Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, А. М. Левин, Интегрируемая система взаимодействующих эллиптических волчков, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 55–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 16:19:47

© 2006 г.

А. В. Зотов*, А. М. Левин†

ИНТЕГРИРУЕМАЯ СИСТЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ВОЛЧКОВ

Предложен способ построения системы взаимодействующих эллиптических волчков. Полученная система интегрируема по построению и симплектоморфна эллиптической системе Калоджеро–Мозера.

Ключевые слова: интегрируемые системы, алгебраическая геометрия, симплектическая геометрия.

1. СИСТЕМЫ ГОДЕНА НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Пусть Σ_τ – эллиптическая кривая с периодами $(1, \tau)$, $\{z_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, – набор точек на ней, а V – голоморфное векторное расслоение ранга N и степени k . По аналогии с рациональным случаем определим матрицу Лакса $L^{m|k|N}(z)$ системы Годена $EG(m|k|N)$ на эллиптической кривой Σ как мероморфное сечение расслоения $\text{End } V$ с простыми полюсами в точках $\{z_i\}$ и фиксированными вычетами $S^i \in \mathfrak{sl}^*(N, \mathbb{C})$. Соответствующая 1-форма $L^{m|k|N}(z) dz$ в конструкции Хитчина [1], [2] является редуцированным полем Хиггса. Выбор векторного расслоения V задает квазипериодические граничные условия на решетке $\langle 1, \tau \rangle$:

$$L^{m|k|N}(z+1) = g_1 L^{m|k|N}(z) g_1^{-1}, \quad L^{m|k|N}(z+\tau) = g_\tau L^{m|k|N}(z) g_\tau^{-1}.$$

По существу, различаются расслоения разных степеней. Размерность пространства модулей расслоений фиксированной степени, ассоциированных с главным $SL(N, \mathbb{C})$ -расслоением, равна $\text{НОД}(N, k) - 1$ [3]. Она максимальна для $k = 0 \pmod{N}$ и минимальна для $k = 1 \pmod{N}$. Эти два случая рассмотрим подробно.

*Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия.

E-mail: zotov@itep.ru

†Институт океанологии им. П. П. Ширшова РАН, Москва, Россия.

E-mail: alevin@wave.sio.rssi.ru

Случай $\deg V = 0$ был впервые рассмотрен в работе [4]. Расслоения определяются N параметрами $\{u_i\}$, $i = 1, 2, \dots, N$: $u_1 + \dots + u_N = 0$. Мультипликаторы заданы в виде

$$g_1 = \text{Id}_N, \quad g_\tau = \mathbf{e}(-\mathbf{u}) = \text{diag}(\mathbf{e}(-u_1), \dots, \mathbf{e}(-u_N)), \quad (1)$$

где $\mathbf{e}(x) = e^{2\pi\sqrt{-1}x}$. Эти условия фиксируют матрицу Лакса системы $EG(m|0|N)$

$$L_{ij}^{m|0|N}(z) = \delta_{ij}v_i + \delta_{ij} \sum_{l=1}^m S_{ii}^l E_1(z - z_l) + (1 - \delta_{ij}) \sum_{l=1}^m S_{ij}^l \phi(z - z_l, u_i - u_j) \quad (2)$$

с точностью до сопряжения произвольным элементом из подгруппы Картана $\mathbf{H}$ в $SL(N, \mathbb{C})$. Функции $E_1(z)$ и $\phi(x, y)$ определены в (П.2) и (П.3). Гамильтонова редукция прямого произведения орбит коприсоединенного действия $\{\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^m\} // \mathbf{H}$ по этой симметрии описывает “спиновую” часть фазового пространства системы Годена [5]. Отображение момента, соответствующее указанному действию, имеет вид

$$\mu = \sum_{l=1}^m S_{ii}^l. \quad (3)$$

Уравнение $\mu = 0$ вместе с некоторым выбором фиксации действия подгруппой $\mathbf{H}$ окончательно задает $L^{m|0|N}(z)$. Бесспиновая часть фазового пространства, соответствующая динамике N частиц в системе центра масс с импульсами v_i и координатами u_i , является кокасательным расслоением к пространству модулей голоморфных векторных расслоений степени ноль.

Отметим важный частный случай: система Годена с одной отмеченной точкой, которой соответствует орбита коприсоединенного действия наименьшей размерности, совпадает после описанной выше редукции с эллиптической $sl(N, \mathbb{C})$ -системой Калоджеро–Мозера [6]

$$L_{ij}^{1|0|N}(z) = \delta_{ij}v_i + (1 - \delta_{ij})\sqrt{-1}\nu\phi(z, u_i - u_j), \quad (4)$$

где ν – константа взаимодействия. Квадратичный гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}v_i^2 + \sum_{i \neq j} \nu^2 \wp(u_i - u_j). \quad (5)$$

Случай $\deg V = 1$ был рассмотрен в работе [7]. Мультипликаторы расслоения V задаются в виде

$$g_1 = Q^{-1}, \quad g_\tau = -\mathbf{e}\left(\frac{\tau}{2N} + \frac{z}{N}\right)\Lambda^{-1}, \quad (6)$$

где Q и Λ – матрицы, задающие стандартное представление конечной группы Гейзенберга (см. приложение). Запишем матрицу Лакса в специальном базисе $\{E_\alpha\}$,

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, алгебры Ли $sl(N, \mathbb{C})$:

$$L^{m|1|N}(z) = \sum_{l=1}^m \sum_{\alpha \neq 0} E_{\alpha} S_{\alpha}^l \varphi_{\alpha}(z - z_l), \quad \varphi_{\alpha}(z) = \mathbf{e}(z \partial_{\tau} \omega_{\alpha}) \phi(z, \omega_{\alpha}), \quad (7)$$

$$\omega_{\alpha} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 \tau}{N}.$$

Фазовым пространством $EG(1|1|N)$ является прямое произведение орбит $\mathcal{O}^1 \times \dots \times \mathcal{O}^m$:

$$\{S_{\alpha}^i, S_{\beta}^j\} = 2\sqrt{-1} \sin \left[\frac{\pi}{N} (\alpha_2 \beta_1 - \alpha_1 \beta_2) \right] \delta^{ij} S_{\alpha+\beta}^i. \quad (8)$$

Скобки Пуассона (8) можно задать в R -матричной форме

$$\{L_1^{m|1|N}(z), L_2^{m|1|N}(w)\} = [L_1^{m|1|N}(z) + L_2^{m|1|N}(w), r(z, w)] \quad (9)$$

с R -матрицей Белавина–Дринфельда [8]

$$r(z, w) = \sum_{\alpha \neq 0} E_{\alpha} \otimes E_{-\alpha} \varphi_{\alpha}(z - w). \quad (10)$$

Соответствие между системой Калоджеро–Мозера и эллиптическим волчком. Модификация была определена в [9] как процедура, изменяющая степень векторного расслоения V на единицу. На сечениях $\text{End } V$ эта процедура действует калибровочным преобразованием, вырожденным в фиксированной точке. В работах [10] было построено преобразование, связывающее $L^{1|0|N}$ и $L^{1|1|N}$, т.е. установлена калибровочная эквивалентность между эллиптической системой Калоджеро–Мозера и эллиптическим волчком. В случае $sl(2, \mathbb{C})$ нетрудно получить явную замену переменных:

$$\{v, u\} = 1, \quad \{S_{\alpha}, S_{\beta}\} = 2\sqrt{-1} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} S_{\gamma},$$

$$L^{1|0|2} = \begin{pmatrix} v & \nu\phi(2u, z) \\ \nu\phi(-2u, z) & -v \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$L^{1|1|2} = \begin{pmatrix} S_3 \varphi_3(z) & S_1 \varphi_1(z) - i S_2 \varphi_2(z) \\ S_1 \varphi_1(z) + i S_2 \varphi_2(z) & -S_3 \varphi_3(z) \end{pmatrix},$$

где индексы согласованы с нумерацией матриц Паули: $(1, 2, 3) = (01, 11, 01)$. Утверждение об эквивалентности двух систем означает, что существует калибровочное преобразование $\Xi(z)$ такое, что

$$L^{1|1|2}(z) = \Xi(z) L^{1|0|2}(z) \Xi^{-1}(z). \quad (12)$$

Как показано в [10], в случае $sl(2, \mathbb{C})$ преобразование имеет вид

$$\Xi(z) = \begin{pmatrix} \theta_{00}(z - 2u, 2\tau) & -\theta_{00}(z + 2u, 2\tau) \\ -\theta_{10}(z - 2u, 2\tau) & \theta_{10}(z + 2u, 2\tau) \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Тогда из (12) следует, что

$$\begin{aligned} S_{01} &= -v \frac{\theta_{01}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{01}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{01}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{10}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{10}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ -\sqrt{-1}S_{11} &= -v \frac{\theta_{00}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{00}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{00}^2(0)}{\theta_{10}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{10}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}, \\ S_{10} &= -v \frac{\theta_{10}(0)}{\vartheta'(0)} \frac{\theta_{10}(2u)}{\vartheta(2u)} + \nu \frac{\theta_{10}^2(0)}{\theta_{00}(0)\theta_{01}(0)} \frac{\theta_{00}(2u)\theta_{01}(2u)}{\vartheta^2(2u)}. \end{aligned} \quad (14)$$

2. СИСТЕМА ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ВОЛЧКОВ

Рассмотрим эллиптический волчок на расслоении степени n и ранга $N = np$, $N > n$. Это означает, что квазипериодические граничные условия для матрицы Лакса выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} L(z+1) &= QL(z)Q^{-1}, \\ L(z+\tau) &= \Lambda^n L(z) \Lambda^{-n}. \end{aligned} \quad (15)$$

Однако таким условиям может удовлетворять только вырожденная матрица $L(z)$. Дело в том, что существует диагональная матрица, содержащая n различных собственных значений, $\bar{A} = \text{diag}\{u_1, \dots, u_n, p, u_1, \dots, u_n\}$, которая коммутирует одновременно с Q и Λ^n :

$$Q\bar{A} = \bar{A}Q, \quad \Lambda^n \bar{A} = \bar{A} \Lambda^n.$$

Чтобы зафиксировать эту свободу, модифицируем условия (15):

$$\begin{aligned} L(z+1) &= QL(z)Q^{-1}, \\ L(z+\tau) &= \mathbf{e}(-\bar{A}) \Lambda^n L(z) \Lambda^{-n} \mathbf{e}(\bar{A}). \end{aligned} \quad (16)$$

Эти граничные условия отвечают существованию $(n-1)$ -мерного пространства модулей.

УТВЕРЖДЕНИЕ. *Существует такая числовая матрица M , что*

$$\begin{aligned} M\bar{A}M^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^n u_J \text{Id}_{p \times p}, \\ MQM^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^n \mathbf{e}\left(\frac{J-p}{N}\right) Q_{p \times p}, \\ M\Lambda^n M^{-1} &= \bigoplus_{J=1}^n \Lambda_{p \times p}. \end{aligned} \quad (17)$$

Последнее равенство означает, что Λ^n приводится к блочно-диагональному виду, причем количество блоков равно n , и каждый блок представляет из себя матрицу Λ размером $p \times p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = (\alpha - 1)n + \beta$, где $\alpha = 1, 2, \dots, p$, $\beta = 1, 2, \dots, n$. Определим операцию перестановки

$$\psi_{n,p}(m) = (\beta - 1)p + \alpha.$$

Наше утверждение состоит в том, что искомая матрица имеет вид

$$M_{ij} = \delta(\psi_{p,n}(i), j).$$

Проверим это. Заметим, что для обратной матрицы верно

$$(M^{-1})_{kl} = \delta(\psi_{n,p}(k), l).$$

Итак,

$$M_{ij} \bar{A}_{jk} M_{kl}^{-1} = \delta(\psi_{p,n}(i), j) \delta(j, k) \bar{A}_{jj} \delta(\psi_{n,p}(k), l) = \delta(\psi_{n,p}(i), l) \bar{A}_{ii}$$

(по повторяющимся индексам предполагаются свертки). Далее, имеем

$$M_{ik} Q_{kl} M_{li}^{-1} = \delta(i, j) \mathbf{e} \left(\frac{\psi_{p,n}(i)}{N} \right),$$

$$\begin{aligned} M_{ij} \Lambda_{jk}^n M_{kl}^{-1} &= \delta(\psi_{p,n}(i), j) \delta(\text{mod}_N(j + n), k) \delta(\psi_{n,p}(k), l) = \\ &= \delta(\psi_{n,p}(\text{mod}_N(\psi_{p,n}(i) + n)), l). \end{aligned}$$

Пусть теперь $i = (\beta - 1)p + \alpha$, тогда:

а) если $\alpha < p$, то $\text{mod}_N(\psi_{p,n}(i) + n) = \psi_{p,n}(i) + n = \alpha n + \beta$, а $\psi_{n,p}(\alpha n + \beta) = (\beta - 1)p + \alpha + 1 = i + 1$,

б) если $\alpha = p$, то $\text{mod}_N((p - 1)n + \beta + n) = \beta$, а $\psi_{n,p}(\beta) = (\beta - 1)p + 1$.

Утверждение доказано.

В дальнейшем мы будем использовать прописные буквы латинского алфавита для индекса, пробегающего от 1 до n , а строчные буквы – для индекса, пробегающего от 1 до p . Кроме того, примем обозначение $\sum_{m,n} = \sum_{m,n=0}^{p-1, m^2+n^2 \neq 0}$.

Воспользуемся доказанным утверждением и перейдем к твистованному базису. Тогда для блоков размера $p \times p$ имеем

$$\begin{aligned} L_{IJ}(z + 1) &= \mathbf{e} \left(\frac{I - J}{N} \right) Q_{p \times p} L_{IJ}(z) Q_{p \times p}^{-1}, \\ L_{IJ}(z + \tau) &= \mathbf{e}(-u_I) \Lambda_{p \times p} L_{IJ}(z) \Lambda_{p \times p}^{-1} \mathbf{e}(u_J). \end{aligned} \tag{18}$$

Множитель $\mathbf{e}((I - J)/N)$ устраняется заменой

$$L_{IJ}(z) \rightarrow L_{IJ}(z) \mathbf{e} \left(-z \frac{I - J}{N} \right), \quad u_I \rightarrow u_I - I \frac{\tau}{N}.$$

В итоге получаем следующую форму граничных условий:

$$\begin{aligned} L_{IJ}(z + 1) &= Q_{p \times p} L_{IJ}(z) Q_{p \times p}^{-1}, \\ L_{IJ}(z + \tau) &= \mathbf{e}(-u_I) \Lambda_{p \times p} L_{IJ}(z) \Lambda_{p \times p}^{-1} \mathbf{e}(u_J). \end{aligned} \tag{19}$$

Оператор L , удовлетворяющий условиям (19) и имеющий фиксированный вычет, можно легко получить:

$$L_{IJ}(z) = \frac{1}{p} \delta_{IJ} v_I + \sum_{m,n} (S_{IJ})_{mn} \phi_{mn}(z, u_{IJ}) E_{mn}, \quad (20)$$

$$\phi_{mn}(z, u_{IJ}) = e^{\left(\frac{-nz}{N}\right)} \phi\left(u_{IJ} - \frac{m+n\tau}{N}, z\right).$$

Множитель $1/p$ поставлен перед импульсом для того, чтобы сохранить канонической скобку Пуассона $\{v_I, u_J\} = \delta_{IJ}$.

Скобки Пуассона для матричных элементов S задаются в виде скобок Пуассона–Ли, построенных по структурным константам алгебры Ли $gl(N, \mathbb{C})$:

$$\{(S_{IJ})_{ab}, (S_{KL})_{cd}\} = 2\sqrt{-1} \sin\left[\frac{\pi}{p}(bc - ad)\right] (\delta_{KJ}(S_{IL})_{a+c, b+d} - \delta_{IL}(S_{KJ})_{a+c, b+d}). \quad (21)$$

Здесь использованы два различных базиса: стандартный для блоков размера $p \times p$ ($I, J = 1, 2, \dots, n$) и базис синус-алгебры (П.13)–(П.16) для элементов блоков.

Квадратичный гамильтониан имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n v_I^2 - \frac{1}{2} \sum_{I,J} \sum_{m,n} \text{Tr}(S_{IJ} E_{-m, -n}) \text{Tr}(S_{JI} E_{mn}) E_2\left(u_{IJ} - \frac{m+n\tau}{N}\right), \quad (22)$$

или

$$H = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n v_I^2 - \frac{1}{2} \sum_I \sum_{m,n} \text{Tr}(S_{II} E_{-m, -n}) \text{Tr}(S_{II} E_{mn}) E_2\left(\frac{m+n\tau}{N}\right) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{I \neq J} \sum_{m,n} \text{Tr}(S_{IJ} E_{-m, -n}) \text{Tr}(S_{JI} E_{mn}) E_2\left(u_{IJ} - \frac{m+n\tau}{N}\right). \quad (23)$$

Первые два слагаемых представляют собой гамильтонианы n ($p \times p$)-волчков с импульсами v_I . Заметим, что аналог редукции по подгруппе Картана при $\deg V = 0$ в данном случае приводит к требованию $\text{Tr}(S_{II}) = \text{const} \quad \forall I$. Хотелось бы интерпретировать последнее слагаемое как потенциал их взаимодействия. Это можно сделать, если S принадлежит орбите наименьшей размерности, т.е. $rk S = 1$. Действительно, воспользуемся известной параметризацией [11] такой орбиты. Положим для простоты, что $S \in gl(N, \mathbb{C})$, тогда $S = \xi \times \eta$, где ξ и η – столбец и строка длины N , причем $\{\xi_a, \eta_b\} = \delta_{ab}$. Следовательно,

$$\text{Tr}(S_{IJ} E_{-m, -n}) \text{Tr}(S_{JI} E_{mn}) = \text{Tr}(S_{II} E_{mn} S_{JJ} E_{-m, -n}).$$

Условие $\text{Tr}(S_{II}) = \text{const}$ означает, что матрицы S_{II} описывают орбиты коприсоединенного представления наименьшей размерности, равной $2p - 2$. В этом случае

гамильтониан запишется в виде, имеющем более прозрачную физическую интерпретацию:

$$H = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^n v_I^2 - \frac{1}{2} \sum_I \sum_{m,n} \text{Tr}(S_{II} E_{-m,-n}) \text{Tr}(S_{II} E_{mn}) E_2 \left(\frac{m+n\tau}{N} \right) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{I \neq J} \sum_{m,n} \text{Tr}(S_{II} E_{m,n} S_{JJ} E_{-m,-n}) E_2 \left(u_{IJ} - \frac{m+n\tau}{N} \right). \quad (24)$$

В этой формуле первые два члена описывают энергию n ($p \times p$)-волчков, а последний – попарное взаимодействие между ними. Как было показано в [10], все системы из семейства $EG(1|k|N)$, $k = 1, 2, \dots, N$, симплектоморфны. Тем самым построенная система взаимодействующих волчков симплектоморфна, например, N -частичной системе Калоджеро–Мозера.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Эллиптические функции

В этом приложении изложены основные определения и соотношения для эллиптических функций, необходимые для проверки результатов, представленных в данной работе. Большинство формул заимствованы из [12] и [13].

Введем обозначение $q = e^{2\pi i\tau}$, где τ – модулярный параметр эллиптической кривой E_τ .

Основной объект – тета-функция:

$$\vartheta(z | \tau) = q^{1/8} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n e^{\pi i(n(n+1)\tau + 2nz)} = \\ = q^{1/8} e^{-i\pi/4} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^n e^{2i\pi z})(1 - q^n e^{-2i\pi z}). \quad (\text{П.1})$$

Функции Эйзенштейна:

$$E_1(z | \tau) = \partial_z \ln \vartheta(z | \tau), \quad E_1(z | \tau) \sim \frac{1}{z} - 2\eta_1 z, \quad (\text{П.2})$$

где

$$\eta_1(\tau) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{\pi^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty'} \frac{1}{(m\tau + n)^2} = \frac{24}{2\pi i} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau)},$$

где

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n>0} (1 - q^n)$$

– функция Дедекинда.

Второй ряд Эйзенштейна имеет вид

$$E_2(z | \tau) = -\partial_z E_1(z | \tau) = \partial_z^2 \ln \vartheta(z | \tau), \quad E_2(z | \tau) \sim \frac{1}{z^2} + 2\eta_1.$$

Следующий важный объект:

$$\phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}, \quad \varphi_\alpha(z, \alpha+u) = \mathbf{e}(z\partial_\tau\alpha)\phi(z, \alpha+u). \quad (\text{П.3})$$

Эта функция имеет полюс в точке $z = 0$ и разлагается в ее окрестности в следующий ряд:

$$\phi(u, z) = \frac{1}{z} + E_1(u) + \frac{z}{2}(E_1^2(u) - \wp(u)) + \dots. \quad (\text{П.4})$$

Формула для производной:

$$\phi(u, z)^{-1}\partial_u\phi(u, z) = E_1(u+z) - E_1(u).$$

Связь с функциями Вейерштрасса:

$$\begin{aligned} \zeta(z \mid \tau) &= E_1(z \mid \tau) + 2\eta_1(\tau)z, & \wp(z \mid \tau) &= E_2(z \mid \tau) - 2\eta_1(\tau), \\ \phi(u, z) &= e^{-2\eta_1 uz} \frac{\sigma(u+z)}{\sigma(u)\sigma(z)}, \\ \phi(u, z)\phi(-u, z) &= \wp(z) - \wp(u) = E_2(z) - E_2(u). \end{aligned} \quad (\text{П.5})$$

Представление в виде рядов:

$$\begin{aligned} E_1(z \mid \tau) &= -2\pi i \left(\frac{1}{2} + \sum_{n \neq 0} \frac{e^{2\pi i z}}{1 - q^n} \right) = \\ &= -2\pi i \left(\sum_{n < 0} \frac{1}{1 - q^n e^{2\pi i z}} + \sum_{n \geq 0} \frac{q^n e^{2\pi i z}}{1 - q^n e^{2\pi i z}} + \frac{1}{2} \right), \\ E_2(z \mid \tau) &= -4\pi^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{q^n e^{2\pi i z}}{(1 - q^n e^{2\pi i z})^2}, \\ \phi(u, z) &= 2\pi i \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-2\pi i n z}}{1 - q^n e^{-2\pi i u}}. \end{aligned} \quad (\text{П.6})$$

Четность:

$$\begin{aligned} \vartheta(-z) &= -\vartheta(z), & E_1(-z) &= -E_1(z), & E_2(-z) &= E_2(z), \\ \phi(u, z) &= \phi(z, u) = -\phi(-u, -z). \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Квазипериодические свойства:

$$\begin{aligned} \vartheta(z+1) &= -\vartheta(z), & \vartheta(z+\tau) &= -q^{-1/2}e^{-2\pi\sqrt{-1}z}\vartheta(z), \\ E_1(z+2\omega_\alpha) &= E_1(z) - 4\pi\sqrt{-1}\partial_\tau\omega_\alpha, \\ E_1(z+1) &= E_1(z), & E_1(z+\tau) &= E_1(z) - 2\pi\sqrt{-1}, \\ E_2(z+2\omega_\alpha) &= E_2(z), & E_2(z+1) &= E_2(z), & E_2(z+\tau) &= E_2(z), \\ \phi(u+1, z) &= \phi(z, u), & \phi(u+\tau, z) &= e^{-2\pi\sqrt{-1}z}\phi(z, u). \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

Формулы сложения:

$$\phi(u, z)\partial_v\phi(v, z) - \phi(v, z)\partial_u\phi(u, z) = (E_2(v) - E_2(u))\phi(u + v, z), \quad (\text{П.9})$$

или

$$\phi(u, z)\partial_v\phi(v, z) - \phi(v, z)\partial_u\phi(u, z) = (\wp(v) - \wp(u))\phi(u + v, z). \quad (\text{П.10})$$

Доказательство формулы (П.9) основано на использовании (П.4) и формул (П.7), (П.8) для функции $\phi(u, z)$.

В действительности функция $\phi(u, z)$ удовлетворяет более общему соотношению, следующему из тождества Фэя для тройной секущей:

$$\phi(u_1, z_1)\phi(u_2, z_2) - \phi(u_1 + u_2, z_1)\phi(u_2, z_2 - z_1) - \phi(u_1 + u_2, z_2)\phi(u_1, z_1 - z_2) = 0. \quad (\text{П.11})$$

Частным случаем этой формулы является соотношение

$$\phi(u_1, z)\phi(u_2, z) - \phi(u_1 + u_2, z)(E_1(u_1) + E_1(u_2)) + \partial_z\phi(u_1 + u_2, z) = 0. \quad (\text{П.12})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Синус-алгебра

Генераторы синус-алгебры E_{mn} определяются через генераторы конечной группы Гейзенберга Q и Λ :

$$\begin{aligned} E_{mn} &= \mathbf{e}\left(\frac{mn}{2N}\right)Q^m\Lambda^n, & m &= 0, 1, \dots, N-1, \\ n &= 0, 1, \dots, N-1, & m^2 + n^2 &\not\equiv 0 \pmod{N}, \end{aligned} \quad (\text{П.13})$$

в базисе $sl(N, \mathbb{C})$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(z) &= e^{2\pi\sqrt{-1}z}, & Q &= \text{diag}(\mathbf{e}(1/N), \dots, \mathbf{e}(m/N), \dots, 1), \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{П.14})$$

Коммутационные соотношения имеют вид

$$[E_{sk}, E_{nj}] = 2\sqrt{-1} \sin\left[\frac{\pi}{N}(kn - sj)\right] E_{s+n, k+j}, \quad (\text{П.15})$$

$$\text{Tr}(E_{sk}E_{nj}) = \delta_{s, -n}\delta_{k, -j}N. \quad (\text{П.16})$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность за поддержку РФФИ (грант № 03-02-17554), а также Программе поддержки научных школ (грант № НШ-1999.2003.2) и CRDF (грант № RM1-2545-MO-03).

Список литературы

- [1] *N. Hitchin.* Duke Math. J. 1987. V. 54. P. 91–114.
- [2] *A. Levin, M. Olshanetsky.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 449–466.
- [3] *M. F. Atiyah.* Proc. London Math. Soc. 1957. V. 7. P. 414–452.
- [4] *N. Nekrasov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 180. P. 587–604; hep-th/9503157.
- [5] *I. Krichever, O. Babelon, E. Billey, M. Talon.* Amer. Math. Soc. Transl. 1995. V. 170. P. 83–119.
- [6] *F. Calogero.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 419–436; Erratum. 1996. V. 37. P. 4636;
J. Moser. Adv. Math. 1975. V. 16. P. 197–220.
- [7] *А. Г. Рейман, М. А. Семенов-Тянь-Шанский.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1986. Т. 150. С. 104–118.
- [8] *A. A. Belavin.* Nucl. Phys. 1981. V. 180 [FS2]. P. 189–200.
- [9] *D. Arinkin, S. Lysenko.* Math. Res. Lett. 1997. V. 4. P. 181–190.
- [10] *A. Levin, M. Olshanetsky, A. Zotov.* Commun. Math. Phys. 2003. V. 236. P. 93–133;
Math. Ann. 1980. V. 248. P. 205–239.
- [11] *J. Avan, O. Babelon, M. Talon.* Алгебра и анализ. 1994. Т. 6. № 2. С. 67–89; hep-th/9306102.
- [12] *А. Вейль.* Эллиптические функции по Эйзенштейну и Кронекеру. М.: Мир, 1978.
- [13] *Д. Мамфорд.* Лекции о тэта-функциях. М.: Мир, 1988.