Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Руджинарс, Собственные функции для разностей гамильтонианов, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 31–41

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2006>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 10:29:44

© 2006 г.

С. Н. М. Руджинарс*

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ С НУЛЕВЫМ СОБСТВЕННЫМ ЗНАЧЕНИЕМ ДЛЯ РАЗНОСТЕЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ГАМИЛЬТонианов КАЛОДЖЕРО–МОЗЕРА

Представлены и исследованы собственные функции с нулевым собственным значением для операторов $A_l(x) - A_l(-y)$ ($l = 1, 2, \dots, N$, $x, y \in \mathbb{C}^N$), где $A_l(x)$ – коммутирующие аналитические разностные операторы эллиптического релятивистского типа Калоджеро–Мозера. Эти собственные функции представляют собой произведения эллиптических гамма-функций. Они инвариантны относительно перестановок аргументов $x_1, \dots, x_N$ и $y_1, \dots, y_N$ и взаимной замены параметров, определяющих размер шага.

Ключевые слова: релятивистские системы Калоджеро–Мозера, общие собственные функции, эллиптические функциональные уравнения, эллиптическая гамма-функция.

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическая релятивистская эллиптическая N -частичная система Калоджеро–Мозера определяется гамильтонианами

$$H_l^{\text{cl}} = \mathcal{N}_l^{\text{cl}} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} f(x_m - x_n) \cdot \prod_{m \in I} e^{\alpha p_m}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (1.1)$$

где $\mathcal{N}_1^{\text{cl}}, \dots, \mathcal{N}_N^{\text{cl}}$ – нормировочные константы, а функция f имеет вид

$$f(z) = (\wp(\mu) - \wp(z))^{1/2},$$

$\wp(z)$ – $\wp$ -функция Вейерштрасса [1]. Квантовый вариант системы задается разностными операторами

$$H_l = \mathcal{N}_l \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} f_-(x_m - x_n) \cdot \prod_{m \in I} e^{-i\beta \partial_{x_m}} \cdot \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} f_+(x_m - x_n), \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad (1.2)$$

*Centre for Mathematics and Computer Science, Amsterdam, The Netherlands. E-mail: siru@wxs.nl

где

$$f_{\pm}(z) = \left(\frac{\sigma(z \pm \mu)}{\sigma(z)} \right)^{1/2},$$

а $\sigma(z)$ – σ -функция Вейерштрасса. Коммутативность разностных операторов $H_1, \dots, H_N$ и пуассонова коммутативность классических гамильтонианов $H_1^{\text{cl}}, \dots, H_N^{\text{cl}}$ может быть записана в виде последовательности функциональных уравнений

$$\sum_{I \subset \{1, \dots, N\} \atop |I|=l} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{\sigma(x_m - x_n - \mu) \sigma(x_m - x_n - \gamma + \mu)}{\sigma(x_m - x_n) \sigma(x_m - x_n - \gamma)} = (x \rightarrow -x), \quad l, N \in \mathbb{N}^*, \quad l \leq N. \quad (1.3)$$

Эти тождества для σ -функций доказываются по индукции [2]. Их дальнейшее исследование было проведено в работе Байатт-Смита и Брадена [3].

С физической точки зрения параметры α и β в формулах (1.1) и (1.2) могут рассматриваться соответственно как $1/(mc)$ и $\hbar/(mc)$, где m – масса частицы, c – скорость света, $\hbar$ – постоянная Планка. В настоящей работе, однако, мы не будем затрагивать физические аспекты системы. Даже в этом случае удобно предполагать, что параметр β положительный и что значения двух эллиптических периодов находятся в интервалах $(0, \infty)$ и $i(0, \infty)$. Фактически мы будем работать с положительными параметрами r , a_+ и a_- , которые задают один вещественный период π/r и два мнимых периода ia_+ и ia_- . Один из этих двух последних периодов может рассматриваться как $i\beta$, а другой тогда является мнимым периодом $\wp$ -функции.

Соответственно мы можем параметризовать разностные операторы H_l (1.2) как $H_l(a_+, a_-)$. Нетрудно видеть, что

$$[H_l(a_+, a_-), H_m(a_-, a_+)] = 0, \quad l, m = 1, 2, \dots, N. \quad (1.4)$$

Следовательно, возникает вопрос, могут ли быть найдены общие собственные функции $2N$ коммутирующих разностных операторов, входящих в (1.4).

Обратимся сначала к общим собственным функциям N операторов $H_l(a_+, a_-)$, т.е. к функциям, удовлетворяющим уравнениям

$$H_l(a_+, a_-)F = E_l F, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad E_l \in \mathbb{C}. \quad (1.5)$$

Следует подчеркнуть, что, за исключением совершенно специальных случаев, эти функции не известны и нет общих результатов, обеспечивающих их существование. Несмотря на это, наиболее многообещающий подход включает в себя дополнительные ограничения, а именно требование, чтобы искомые общие собственные функции были “модулярно-инвариантными”, т.е. симметричными относительно взаимной замены параметров a_+ и a_- . Более конкретно, существуют веские основания полагать, что “простейшие” общие собственные функции операторов $H_l(a_+, a_-)$ являются симметричными относительно замены параметров $(a_+ \leftrightarrow a_-)$, так что в действительности они являются также собственными функциями операторов $H_m(a_-, a_+)$. В частности, результаты настоящей работы находятся в согласии с этой рабочей гипотезой.

На первый взгляд, однако, кажется, что основной результат данной работы не имеет отношения к существованию решений уравнения (1.5). Действительно, этот результат представляет собой явное решение объединенной задачи о собственных значениях вида

$$(H_l(a_+, a_-; x) - H_l(a_+, a_-; -y))\Psi(a_+, a_-; x, y) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N. \quad (1.6)$$

Это уравнение кажется совершенно непохожим на уравнение (1.5). Функция Ψ может быть выражена через эллиптическую гамма-функцию $G(r, a_+, a_-; z)$, которая является для нас основным “строительным материалом”, по этой причине некоторые наиболее важные ее свойства приводятся в приложении. Таким свойством эллиптической гамма-функции, в частности, является модулярная инвариантность, следствием которой является модулярная инвариантность функции Ψ . Следовательно, функция Ψ также представляет собой решение задачи о нулевом собственном значении для разностей $H_m(a_-, a_+; x) - H_m(a_-, a_+; -y)$.

Точный вид решения Ψ представлен в разделе 2. Как оказалось, характерное свойство решения может быть записано в виде функциональных уравнений (см. ниже (2.9)), которые не только напоминают уравнения (1.3), но и могут быть доказаны по индукции подобно тому, как это было сделано в работе [2]. Соответствующий результат сформулирован в теореме в разделе 2.

В разделе 3 представлены некоторые дальнейшие результаты. Сначала выясняется связь функциональных уравнений (2.9) с функциональными уравнениями (1.3), выражающими коммутативность, а затем рассматриваются обобщения специального решения, в результате чего получено бесконечномерное пространство решений. Наконец, получен нерелятивистский предел решений.

Данные результаты были анонсированы в докладе на конференции по эллиптическим интегрируемым системам в Киото в 2004 г. [4]. Существуют аналогичные, но более слабые результаты для BC_N -инвариантной версии описанной выше (A_{N-1} -инвариантной) квантовой интегрируемой системы, которые также были представлены нами на конференции в Киото. Весьма вероятно, что в обоих случаях специальные собственные функции могут быть использованы для получения информации об общих собственных функциях, что существенно при рассмотрении гильбертова пространства. Подобные сценарии были намечены нами в работе [4], и мы намерены вернуться к этим вопросам в последующих работах. Повторим здесь только, что ключевой шаг в установлении связи с соответствующим гильбертовым пространством

$$\mathcal{H} \equiv L^2(F, dx), \quad (1.7)$$

где

$$F \equiv \{x \in \mathbb{R}^N \mid -\pi/2r < x_N < \dots < x_1 \leq \pi/2r\}, \quad (1.8)$$

состоит в том, чтобы изменить интерпретацию функции $\Psi(x, y)$ (с $\mu \in i(0, a_+ + a_-)$) и рассматривать ее как ядро *самосопряженного интегрального оператора Гильберта-Шмидта* $\mathcal{I}$ на $\mathcal{H}$. Тогда, гипотетически, собственные функции оператора $\mathcal{I}$ и подходящие их обобщения также являются общими собственными функциями $2N$ коммутирующих разностных операторов.

В заключение необходимо подчеркнуть, что операторы Гильберта–Шмидта могут лишь давать начало таким общим собственным функциям $2N$ коммутирующих разностных операторов, которые образуют ортогональный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ (1.7). Так, собственные значения в соответствующей задаче (1.5) не только вещественные, но также не в общем положении: мы получаем лишь *счетное* число векторов, относящихся к собственным значениям $(E_1, \dots, E_N)$.

С другой стороны, ожидаемый результат содержит все, что нужно с точки зрения квантовой механики: из него следовало бы, что коммутирующие разностные операторы можно превратить в настоящие самосопряженные коммутирующие операторы на пространстве $\mathcal{H}$. Выходящее за рамки настоящей работы схематическое описание функционально-аналитических трудностей, возникающих при таком подходе (который до сих пор не уступает любым другим подходам), можно найти в работе [5] (о собственных функциях операторов эллиптического типа Калоджеро–Мозера см. также недавний обзор [6]).

2. ОБЩИЕ СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ РАЗНОСТНЫХ ГАМИЛЬТониАНОВ

Функция Ψ в формуле (1.6) имеет вид

$$\Psi(x, y) = \mathcal{W}(x)^{1/2} \mathcal{S}(x, y) \mathcal{W}(y)^{1/2}. \quad (2.1)$$

Здесь специальная функция $\mathcal{S}(x, y)$ дается выражением

$$\mathcal{S}(x, y) = \prod_{j,k=1}^N \frac{G(x_j - y_k - \mu/2)}{G(x_j - y_k + \mu/2)}, \quad (2.2)$$

где $G(z) = G(r, a_+, a_-; z)$ – эллиптическая гамма-функция (см. приложение). Весовая функция $\mathcal{W}(x)$ определена следующим образом. Введем сначала обобщенные c -функции Хариш-Чандры

$$c(z) \equiv \frac{G(z - \mu + i(a_+ + a_-)/2)}{G(z + i(a_+ + a_-)/2)},$$

$$\mathcal{C}(x) \equiv \prod_{1 \leq j < k \leq N} c(x_j - x_k).$$

Затем положим

$$\mathcal{W}(x) \equiv \frac{1}{\mathcal{C}(x)\mathcal{C}(-x)}. \quad (2.3)$$

В результате получим, что функция Ψ^2 равна произведению эллиптических гамма-функций. (Заметим, что для замены знаменателя эллиптических гамма-функций на их числитель можно воспользоваться уравнением отражения (П.9).) Далее мы будем использовать аналитические разностные уравнения (АРУ) для эллиптической гамма-функции, чтобы доказать справедливость равенства (1.6). Поэтому удобно заменить σ -функцию на функцию R , что можно сделать следующим образом.

Переместим сначала правое произведение в (1.2) налево и получим в результате множители $f_+(x_m - x_n - i\beta)$. Затем используем соотношение (П.4) и сократим экспоненты. Переходя к более удобной (a_+, a_-) -параметризации, используя (П.7) и выбирая нормировочные константы подходящим образом, мы в конечном счете приходим к операторам

$$H_{l,\delta} = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \left(\frac{R_\delta(x_m - x_n - \mu + ia_\delta/2)}{R_\delta(x_m - x_n + ia_\delta/2)} \frac{R_\delta(x_m - x_n - ia_{-\delta} + \mu - ia_\delta/2)}{R_\delta(x_m - x_n - ia_{-\delta} - ia_\delta/2)} \right)^{1/2} \times \\ \times \prod_{m \in I} e^{-ia_{-\delta}\partial_{x_m}}, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \delta = +, -. \quad (2.4)$$

Эти операторы нормированы так, что являются инвариантными относительно замены $\mu \mapsto -\mu + ia_+ + ia_-$. Заметим также, что в силу равенства (П.7) подкоренные выражения в (2.4) ia_δ -периодические, вследствие чего коммутативность операторов $H_{l,+}$ и $H_{m,-}$ очевидна.

Далее, обратим внимание на то, что весовая функция удовлетворяет АРУ

$$\frac{\mathcal{W}(x - ia_{-\delta}e_j)}{\mathcal{W}(x)} = \prod_{k \neq j} \left(\frac{R_\delta(x_j - x_k - \mu + ia_\delta/2)}{R_\delta(x_j - x_k + ia_\delta/2)} \frac{R_\delta(x_j - x_k - ia_{-\delta} - ia_\delta/2)}{R_\delta(x_j - x_k - ia_{-\delta} + \mu - ia_\delta/2)} \right), \quad (2.5)$$

где $\delta = +, -$ и $j = 1, 2, \dots, N$ (действительно, это получается из АРУ для эллиптической гамма-функции (П.2) посредством хотя и длинного, но прямого вычисления). Поэтому можно осуществить аналогичное преобразование для аналитических разностных операторов (АРО) с мероморфными коэффициентами

$$A_{l,\delta} \equiv \mathcal{W}(x)^{-1/2} H_{l,\delta} \mathcal{W}(x)^{1/2} = \\ = \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{R_\delta(x_m - x_n - \mu + ia_\delta/2)}{R_\delta(x_m - x_n + ia_\delta/2)} \cdot \prod_{m \in I} e^{-ia_{-\delta}\partial_{x_m}}. \quad (2.6)$$

Ввиду (2.1) наша задача теперь состоит в том, чтобы показать, что

$$(A_{l,\delta}(x) - A_{l,\delta}(-y))\mathcal{S}(x, y) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, N, \quad \delta = +, -. \quad (2.7)$$

(Отметим, что весовая функция $\mathcal{W}(y)$ четна по y , см. (2.3).) С этой целью разделим левую часть на $\mathcal{S}(x, y)$ и, используя (П.2), придем к заключению, что полученное частное может быть записано в виде

$$\sum_{\substack{|I|=l \\ m \in I \\ n \notin I}} \prod \frac{R_\delta(x_m - x_n - \mu + ia_\delta/2)}{R_\delta(x_m - x_n + ia_\delta/2)} \cdot \prod_{\substack{m \in I \\ n=1, \dots, N}} \frac{R_\delta(x_m - y_n - ia_{-\delta}/2 + \mu/2)}{R_\delta(x_m - y_n - ia_{-\delta}/2 - \mu/2)} - \\ - \sum_{\substack{|I|=l \\ m \in I \\ n \notin I}} \prod \frac{R_\delta(-y_m + y_n - \mu + ia_\delta/2)}{R_\delta(-y_m + y_n + ia_\delta/2)} \cdot \prod_{\substack{m \in I \\ n=1, \dots, N}} \frac{R_\delta(-y_m + x_n - ia_{-\delta}/2 + \mu/2)}{R_\delta(-y_m + x_n - ia_{-\delta}/2 - \mu/2)}. \quad (2.8)$$

Заменяем теперь y_j на $y_j - i(a_+ + a_-)/2 - \mu/2$, после чего используем (П.6), чтобы записать (2.8) в терминах $s_\delta(z)$. Теперь видно, что выражение (2.8) обращается в нуль тогда и только тогда, когда функция $s(z) = s(r, a; z)$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{s(x_m - x_n - \mu)}{s(x_m - x_n)} \cdot \prod_{\substack{m \in I \\ n=1, \dots, N}} \frac{s(x_m - y_n + \mu)}{s(x_m - y_n)} - \\ & - \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{s(-y_m + y_n - \mu)}{s(-y_m + y_n)} \cdot \prod_{\substack{m \in I \\ n=1, \dots, N}} \frac{s(-y_m + x_n + \mu)}{s(-y_m + x_n)} = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ТЕОРЕМА. *Для всех $l, N \in \mathbb{N}^*$ с $l \leq N$ функция s удовлетворяет функциональным уравнениям (2.9).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим левую часть выражения (2.9) как функцию $L(x_1)$, зависящую от параметров μ, x_j и y_k , с $j = 2, 3, \dots, N$ и $k = 1, 2, \dots, N$. Фиксируем эту функцию в общем положении, так что члены в суммах содержат не более чем простые полюсы. Функция $L(x_1)$, очевидно, является π/r -периодической по переменной x_1 . Более того, в силу (П.8) сдвиг $x_1 \mapsto x_1 + ia$ приводит к преобразованию $L(x_1) \mapsto e^{-2ir\mu} L(x_1)$. Поэтому достаточно доказать, что $L(x_1)$ является целой функцией переменной x_1 . Действительно, как легко проверить (и хорошо известно), целая функция, обладающая периодом $\omega_1 \in (0, \infty)$ и квазипериодом $\omega_2 \in i(0, \infty)$ с множителем λ таким, что $\lambda \neq e^{2\pi i n \omega_2 / \omega_1} \forall n \in \mathbb{Z}$, должна тождественно обращаться в нуль.

Теперь в силу квазипериодичности и симметрии по переменным $x_2, \dots, x_N$ и $y_1, \dots, y_N$ достаточно показать, что суммы вычетов в простых полюсах $x_1 = x_2$ и $x_1 = y_1$ обращаются в нуль. Рассмотрим вначале случай $x_1 = x_2$. Члены во второй сумме не имеют полюсов, а в первой сумме полюсы содержатся лишь в членах с $1 \in I$ и $2 \notin I$ или $1 \notin I$ и $2 \in I$. Для членов первого типа мы получаем сумму вычетов, равную

$$s(-\mu) \sum_{\substack{J \subset \{3, \dots, N\} \\ |J|=l-1}} \prod_{\substack{m \in J \cup \{2\} \\ n \notin J \cup \{1, 2\}}} \frac{s(x_m - x_n - \mu)}{s(x_m - x_n)} \cdot \prod_{\substack{m \in J \cup \{2\} \\ n=1, \dots, N}} \frac{s(x_m - y_n + \mu)}{s(x_m - y_n)}, \quad (2.10)$$

а для членов второго типа мы получаем выражение (2.10) с заменой множителя $s(-\mu)$ на $s(\mu)$. Следовательно, сумма вычетов обращается в нуль, так что функция $L(x_1)$ не имеет полюса при $x_1 = x_2$.

Для работы с вычетами при $x_1 = y_1$ используем индукцию по l . Для того чтобы при $l = 1$ существовал полюс, нужно выбрать $I = \{1\}$. Тогда вычет дается выражением

$$s(\mu) \prod_{n>1} \frac{s(y_1 - x_n - \mu)}{s(y_1 - x_n)} \frac{s(y_1 - y_n + \mu)}{s(y_1 - y_n)} - s(\mu) \prod_{n>1} \frac{s(-y_1 + y_n - \mu)}{s(-y_1 + y_n)} \frac{s(-y_1 + x_n + \mu)}{s(-y_1 + x_n)}, \quad (2.11)$$

которое, очевидно, обращается в нуль. Предположим теперь, что сумма вычетов обращается в нуль для $l = 1, 2, \dots, k-1$ и всех $N \geq k-1$ с $k \geq 2$. Тогда для $l = k$ и $N \geq k$ сингулярные члены получаются в результате суммирования по всем I с $1 \in I$. Это дает сумму вычетов

$$\begin{aligned} & s(\mu) \sum_{\substack{J \subset \{2, \dots, N\} \\ |J|=k-1}} \prod_{n \notin J \cup \{1\}} \frac{s(y_1 - x_n - \mu)}{s(y_1 - x_n)} \cdot \prod_{\substack{m \in J \\ n \notin J \cup \{1\}}} \frac{s(x_m - x_n - \mu)}{s(x_m - x_n)} \times \\ & \times \prod_{n>1} \frac{s(y_1 - y_n + \mu)}{s(y_1 - y_n)} \cdot \prod_{m \in J} \frac{s(x_m - y_1 + \mu)}{s(x_m - y_1)} \cdot \prod_{\substack{m \in J \\ n>1}} \frac{s(x_m - y_n + \mu)}{s(x_m - y_n)} - \\ & - s(\mu) \sum_{\substack{J \subset \{2, \dots, N\} \\ |J|=k-1}} \prod_{n \notin J \cup \{1\}} \frac{s(-y_1 + y_n - \mu)}{s(-y_1 + y_n)} \cdot \prod_{\substack{m \in J \\ n \notin J \cup \{1\}}} \frac{s(-y_m + y_n - \mu)}{s(-y_m + y_n)} \times \\ & \times \prod_{n>1} \frac{s(-y_1 + x_n + \mu)}{s(-y_1 + x_n)} \cdot \prod_{m \in J} \frac{s(-y_m + y_1 + \mu)}{s(-y_m + y_1)} \cdot \prod_{\substack{m \in J \\ n>1}} \frac{s(-y_m + x_n + \mu)}{s(-y_m + x_n)}. \end{aligned}$$

Собирая все зависящие от y_1 множители, получаем в обеих суммах произведение

$$\prod_{n>1} \frac{s(y_1 - y_n + \mu)s(y_1 - x_n - \mu)}{s(y_1 - y_n)s(y_1 - x_n)},$$

которое не зависит от J и, следовательно, может быть вынесено за скобки. В скобках остаются две суммы вычетов для $l = k-1$, которые сокращаются в силу предположения индукции. Теорема доказана.

Отметим, что по существу те же тождества (2.9) были получены ранее Каяхарой и Ноуми [7], которые при их выводе использовали эллиптические тождества Коши для детерминантов.

Другой родственный результат можно найти в монографии Макдональда [8]. Это тригонометрический вариант формулы (2.7), который, в частности, был использован Кирилловым и Ноуми для построения повышающих операторов для полиномов Макдональда [9]. Этот результат также играет важную роль в недавней работе Каяхары [10].

3. ОБОБЩЕНИЯ И СУЖЕНИЯ

Сравним функциональные уравнения (2.9) и (1.3). Ввиду соотношения (П.5) между функцией s и σ -функцией можно заменить (1.3) на уравнения

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{s(x_m - x_n - \mu)s(x_m - x_n - \gamma + \mu)}{s(x_m - x_n)s(x_m - x_n - \gamma)} - \\ & - \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, N\} \\ |I|=l}} \prod_{\substack{m \in I \\ n \notin I}} \frac{s(-x_m + x_n - \mu)s(-x_m + x_n - \gamma + \mu)}{s(-x_m + x_n)s(-x_m + x_n - \gamma)} = 0. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Если теперь сузить уравнения (2.9), выбирая

$$y_j = x_j + \gamma, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (3.2)$$

то получатся функциональные уравнения, которые при $l = 1$ эквивалентны уравнениям (3.1) (это уравнения, выражающие релятивистскую инвариантность [1], [2]). Однако при $l > 1$ необходимые сокращения происходят, только если $\mu = 2\gamma$. Поэтому коммутативность АРО (2.6) следует из уравнений (2.9) только в случае специального значения $\mu = 2\gamma$.

Далее, обратим внимание на то обстоятельство, что тождества (2.7) для собственных функций по-прежнему выполняются при замене $\mathcal{S}$ на функцию

$$\mathcal{S}_\eta(x, y) = \prod_{j,k=1}^N \frac{G(x_j - y_k + \eta - \mu/2)}{G(x_j - y_k + \eta + \mu/2)}, \quad \eta \in \mathbb{C}. \quad (3.3)$$

(Действительно, АРО $A_{l,\delta}(-y)$ инвариантны относительно замен $y_n \mapsto y_n - \eta$, $n = 1, 2, \dots, N$, тогда как выражение (2.2) превращается в (3.3).) Более того, можно умножить $\mathcal{S}_\eta$ на функцию вида $f(\sum_{j=1}^N (x_j - y_j))$, $f(z)$ – мероморфная функция, не нарушив при этом тождества для собственных функций. Следовательно, мы получаем бесконечномерное пространство решений.

В заключение этого раздела исследуем нерелятивистский предел. С этой целью положим

$$\mu = ia_-g, \quad g \in \mathbb{R},$$

и рассмотрим поведение приведенных выше величин при $a_- \rightarrow 0$. Используя соотношение (П.12), видим, что специальная функция (3.3) имеет предел

$$\mathcal{S}_\eta^{\text{nr}}(x, y) = \prod_{j,k=1}^N R_+(x_j - y_k + \eta)^{-g}. \quad (3.4)$$

Также соотношение (П.12) может быть использовано для получения предела при $a_- \rightarrow 0$ весовой функции $\mathcal{W}(x)$. А именно, этот предел дается выражением

$$\mathcal{W}^{\text{nr}}(x) = \left(\prod_{1 \leq j < k \leq N} R_+\left(x_j - x_k + \frac{ia_+}{2}\right) R_+\left(x_j - x_k - \frac{ia_+}{2}\right) \right)^g. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что произведение дает функцию, положительную на множестве F (1.8). Поскольку число g выбрано вещественным, очевидный выбор ветви логарифма дает положительность функции $\mathcal{W}^{\text{nr}}(x)$ на множестве F . В силу (П.6) и (П.7) весовая функция удовлетворяет также соотношению

$$\mathcal{W}^{\text{nr}}(x) = C \left(\prod_{1 \leq j < k \leq N} s_+(x_j - x_k) \right)^{2g}, \quad x \in F, \quad (3.6)$$

где C – некоторая положительная константа.

Получение нерелятивистских аналогов коммутирующих АРО (2.6) и гамильтонианов (2.4) требует больших усилий (см. разделы 4.2 и 4.3 в работе [5]). Мы определим лишь аналоги гамильтонианов, которые представляют собой N коммутирующих операторов в частных производных вида [11], [12]

$$\begin{aligned} H_1^{\text{nr}} &= -i \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}, \\ H_2^{\text{nr}} &= - \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \partial_{x_{j_1}} \partial_{x_{j_2}} - g(g-1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} \wp \left(x_j - x_k; \frac{\pi}{2r}, \frac{ia_+}{2} \right), \\ H_l^{\text{nr}} &= (-i)^l \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_l \leq N} \partial_{x_{j_1}} \dots \partial_{x_{j_l}} + \text{ч. ч. п.}, \quad l = 3, 4, \dots, N, \end{aligned} \quad (3.7)$$

где сокращение ч. ч. п. обозначает члены с частными производными по x_j более низкого порядка. Поскольку они возникают как пределы при $a_- \rightarrow 0$ соответствующих линейных комбинаций гамильтонианов (2.4), то, следовательно, мы имеем следующие тождества для общих собственных функций:

$$(H_k^{\text{nr}}(x) - H_k^{\text{nr}}(-y)) \Psi_\eta^{\text{nr}}(x, y) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.8)$$

где

$$\Psi_\eta^{\text{nr}}(x, y) = \frac{(\prod_{1 \leq j < k \leq N} \prod_{\delta=+,-} R_+(x_j - x_k + i\delta a_+/2) R_+(y_j - y_k + i\delta a_+/2))^{g/2}}{\prod_{j,k=1}^N R_+(x_j - y_k + \eta)^g}. \quad (3.9)$$

Используя тождество

$$a^l - b^l = \sum_{m=0}^{l-1} a^m b^{l-m-1} (a - b),$$

видим, что равенство (3.8) также выполняется для произвольных степеней гамильтонианов. В частности, для гамильтониана

$$H^{\text{nr}} \equiv \frac{1}{2} (H_1^{\text{nr}})^2 - H_2^{\text{nr}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \partial_{x_j}^2 + g(g-1) \sum_{1 \leq j < k \leq N} \wp \left(x_j - x_k; \frac{\pi}{2r}, \frac{ia_+}{2} \right) \quad (3.10)$$

получаем

$$(H^{\text{nr}}(x) - H^{\text{nr}}(y)) \Psi_\eta^{\text{nr}}(x, y) = 0. \quad (3.11)$$

Последнее соотношение для собственных функций впервые появилось в работе Лэнгманна по анионной квантовой теории поля [13].

ПРИЛОЖЕНИЕ

Эллиптическая гамма-функция и родственные функции

Эллиптическая гамма-функция может быть определена бесконечным произведением

$$G(r, a_+, a_-; z) \equiv \prod_{m,n=0}^{\infty} \frac{1 - \exp(-(2m+1)ra_+ - (2n+1)ra_- - 2irz)}{1 - \exp(-(2m+1)ra_+ - (2n+1)ra_- + 2irz)}. \quad (\text{П.1})$$

Она была введена и исследована в работе [14] в контексте минимальных решений АРУ первого порядка. Эта функция удовлетворяет двум АРУ

$$\frac{G(z + ia_\delta/2)}{G(z - ia_\delta/2)} = R_{-\delta}(z), \quad \delta = +, -, \quad (\text{П.2})$$

с функциями $R_\delta(z) \equiv R(r, a_\delta; z)$ в правой части, которые определяются выражением

$$R(r, a; z) \equiv \prod_{l=0}^{\infty} (1 - e^{-(2l+1)ra+2irz}) (1 - e^{-(2l+1)ra-2irz}), \quad a > 0. \quad (\text{П.3})$$

Функция $R(r, a; z)$ связана с σ -функцией Вейерштрасса $\sigma(z; \pi/(2r), ia/2)$ формулой вида

$$R(z) = e^{c_0+c_1z+c_2z^2} \sigma\left(z + \frac{ia}{2}\right). \quad (\text{П.4})$$

Для детального анализа этого соотношения полезно ввести функцию

$$s(r, a; z) \equiv e^{-\eta z^2 r/\pi} \sigma\left(z; \frac{\pi}{2r}, \frac{ia}{2}\right). \quad (\text{П.5})$$

Тогда функции R и s связаны соотношением

$$s(r, a; z) = \frac{e^{irz} R(r, a; z + ia/2)}{2ir \prod_{k=1}^{\infty} (1 - e^{-2kra})^2}. \quad (\text{П.6})$$

Будем также использовать обозначение $s_\delta(z) \equiv s(r, a_\delta; z)$, $\delta = +, -$.

Из формулы (П.3) ясно, что функция $R(z)$ является четной и π/r -периодической, а функция $s(z)$ – нечетной и π/r -антипериодической (см. (П.5), (П.6)). Из (П.3) также следует, что

$$\frac{R_\delta(z + ia_\delta/2)}{R_\delta(z - ia_\delta/2)} = -e^{-2irz}, \quad \delta = +, -, \quad (\text{П.7})$$

и тогда из (П.6) вытекает

$$\frac{s_\delta(z + ia_\delta/2)}{s_\delta(z - ia_\delta/2)} = -e^{-2irz}, \quad \delta = +, -. \quad (\text{П.8})$$

В настоящей работе были использованы некоторые свойства симметрии эллиптической гамма-функции, которые с очевидностью следуют из определения (П.1), а именно

$$G(-z) = \frac{1}{G(z)} \quad (\text{уравнение отражения}), \quad (\text{П.9})$$

$$G\left(z + \frac{\pi}{r}\right) = G(z) \quad (\text{периодичность}), \quad (\text{П.10})$$

$$G(r, a_-, a_+; z) = G(r, a_+, a_-; z) \quad (\text{модулярная инвариантность}). \quad (\text{П.11})$$

Нам также представился случай использовать один менее очевидный результат, а именно предельное соотношение

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{G(r, a_+, a_-; z + ia_- \lambda)}{G(r, a_+, a_-; z + ia_- \kappa)} = e^{(\lambda - \kappa) \ln R_+(z)}, \quad \lambda, \kappa \in \mathbb{R} \quad (\text{П.12})$$

(ср. (3.138) в [14]). Точнее, это соотношение легко следует из (П.2) с $\delta = -$ в случае, когда $\lambda - \kappa$ целое; в случае $\lambda - \kappa \notin \mathbb{Z}$ появление разрезом в правой части связано со слиянием нулей и полюсов (положение последних определяется формулой (П.1)).

Список литературы

- [1] *S. N. M. Ruijsenaars, H. Schneider.* Ann. Phys. (N. Y.). 1986. V. 170. P. 370–405.
- [2] *S. N. M. Ruijsenaars.* Commun. Math. Phys. 1987. V. 110. P. 191–213.
- [3] *Дж. Г. Б. Бауам-Смит, Х. У. Браден.* ТМФ. 2002. Т. 133. № 3. С. 353–366; nlin.SI/0201014.
- [4] *S. N. M. Ruijsenaars.* Elliptic integrable systems of Calogero–Moser type: Some new results on joint eigenfunctions. In: Proc. of the 2004 Kyoto Workshop on Elliptic Integrable Systems. Eds. M. Noumi, K. Takasaki. to appear.
- [5] *S. N. M. Ruijsenaars.* Systems of Calogero–Moser type. In: Proc. of the 1994 Banff Summer School “Particles and Fields”. CRM Ser. Math. Phys. Eds. G. Semenov, L. Vinet. N.Y.: Springer, 1999. P. 251–352.
- [6] *Y. Komori, S. N. M. Ruijsenaars.* Elliptic integrable systems of Calogero–Moser type: A Survey. In: Proc. of the 2004 Kyoto Workshop on Elliptic Integrable Systems. Eds. M. Noumi, K. Takasaki. to appear.
- [7] *Y. Kajihara, M. Noumi.* Indag. Math. (N. S.). 2003. V. 14. P. 395–421.
- [8] *I. G. Macdonald.* Symmetric Functions and Hall Polynomials. Oxford: Oxford Univ. Press, 1995.
- [9] *A. N. Kirillov, M. Noumi.* Duke Math. J. 1998. V. 93. P. 1–39.
- [10] *Y. Kajihara.* Adv. Math. 2004. V. 187. P. 53–97.
- [11] *M. A. Olshanetsky, A. M. Perelomov.* Phys. Rep. 1983. V. 94. P. 313–404.
- [12] *T. Oshima, H. Sekiguchi.* J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 1995. V. 2. P. 1–75.
- [13] *E. Langmann.* Lett. Math. Phys. 2000. V. 54. P. 279–289.
- [14] *S. N. M. Ruijsenaars.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 1069–1146.