наконец опустили несущественный общий множитель $\varepsilon_{(0,1)}^{2\kappa}/(8\pi)$, и нам осталось лишь просуммировать по всем (c, d) -парам.

Ввиду следующего очевидного поведения функции (4.9) при малых z :

$$G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z | m)|_{z \rightarrow 0} \simeq \frac{1}{|z|^{2\kappa}}, \quad (4.10)$$

которое не зависит от выбора (c, d) -пары, чтобы получить конечный ответ при суммировании по (c, d) -парам, необходимо вычесть из всех (кроме одного) членов этой суммы соответствующую (дваждыпериодическую) функцию

$$F(z | \kappa) = \sum_{n,k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z + n\tau + k|^{2\kappa}}. \quad (4.11)$$

Регуляризованная таким образом сумма имеет особенно полезный вид в *безмассовом случае* $\kappa = 2$. Применяя следующее представление для функции $\sin^{-2}(\pi z)$:

$$\frac{1}{\sin^2(\pi z)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi^2(z + k)^2}, \quad (4.12)$$

можно представить (опуская незначащие множители, пропорциональные π) сумму по геометриям как

$$\begin{aligned} \sum_{(c,d)}' (\text{reg}) G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z | m)|_{\kappa=2} &= F(z | 1) + \sum_{(c,d)}' (G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z | m)|_{\kappa=2} - F(z | 1)) = \\ &= F(z | 1) + \sum_{(c,d)}' \left(\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + k_1(c\tau + d) + n(a\tau + b))^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{1}{(\bar{z} + k_2(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^2} - F(z | 1) \right) \end{aligned} \quad (4.13)$$

(сумма со штрихом означает, что следует учитывать пары (c, d) и $(-c, -d)$ как одну). В этой сумме для каждой пары (c, d) надо взять единственную дополнительную пару (a, b) такую, что $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$.

Собирая вместе коэффициенты, стоящие при τ , и слагаемые, не зависящие от z , τ в знаменателях в (4.13), получим, что

$$\begin{aligned} & \sum'_{(c,d)} \left(\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + (k_1 c + na)\tau + (k_1 d + nb))^2} \times \right. \\ & \quad \left. \times \frac{1}{(\bar{z} + (k_2 c + na)\bar{\tau} + (k_2 d + nb))^2} - F(z|1) \right) = \\ & = \sum'_{(c,d)} \left(\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + s_1 \tau + t_1)^2 (\bar{z} + s_2 \bar{\tau} + t_2)^2} - \sum_{s, t \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z + s\tau + t|^4} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $s_{1,2}$ и $t_{1,2}$ – все возможные значения, которые принимают следующие величины:

$$na + k_{1,2}c = s_{1,2}, \quad nb + k_{1,2}d = t_{1,2}, \quad k_{1,2}, n \in \mathbb{Z}.$$

Легко видеть, что

$$\Delta k \cdot c = \Delta s; \quad \Delta k \cdot d = \Delta t, \quad (4.15)$$

где $\Delta k \equiv k_1 - k_2$, $\Delta s \equiv s_1 - s_2$ и $\Delta t \equiv t_1 - t_2$. Так как наибольший общий делитель $\text{GCD}(c, d) = 1$ и мы отождествили $(c, d) \simeq (-c, -d)$, уравнения (4.15) имеют единственное решение

$$\Delta k = \pm \text{GCD}(\Delta s, \Delta t), \quad c = \pm \frac{\Delta s}{\Delta k}, \quad d = \pm \frac{\Delta t}{\Delta k},$$

если только $\Delta s = \Delta t = 0$ (заметим, что числа c и d могут обращаться в нуль, но не одновременно, и если $c=0$, то $d = \pm 1$, и наоборот). При заданных c и d (и соответственно a и b), решение, например, матричного уравнения относительно n и k_1 вида

$$(n, k_1) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (s_1, t_1)$$

существует и единственно в целых числах $\mathbb{Z}$, поскольку $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$. Вклад в (4.14) при $\Delta s = \Delta t = 0$ (что предполагает $\Delta k = 0$) полностью сокращается вкладом от функции $F(z|1)$, определенной формулой (4.11).

Таким образом, мы получили, что регуляризованная сумма в (4.13)

$$\begin{aligned} \sum'_{(c,d)} (\text{reg}) G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z|m)|_{m=0} &= \sum_{\substack{s_1, t_1 \\ s_2, t_2 \in \mathbb{Z}}} \frac{1}{(z + s_1 \tau + t_1)^2 (\bar{z} + s_2 \bar{\tau} + t_2)^2} = \\ &= \wp(z|\tau) \overline{\wp(z|\tau)} \end{aligned} \quad (4.16)$$

совпадает с квадратом модуля $\wp$ -функции Вейерштрасса

$$\wp(z|\tau) = \sum_{s, t \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z + s\tau + t)^2}.$$

Можно ожидать, что этот член обеспечивает правильное выражение для корреляционной функции конформной теории в сумме по метрикам AdS_3 , поскольку он воспроизводит структуру конформных блоков конформной теории поля.

Например, функция (4.16) в точности совпадает с корреляционной функцией $\langle \partial X(z, \bar{z}) \partial X(z, \bar{z}) \partial X(0, 0) \partial X(0, 0) \rangle$ свободного скалярного поля $X(z, \bar{z})$ на торе при $c = 1$.

5. СУММА ПО ГЕОМЕТРИЯМ В СЛУЧАЕ $\mathbb{Z}_N$ -ОРБИФОЛДА

Применяя наш метод, можно также получить сумму по геометриям для корреляционной функции безмассового поля в случае, когда на замкнутой геодезической линии тороидального тела (вертикальная ось на рисунке) находится коническая сингулярность с пространственным углом $2\pi/N$. Эту сингулярность можно разрешить, рассматривая N -листное накрытие соответствующего пространства, представляющего собой всего лишь рассмотренное выше тороидальное тело. Это отвечает наложению следующих условий двойной периодичности на масштабированную переменную $\tilde{z} \equiv z/N$ в случае тора:

$$f(\tilde{z}) = f(\tilde{z} + 1), \quad f(\tilde{z}) = f(\tilde{z} + \tau). \quad (5.1)$$

Соответствующая корреляционная функция в безмассовом случае имеет вид [5]

$$G_{\text{torus}}^{(N)}(z | 0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^N \left| \frac{1}{\pi} \sin \left(\pi \frac{z + p + n\tau}{N} \right) \right|^{-2\kappa} \Big|_{\kappa=2}, \quad (5.2)$$

и в сумме по геометриям следует выбрать [13] (ср. с (4.13))

$$\sum_{(c,d)} {}'(\text{reg}) G_{\text{torus}}^{(c,d);N}(z | 0) = F(z | 1) + \sum_{(c,d)} {}'(G_{\text{torus}}^{(c,d);N}(z | 0) - F(z | 1)), \quad (5.3)$$

где

$$G_{\text{torus}}^{(c,d);N}(z | m) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{p=1}^N \left| \frac{1}{\pi} (c\tau + d) \sin \left(\pi \frac{z' + p + n\tau'}{N} \right) \right|^{-2\kappa}, \quad (5.4)$$

величины z' , τ' определены в формуле (4.1). Функция $F(z | \kappa)$ задается формулой (4.11). Используя тот же прием, что и в случае гладкого тороидального тела, представим правую часть равенства (5.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} & N^4 F(z | 1) + N^4 \sum_{(c,d)} {}' \left(\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^N \frac{1}{(z + (Nk_1 + p)(c\tau + d) + n(a\tau + b))^2} \times \right. \\ & \quad \times \left. \frac{1}{(\bar{z} + (Nk_2 + p)(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^2} - F(z | 1) \right) = \\ & = N^4 F(z | 1) + N^4 \sum_{(c,d)} {}' \left(\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^N \frac{1}{(z + s_1\tau + t_1)^2 (\bar{z} + s_2\bar{\tau} + t_2)^2} - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{s, t \in \mathbb{Z}} \frac{1}{|z + s\tau + t|^4} \right), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $s_{1,2}$ и $t_{1,2}$ – правые части системы уравнений

$$\begin{aligned} na + (Nk_{1,2} + p)c &= s_{1,2}, \\ nb + (Nk_{1,2} + p)d &= t_{1,2}, \end{aligned}$$

которая снова допускает единственное решение относительно $k_{1,2}$, d , если $\Delta s = Nx$, $\Delta t = Ny$, причем $x, y \in \mathbb{Z}$ не обращаются в нуль одновременно²⁾; вклад при $x = y = 0$ снова в точности аннулируется функцией $F(z|1)$.

В конечном итоге получим

$$\begin{aligned} \sum_{(c,d)} {}'(\text{reg}) G_{\text{torus}}^{(c,d);N}(z|0) &= \sum_{s,t,x,y \in \mathbb{Z}} \frac{N^4}{(z + s\tau + t)^2 (\bar{z} + (s + Nx)\bar{\tau} + (t + Ny))^2} = \\ &= \sum_{s_1, t_1, s_2, t_2 \in \mathbb{Z}} \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \frac{N^4}{(z + p\tau + q + Ns_1\tau + Nt_1)^2 (\bar{z} + p\bar{\tau} + q + Ns_2\bar{\tau} + Nt_2)^2} = \\ &= \sum_{p=1}^N \sum_{q=1}^N \left| \wp\left[\frac{p}{N}\right]\left[\frac{q}{N}\right](\tilde{z}|\tau) \right|^2, \end{aligned} \quad (5.6)$$

где

$$\wp\left[\frac{p}{N}\right]\left[\frac{q}{N}\right](\tilde{z}|\tau) \equiv \sum_{s,t \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(\tilde{z} + p\tau/N + q/N + s\tau + t)^2}$$

– $\wp$ -функция Вейерштрасса с характеристиками, и сумма по (c,d) -парам в формуле (5.6) обладает свойствами суммы по конформным блокам в конформной теории поля с твистованными граничными условиями, отвечающими случаю $\mathbb{Z}_N$ -орбифолдов.

6. ОБСУЖДЕНИЕ. МАССИВНЫЕ МОДЫ

Корреляционные функции в AdS-пространстве в сумме по геометриям обладают свойствами сумм по конформным блокам в соответствующей конформной теории поля. Хотя в деталях был рассмотрен только безмассовый случай, представляется вероятным, что подобная процедура (с небольшими изменениями) может быть применена ко всему спектру массивных мод, возникающему в картине AdS/CFT-соответствия. Обобщение представляется достаточно прямым, но свойство факторизации должно быть тем не менее подправлено; чтобы увидеть это, рассмотрим пример корреляционных функций для полей на втором уровне спектра масс. Применяя формулу (4.9) и равенство

$$\frac{1}{\sin^4(\alpha z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{(\alpha z + \pi n)^4} + \frac{2}{3(\alpha z + \pi n)^2} \right)$$

²⁾Это условие удобно выразить как $x^2 + y^2 > 0$.

и производя суммирование по (c, d) -парам, получим

$$\begin{aligned} \sum'_{(c,d)} {}^{(\text{reg})} G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z|m)|_{\kappa=4} &= F(z|2) + \sum'_{(c,d)} (G_{\text{torus}}^{(c,d)}(z|m)|_{\kappa=4} - F(z|2)) = \\ &= F(z|2) + \sum'_{(c,d)} \left[\sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \left(\frac{1}{(z + k_1(c\tau + d) + n(a\tau + b))^4} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi^2}{3(c\tau + d)^2(z + k_1(c\tau + d) + n(a\tau + b))^2} \right) \times \right. \\ &\quad \times \left(\frac{1}{(\bar{z} + k_2(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^4} + \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{2\pi^2}{3(c\bar{\tau} + d)^2(\bar{z} + k_2(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^2} \right) - F(z|2) \right]. \end{aligned} \quad (6.1)$$

Помимо “факторизованного” члена $\wp''(z|\tau)\overline{\wp''(z|\tau)}/6$, возникающего при суммировании по (c, d) -парам, произведение главных (первых) членов в скобках в формуле (6.1) с сингулярностью, вычтенной членом $F(z|2)$, дает вклады

$$\sum'_{(c,d)} \sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi^2}{3(c\tau + d)^2(z + k_1(c\tau + d) + n(a\tau + b))^2(\bar{z} + k_2(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^4} + \text{к.с.}$$

и

$$\sum'_{(c,d)} \sum_{k_1, k_2, n \in \mathbb{Z}} \frac{4\pi^4}{9|c\tau + d|^4(z + k_1(c\tau + d) + n(a\tau + b))^2(\bar{z} + k_2(c\bar{\tau} + d) + n(a\bar{\tau} + b))^2},$$

которые сходятся в силу присутствия множителей $(c\tau + d)$ в знаменателях. Но как раз ввиду наличия этих множителей становится невозможным произвести процедуру ресуммирования, как в разделах 4 и 5, и возможное модулярное поведение таких сумм может оказаться более сложным. Например, можно произвести пересуммирование в первом вкладе, переходя к переменным суммирования $s_{1,2}, t_{1,2}$, что дает

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{s_1, s_2 \\ t_1, t_2 \in \mathbb{Z} \\ (\Delta s)^2 + (\Delta t)^2 > 0}} \frac{2\pi^2(\text{GCD}(\Delta s, \Delta t))^2}{3(\Delta s\tau + \Delta t)^2(z + s_1\tau + t_1)^2(\bar{z} + s_2\bar{\tau} + t_2)^4} + \\ &+ \sum'_{(c,d)} \frac{1}{(c\tau + d)^2} \sum_{s, t \in \mathbb{Z}} \frac{2\pi^2}{3(z + s\tau + t)^2(\bar{z} + s\bar{\tau} + t)^4} + \text{к.с.}, \end{aligned}$$

где множитель перед вторым членом может быть записан как

$$\sum'_{(c,d)} \frac{1}{(c\tau + d)^2} = \frac{1}{\xi(2)} E_2(\tau) = \frac{3}{\pi^2} E_2(\tau),$$

и

$$E_2(\tau) \equiv \sum_{m, n \in \mathbb{Z}, m^2 + n^2 > 0} \frac{1}{(m\tau + n)^2}$$

– ряд Эйзенштейна.

Еще более сложной (в идеологическом смысле) оказывается проблема поиска правильной меры суммирования. В рассматриваемой регуляризации в объемлющем пространстве для функций Грина представляется вероятным, что для того чтобы воспроизвести правильное масштабное поведение функции Грина при различных геометриях, эта мера (или, вернее, соответствующий гиперболический объем) должна быть постоянной для всех геометрий заполненного тора с данной метрикой на граничной поверхности. Это приводит, однако, к необходимости введения регуляризующих факторов; с другой стороны, эти регуляризующие факторы не зависят от дополнительной структуры (от выбора a -циклов) и поэтому могут быть определены однозначно, как только фиксирована двумерная метрика. Тем не менее остается важный вопрос: можно ли получить соответствующие регуляризующие факторы из теоретико-полевого рассмотрения, связанного с системами D1–D5-бран (см. [15] и приведенные там ссылки). Также интересно проверить, может ли гамильтоново описание из работы [16], связанное с локальными вкладами, быть полезно при построении такой регуляризации. Мы надеемся, что само возникновение структуры конформных блоков при суммировании по геометриям в данном подходе оправдывает дальнейшие исследования этих относительно простых систем. Еще одно напрашивающееся обобщение состоит в рассмотрении суперсимметричной версии полной картины.

Еще одна, намного более сложная задача – это построение обобщений этой техники на тела старших родов. В этом случае в картине униформизации Шоттки на комплексной ξ -плоскости с ограничивающей поверхностью, задаваемой уравнением $t = \varepsilon e^{\phi(\xi, \bar{\xi})}$, мы имеем поле $\phi(\xi, \bar{\xi})$, удовлетворяющее уравнению Лиувилля. При этом необходимо уметь работать с выражениями вида (ср. с (3.12))

$$G_{\text{higher genus}}(\xi, \chi | m) \simeq \sum_k \left(\frac{|\xi - \chi_k|^2}{2\varepsilon^2 |e^{\phi(\xi, \bar{\xi})}| |e^{\phi(\chi_k, \bar{\chi}_k)}|} \right)^{-\kappa},$$

где суммирование ведется по всем образам точки χ при действии группы Шоттки. И при этом все еще остается проблема суммирования по геометриям AdS_3 , задаваемым всеми возможными выборами структуры a -циклов на соответствующей римановой поверхности. Это может привести также и к прогрессу в исследовании лиувиллевских систем.

Благодарности. Автор признателен К. Краснову за многочисленные ценные обсуждения, а также организаторам встречи в Дубне за гостеприимство. Работа поддержана РФФИ (грант № 03-02-17373), Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2052.2003.1) и Программой “Математические методы нелинейной динамики”.

Список литературы

- [1] *J. M. Maldacena.* Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 231–252; hep-th/9711200;
S. S. Gubser, I. R. Klebanov, A. M. Polyakov. Phys. Lett. B. 1998. V. 428. P. 105–114;

- hep-th/9802109; *E. Witten*. Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 253–291; hep-th/9802150.
- [2] *W. Mueck, K. S. Vishwanatan*. Phys. Rev. D. 1998. V. 58. P. 41901; hep-th/9804035; *Hong Liu, A. A. Tseytlin*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 086002; hep-th/9807097; *D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli*. Phys. Lett. B. 1999. V. 452. P. 61–68; hep-th/9808006; *E. D'Hoker, D. Z. Freedman, S. D. Mathur, A. Matusis, L. Rastelli*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 562. P. 353–394; hep-th/9903196; *E. D'Hoker, D. Z. Freedman*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 544. P. 612–632; hep-th/9809179.
- [3] *G. Bonelli*. Phys. Lett. B. 1999. V. 450. P. 363–367; hep-th/9810194.
- [4] *L. Chekhov*. AdS/CFT correspondence on torus. hep-th/9811146.
- [5] *L. Chekhov*. Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 2157–2168; hep-th/9903209.
- [6] *E. Witten*. Adv. Theor. Math. Phys. 1998. V. 2. P. 505–532; hep-th/9803131.
- [7] *S. W. Hawking, D. Page*. Commun. Math. Phys. 1983. V. 87. P. 577–588.
- [8] *S. Carlip, C. Teitelboim*. Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 622–632; *J. Maldacena, A. Strominger*. JHEP. 1998. V. 9812. P. 005; hep-th/9804085.
- [9] *R. Dijkgraaf, J. M. Maldacena, G. W. Moore, E. Verlinde*. A black hole Farey tail. hep-th/0005003.
- [10] *E. Keski-Vakkuri*. Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 104001.
- [11] *K. Krasnov*. Adv. Theor. Math. Phys. 2000. V. 4. P. 929–979; hep-th/0005106.
- [12] *D. Hejhal*. Adv. Math. 1975. V. 15. P. 133–156; *W. P. Thurston*. The Geometry and Topology of Three-Manifolds (Princeton Notes). Princeton: Princeton Univ. Press, 1979.
- [13] *M. Kleban, M. Porrati, R. Rabadán*. hep-th/0407192. V. 0410, 2004.
- [14] *C. R. Graham, J. M. Lee*. Adv. Math. 1991. V. 87. P. 186–225.
- [15] *G. W. Moore*. Les Houches lectures on strings and arithmetics. hep-th/0401049.
- [16] *G. E. Arutyunov, S. A. Frolov*. Nucl. Phys. B. 1999. V. 544. P. 576–589; hep-th/9806216.