Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Строганов, Определитель Изергина–Корепина при кубическом корне из единицы, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 65–76

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2009>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:58:46

ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ИЗЕРГИНА–КОРЕПИНА ПРИ КУБИЧЕСКОМ КОРНЕ ИЗ ЕДИНИЦЫ

Рассматривается статистическая сумма для неоднородной шестивершинной модели, определенной на $(n \times n)$ -квадратной решетке. Эта сумма зависит от $2n$ спектральных параметров x_i и y_i , приписанных горизонтальным и вертикальным линиям, соответственно. В случае граничных условий типа доменной стенки она дается определителем Изергина–Корепина. При q , равном корню степени N из единицы, эта статистическая сумма удовлетворяет специальному линейному функциональному уравнению, которое является особенно простым и полезным, когда кроссинг-параметр $\eta = 2\pi/3$, т.е. когда $N = 3$. Хорошо известно, что рассматриваемая статистическая сумма симметрична как по переменным $\{x\}$, так и по переменным $\{y\}$. С использованием вышеупомянутого уравнения найдено, что в случае $\eta = 2\pi/3$ она симметрична в объединении $\{x\} \cup \{y\}$. Кроме того, это уравнение может быть использовано для решения некоторых проблем, относящихся к перечислению матриц чередующихся знаков. В частности, воспроизведено детальное перечисление матриц чередующихся знаков, открытое Миллсом, Роббинсом и Рамсеем и доказанное Цайлбергером, а также получены формулы для двойного detailного перечисления этих матриц.

Ключевые слова: матрицы чередующихся знаков, перечисления, модель квадратного льда.

1. ШЕСТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА ДОМЕННОЙ СТЕНКИ И ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ ИЗЕРГИНА–КОРЕПИНА

Рассмотрим неоднородную шестивершинную модель на квадратной решетке. Состояния модели определяются приписыванием стрелок каждому ребру $(n \times n)$ -квадратной решетки так, чтобы в каждой вершине было две входящих стрелки и две выходящих (*условие льда*). Спектральные параметры $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ и $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ приписываются горизонтальным и вертикальным линиям, соответственно. Ребра ориентированы внутрь на боковых сторонах и наружу наверху и

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: Yuri.Stroganov@ihep.ru

Рис. 1. Шестивершинная модель с граничными условиями типа доменной стенки.

Рис. 2. Больцмановские веса для шести возможных конфигураций стрелок.

внизу, как на рис. 1. С этими граничными условиями, которые называются *граничными условиями типа доменной стенки* [1], состояния модели находятся во взаимно однозначном соответствии с определенным множеством матриц, называемых *матрицами чередующихся знаков*.

Существует шесть возможных конфигураций стрелок на ребрах данной вершины, как показано на рис. 2.

Больцмановские веса, приписываемые всем вершинам решетки, имеют вид

$$a(x-y) = \frac{\sin(x-y+\eta/2)}{\sin \eta}, \quad b(x-y) = \frac{\sin(x-y-\eta/2)}{\sin \eta}, \quad c(x-y) = 1. \quad (1)$$

Различные буквы на рис. 1 соответствуют различным функциям, введенным в уравнении (1): x и y являются соответственно горизонтальными и вертикальными параметрами, зависящими от позиции вершины. Параметр η , иногда называемый *кроссинг-параметром*, имеет одно и то же значение для всех вершин.

Вес какого-либо состояния модели равен произведению весов ее вершин, а *статистическая сумма* равна полному весу всех состояний.

Пусть $Z_n(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n)$ – получающаяся статистическая сумма. Изергин [2] (используя вышеупомянутую работу Корепина [1]) нашел детерминантное представление для Z :

$$Z_n(\{x\}, \{y\}) = \prod_{1 \leq i, j \leq n} \sin\left(x_i - y_j + \frac{\eta}{2}\right) \prod_{1 \leq i, j \leq n} \sin\left(x_i - y_j - \frac{\eta}{2}\right) \times \frac{\det M(\{x\}, \{y\})}{\prod_{1 \leq i < i' \leq n} \sin(x_i - x_{i'}) \prod_{1 \leq j < j' \leq n} \sin(y_j - y_{j'})}, \quad (2)$$

где матричные элементы $(n \times n)$ -матрицы $M(\{x\}, \{y\})$ равны

$$M_{i,j} = \frac{1}{\sin(x_i - y_j + \eta/2) \sin(x_i - y_j - \eta/2)}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n. \quad (3)$$

Перечислим некоторые свойства статистической суммы, которые используются в этой работе (см., например, [3] или [4]).

Функция $Z_n(\{x\}, \{y\})$:

- симметрична по $\{x\}$ и по $\{y\}$;
- является тригонометрическим многочленом степени, не превышающей $n - 1$, по u с квазипериодом, равным π :

$$Z(u + \pi) = (-1)^{n-1} Z(u),$$

где u – одна из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n$;

- не меняется при преобразовании

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2} - x, \quad y \rightarrow -y, \quad \eta \rightarrow \pi - \eta,$$

в то время как функция b (см. уравнения (1)) меняет свой знак.

2. ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ

Фиксируем кроссинг-параметр

$$\eta = \frac{2\pi}{N},$$

где $N \geq 3$ – целое число.

Рассмотрим систему матриц $M^{(k)}$, заданных уравнением (3) со спектральным параметром x_1 , сдвинутым на $k\eta$:

$$M^{(k)} \equiv M(x_1 + k\eta, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n), \quad k = 0, \dots, N - 1. \quad (4)$$

Переменная x_1 присутствует лишь в верхней строке матриц $M^{(k)}$:

$$M_{1,j}^{(k)} = \frac{1}{\sin(x_1 - y_j + (k + 1/2)\eta) \sin(x_1 - y_j + (k - 1/2)\eta)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (5)$$

Рассмотрим сумму матричных элементов верхней строки по системе $M^{(k)}$

$$\sum_{k=0}^{N-1} M_{1,j}^{(k)}, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Подставляя выражение (5) в сумму (6) и используя простое тождество

$$\frac{\sin \eta}{\sin(u + \eta/2) \sin(u - \eta/2)} = \frac{e^{i(u-\eta/2)}}{\sin(u - \eta/2)} - \frac{e^{i(u+\eta/2)}}{\sin(u + \eta/2)},$$

получим, что все суммы (6) равны нулю. Так как $\det M^{(k)}$ для каждого j линейно зависит от $M_{1,j}^{(k)}$, то это приводит к тому, что

$$\sum_{k=0}^{N-1} \det M^{(k)} \equiv \sum_{k=0}^{N-1} \det M(x_1 + k\eta, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = 0. \quad (7)$$

Используя представление (2) для статистической суммы, мы немедленно получаем основное уравнение:

$$\sum_{k=0}^{N-1} \left\{ Z(x_1 + k\eta, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) \prod_{i=2}^n \sin(x_1 - x_i + k\eta) \times \right. \\ \left. \times \prod_{j=1}^n [\sin(x_1 - y_j + (k + 1/2)\eta) \sin(x_1 - y_j + (k - 1/2)\eta)]^{-1} \right\} = 0.$$

Эта формула оказывается полезной при изучении статистической суммы Z .

В этой статье мы ограничимся случаем $N = 3$, $\eta = 2\pi/3$. Используя тождество

$$\sin\left(u + \frac{\pi}{3}\right) \sin\left(u - \frac{\pi}{3}\right) \sin u = -\frac{1}{4} \sin 3u,$$

мы получаем гораздо более удобное уравнение

$$\sum_{k=0}^2 \left\{ Z\left(x_1 + \frac{2\pi k}{3}, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n\right) \times \right. \\ \left. \times \prod_{i=2}^n \sin\left(x_1 - x_i + \frac{2\pi k}{3}\right) \prod_{j=1}^n \sin\left(x_1 - y_j + \frac{2\pi k}{3}\right) \right\} = 0. \quad (8)$$

Будем писать

$$\begin{aligned} u & \quad \text{для } x_1, \\ u_i & \quad \text{для } x_{i+1}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ u_{i+n-1} & \quad \text{для } y_i, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

После введения функции f , определяемой как

$$f(u) = Z(u) \prod_{i=1}^{2n-1} \sin(u - u_i), \quad (10)$$

можно переписать уравнение (8) следующим образом:

$$f(u) + f\left(u + \frac{2\pi}{3}\right) + f\left(u + \frac{4\pi}{3}\right) = 0, \quad (11)$$

где для краткости мы пишем $f(u)$, $Z(u)$ вместо $f(u, u_1, \dots, u_{2n-1})$, $Z(u, u_1, \dots, u_{2n-1})$, опуская переменные u_i , $i = 1, \dots, 2n-1$, которые остаются неизменными.

Дело в том, что уравнения (10) и (11) могут быть использованы для нахождения статистической суммы $Z(u)$ с точностью до произвольного постоянного множителя.

Используя свойства статистической суммы, перечисленные в разделе 1, мы получаем, что функция $f(u)$ является тригонометрическим многочленом степени, не превышающей $3n-2$, который удовлетворяет уравнению

$$f(u + \pi) = (-1)^n f(u). \quad (12)$$

Этот многочлен можно представить суммой Фурье

$$f(u) = \sum_{k=1}^{3n-1} b_k e^{i(3n-2k)u}, \quad (13)$$

где коэффициенты b_k , $k = 1, 2, \dots, 3n-1$, зависят от переменных u_i , $i = 1, \dots, 2n-1$. Подставляя это выражение в уравнение (11), мы находим, что каждый третий коэффициент равен нулю:

$$b_{3\kappa} = 0, \quad \kappa = 1, 2, \dots, n-1. \quad (14)$$

Пусть $u_i \neq u_j$ для $i \neq j$. В этом случае остающиеся $2n$ коэффициентов могут быть найдены с точностью до нормировки решением однородной системы линейных уравнений¹⁾

$$f(u_j) = \sum_{k=1, k \neq 3\kappa}^{3n-1} e^{i(3n-2k)u_j} b_k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 2n-1, \quad (15)$$

так как ранг матрицы коэффициентов равен $2n-1$ для значений u_j общего положения.

Получающаяся функция $f(u)$ дается (с точностью до произвольного постоянного множителя) определителем

$$P = \det \begin{vmatrix} t^{3n-2} & t_1^{3n-2} & t_2^{3n-2} & \dots & t_{2n-1}^{3n-2} \\ t^{3n-4} & t_1^{3n-4} & t_2^{3n-4} & \dots & t_{2n-1}^{3n-4} \\ t^{3n-8} & t_1^{3n-8} & t_2^{3n-8} & \dots & t_{2n-1}^{3n-8} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t^{2-3n} & t_1^{2-3n} & t_2^{2-3n} & \dots & t_{2n-1}^{2-3n} \end{vmatrix},$$

¹⁾ Эта задача является специальным случаем интерполяционной задачи.

где $t = e^{iu}$ и $t_j = e^{iu_j}$, $j = 1, 2, \dots, 2n - 1$. В самом деле, оценим определитель разложением по левому столбцу:

$$P(u) = \sum_{k=1, k \neq 3\kappa}^{3n-1} e^{i(3n-2k)u} \tilde{b}_k,$$

где $\tilde{b}_k$ – соответствующие дополнительные миноры, зависящие от переменных u_j , $j = 1, 2, \dots, 2n - 1$. Мы видим, во-первых, что определитель $P(u)$ выражается через такую же сумму Фурье, как и (13). Во-вторых, выполнено условие (14). И, наконец, очевидно, что $P(u = u_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, 2n - 1$, и поэтому коэффициенты $\tilde{b}_k$ удовлетворяют системе уравнений (15). Следовательно, отношение

$$\frac{P(u)}{f(u)} = C(u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}) \quad (16)$$

не зависит от переменной u .

3. СИММЕТРИЯ СТАТИСТИЧЕСКОЙ СУММЫ ПО СПЕКТРАЛЬНЫМ ПАРАМЕТРАМ

Подставляя определение (10) в уравнение (16), получаем

$$P(u; u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}) = \tilde{C}(u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}) \times \\ \times \prod_{j=1}^{2n-1} \sin(u - u_j) \prod_{1 \leq j < j' \leq 2n-1} \sin(u_j - u_{j'}) Z(u; u_1, u_2, \dots, u_{2n-1}). \quad (17)$$

Выделяя фактор $\prod_{1 \leq j < j' \leq 2n-1} \sin(u_j - u_{j'})$, мы подчеркиваем симметрию функций, входящих в уравнение (17). Вернемся к параметрам $\{x\}$ и $\{y\}$ (см. определение (9)). Как левая часть уравнения (17), так и произведение в правой части антисимметричны в объединении $\{x\} \cup \{y\}$. Комбинируя это свойство с вышеупомянутой симметрией статистической суммы $Z(\{x\}, \{y\})$ по $\{x\}$ и по $\{y\}$ в отдельности, мы получаем, что неизвестная функция $\tilde{C}$ должна быть симметрична как по $\{x\}$, так и по $\{y\}$. С другой стороны, эта функция не зависит от переменной $u \equiv x_1$. Следовательно, она не зависит ни от одной из переменных x_i , $i = 1, 2, \dots, n$.

Возвращаясь к началу раздела 2 и используя левый столбец вместо верхней строки, получаем, что функция $\tilde{C}$ не зависит также и от переменных y_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Поэтому $\tilde{C}$ является постоянной, которая, возможно, зависит от n . Таким образом, мы получаем следующий изящный результат: для $\eta = 2\pi/3$ статистическая сумма $Z(\{x\}, \{y\})$ симметрична в объединении $\{x\} \cup \{y\}$.

4. ДЕТАЛЬНАЯ ГИПОТЕЗА О МАТРИЦАХ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ЗНАКОВ

Данный и следующий разделы посвящены рассмотрению различных аспектов матриц чередующихся знаков размера $n \times n$, которые находятся во взаимно однозначном соответствии с состояниями рассматриваемой модели [5], [6]. Полное

число матриц чередующихся знаков, например, равно статистической сумме Z при $a = b = c = 1$.

Рассмотрим случай, когда все спектральные параметры за исключением одного равны нулю:

$$\begin{aligned} x_1 &= u, \\ x_i &= 0, \quad i = 2, 3, \dots, n, \\ y_j &= 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (18)$$

В верхнем ряду решетки больцмановские веса равны

$$\begin{aligned} a(u) &= \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} + u\right), \quad b(u) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3} - u\right), \\ c(u) &= 1. \end{aligned} \quad (19)$$

Все больцмановские веса в оставшихся рядах равны 1.

Разделим множество состояний на n классов в соответствии с номером r (единственной) вершины верхнего ряда, где горизонтальные стрелки меняют свое направление. Пусть $A(n, r)$ – число состояний класса r , тогда статистическая сумма равна

$$Z(u) = \sum_{r=1}^n A(n, r) a^{r-1}(u) b^{n-r}(u). \quad (20)$$

В терминах матриц чередующихся знаков это также число таких матриц порядка n , единственная единица первой строки которых находится в столбце с номером r . Замечательная история этих чисел может быть найдена в книге Брессуда [7]. Миллс, Роббинс и Рамсей открыли изящную формулу для $A(n, r)$ [5], [8]. Их гипотеза, известная как детальная гипотеза о матрицах чередующихся знаков, была доказана Цайлбергером [9], нашедшим статистическую сумму $Z(u)$ путем обобщения метода Куперберга [4]. Они оба начали с определителя Изергина–Корепина и решили трудную задачу, потому что как определитель, так и произведение в знаменателе уравнения (2) “плохо” обращаются в нуль.

Мы также намерены найти $A(n, r)$, используя уравнения (10), (11) и общие свойства статистической суммы $Z(u)$, перечисленные в разделе 1. Это не займет много времени, потому что соответствующая задача была уже решена в статье [10].

Вернемся к уравнению (14). Мы установили, что функция $f(u)$ может быть представлена суммой Фурье (13). Принимая во внимание, что некоторые из коэффициентов b_k равны нулю (см. уравнение (14)), ее можно переписать в виде

$$f(u) = \sum_{m=0}^{n-1} (b_m^+ e^{i(4-3n+6m)u} + b_m^- e^{-i(4-3n+6m)u}).$$

В отличие от предыдущего случая мы не можем использовать уравнения (15). Вместо этого воспользуемся тем фактом, что в последнем случае (см. уравнение (18)) одночлен $\sin^{2n-1} u$ по определению (10) делит эту функцию:

$$f(u) \equiv Z(u) \sin^{2n-1} u. \quad (21)$$

Это условие фиксирует коэффициенты $b_m^\pm$, $m = 0, 1, \dots, n-1$, с точностью до произвольной постоянной. В самом деле, первые $2n-2$ производных функции $f(u)$ имеют нули при $u = 0$:

$$f^{(l)}(u)|_{u=0} = \sum_{m=0}^{n-1} (b_m^+ + (-1)^l b_m^-) (4-3n+6m)^l = 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2n-2.$$

Если l четно, то мы получаем систему

$$\sum_{m=0}^{n-1} (b_m^+ + b_m^-) (4-3n+6m)^{2\lambda} = 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots, n-1,$$

которая (из-за невырожденности матрицы Вандермонда) приводит к

$$b_m^+ + b_m^- = 0, \quad m = 0, 1, \dots, n-1.$$

Нечетные производные дают

$$\sum_{m=0}^{n-1} b_m^+ (4-3n+6m)^{2\lambda+1} = 0, \quad \lambda = 0, 1, \dots, n-2.$$

Эта система эквивалентна тому условию, что соотношение

$$\sum_{m=0}^{n-1} b_m^+ (4-3n+6m) p((4-3n+6m)^2) = 0 \quad (22)$$

выполняется для всех многочленов $p(x)$ степени $n-2$. Рассмотрим $n-1$ специальных многочленов степени $n-2$:

$$p_\mu(x) = \prod_{m=1, m \neq \mu}^{n-1} (x - (4-3n+6m)^2), \quad \mu = 1, 2, \dots, n-1.$$

Подставляя эти многочлены в (22), найдем простые соотношения, связывающие b_m^+ с b_0^+ . Это позволяет записать ответ в терминах биномиальных коэффициентов, а именно:

$$f(u) = \text{const} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} \binom{n-\frac{4}{3}}{m} \binom{n-\frac{2}{3}}{n-m-1} \sin((4-3n+6m)u). \quad (23)$$

Эта функция удовлетворяет линейному дифференциальному уравнению второго порядка

$$f'' - 6(n-1) \operatorname{ctg}(3u) \cdot f' - (3n-2)(3n-4)f = 0. \quad (24)$$

Вернемся к уравнению (20). Комбинируя его с уравнением (21), получаем

$$f(u) = \sin^{2n-1} u \sin^{n-1} \left(u + \frac{\pi}{3} \right) \sum_{r=1}^n A(n, r) \left(\frac{b(u)}{a(u)} \right)^{n-r}. \quad (25)$$

Подставляя последнее уравнение в дифференциальное уравнение (24) и делая замену переменных

$$t = \frac{b(u)}{a(u)} = \frac{\sin(\pi/3 - u)}{\sin(\pi/3 + u)},$$

получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$t(1-t)A'' + 2(1-n-t)A' + n(n-1)A = 0 \quad (26)$$

для производящей функции

$$A(t) = \sum_{r=1}^n A(n, r)t^{n-r}. \quad (27)$$

Подставляя эту сумму в дифференциальное уравнение (26), получаем рекуррентное соотношение

$$(2n-r-1)rA(n, r+1) = (n-r)(n+r-1)A(n, r),$$

которому удовлетворяет

$$A(n, r) = \frac{A(n, 1)}{(2n-2)!} \frac{(n+r-2)!(2n-r-1)!}{(r-1)!(n-r)!}. \quad (28)$$

Ясно, что число матриц чередующихся знаков порядка n с единицей в левом верхнем углу $A(n, 1)$ равно полному числу таких же матриц порядка $n-1$:

$$A(n, 1) = A_{n-1}.$$

Используя это уравнение и уравнение (28), получаем рекуррентное соотношение для полного числа матриц чередующихся знаков:

$$A_n = \sum_{r=1}^n A(n, r) = \frac{A(n, 1)}{(2n-2)!} \sum_{r=1}^n \frac{(n+r-2)!(2n-r-1)!}{(r-1)!(n-r)!}.$$

Сумма в правой части этого уравнения может быть найдена сравнением степенных рядов для обеих сторон следующего тождества:

$$x^{1-n}(1-x)^{-2n} \equiv (1-x)^{-n} \times x^{1-n}(1-x)^{-n}.$$

В результате мы получаем известную рекурсию

$$\frac{A_{n+1}}{A_n} = \frac{(3n+1)!n!}{(2n+1)!(2n)!}.$$

Используя $A_1 = 1$, найдем полное число $(n \times n)$ -матриц чередующихся знаков.

5. ДВОЙНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ МАТРИЦ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ЗНАКОВ

Рассмотрим теперь более общий случай двух отличных от нуля спектральных параметров

$$x_1 = u, \quad x_n = \tilde{u}, \quad (29)$$

которые приписаны к верхнему и нижнему рядам, соответственно.

Здесь аналогом уравнения (20) для статистической суммы становится

$$Z(n; u, \tilde{u}) = \sum_{r, \tilde{r}=1}^n B(n; r, \tilde{r}) a^{r-1}(u) b^{n-r}(u) b^{\tilde{r}-1}(\tilde{u}) a^{n-\tilde{r}}(\tilde{u}), \quad (30)$$

где $B(n, r, \tilde{r})$ – число матриц чередующихся знаков порядка n , чья единственная единица верхней строки находится в столбце r , а нижней строки – в столбце $\tilde{r}$.

Согласно симметрии, найденной в разделе 3, мы должны получить то же самое значение статистической суммы, фиксируя отличные от нуля спектральные параметры следующим образом: $x_1 = u$, $y_1 = \tilde{u}$. В этом случае отличные от нуля параметры приписаны к верхнему ряду и к левому столбцу, и мы можем представить статистическую сумму отличным от уравнения (30) способом:

$$\begin{aligned} Z(n; u, \tilde{u}) &= A(n; 1) b^{n-1}(u) b^{n-1}(-\tilde{u}) + a(u - \tilde{u}) \times \\ &\times \sum_{r, \tilde{r}=2}^n C(n; r, \tilde{r}) a^{r-2}(u) b^{n-r}(u) a^{\tilde{r}-2}(-\tilde{u}) b^{n-\tilde{r}}(-\tilde{u}), \end{aligned} \quad (31)$$

где $C(n; r, \tilde{r})$, $r, \tilde{r} \geq 2$, – число матриц чередующихся знаков порядка n , единственная единица верхней строки которых находится в столбце r , а левого столбца – в строке $\tilde{r}$. $A(n, 1)$ является числом матриц чередующихся знаков с единицей в левом верхнем углу.

Приравнявая (30) и (31), используя равенства $a(\pm \tilde{u}) = b(\mp \tilde{u})$ (см. (19)) и деля получающееся уравнение на $(b(u)a(\tilde{u}))^{n-1}$, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{r, \tilde{r}=1}^n B(n; r, \tilde{r}) \left(\frac{a(u)}{b(u)} \right)^{r-1} \left(\frac{b(\tilde{u})}{a(\tilde{u})} \right)^{\tilde{r}-1} &\equiv \\ &\equiv A(n, 1) + \frac{a(u - \tilde{u})}{b(u)a(\tilde{u})} \sum_{r, \tilde{r}=2}^n C(n; r, \tilde{r}) \left(\frac{a(u)}{b(u)} \right)^{r-2} \left(\frac{b(\tilde{u})}{a(\tilde{u})} \right)^{\tilde{r}-2}. \end{aligned} \quad (32)$$

Теперь мы должны использовать тождество

$$\frac{a(u - \tilde{u})}{b(u)a(\tilde{u})} = \frac{a(u)}{b(u)} + \frac{b(\tilde{u})}{a(\tilde{u})} - 1.$$

Используя обозначения t и $\tilde{t}$ для отношений $a(u)/b(u)$ и $b(\tilde{u})/a(\tilde{u})$, соответственно, мы можем представить уравнение (32) в более удобном виде:

$$\sum_{r, \tilde{r}=1}^n B(n; r, \tilde{r}) t^{r-1} \tilde{t}^{\tilde{r}-1} \equiv A(n, 1) + (t + \tilde{t} - 1) \sum_{r, \tilde{r}=2}^n C(n; r, \tilde{r}) t^{r-2} \tilde{t}^{\tilde{r}-2}.$$

Приравнявая коэффициенты при разных степенях t и $\tilde{t}$, получаем

$$\begin{aligned} A(n, 1) &= C(n; 2, 2), \quad r = \tilde{r} = 1, \\ B(n; r, \tilde{r}) &= C(n; r, \tilde{r} + 1) + C(n; r + 1, \tilde{r}) - C(n; r + 1, \tilde{r} + 1), \\ r + \tilde{r} &> 2. \end{aligned}$$

Первое уравнение является следствием простой биекции [11]. Второе уравнение при $\tilde{r} = 1$ и $r > 1$ дает рекуррентное соотношение для $C(n; r, 2)$:

$$C(n; r, 2) - C(n; r + 1, 2) = B(n; r, 1) = A(n - 1, r - 1),$$

где $A(n - 1, r - 1)$ является числом матриц чередующихся знаков порядка $n - 1$, для которых (единственная) единица первой строки находится в столбце с номером $r - 1$. Это рекуррентное соотношение также может быть получено простой биекцией. Мы полагаем, что оставшиеся соотношения ($r, \tilde{r} > 1$) являются новыми.

В конце этого раздела мы намерены свести двойное распределение $B(n; r, \tilde{r})$ к числам $A(n, r)$, задаваемым уравнением (28). Для случая двух отличных от нуля спектральных параметров можно переписать уравнение (10) в виде

$$f_{\text{double}}(u) = Z(n; u, \tilde{u}) \sin^{2n-2} u \sin(u - \tilde{u}).$$

Эта функция является тригонометрическим полиномом степени не более $3n - 2$ и может быть найдена с точностью до произвольного постоянного множителя с помощью уравнений (11) и (12). Рассмотрим комбинацию

$$f_{\text{double}}(u) = \text{const} \cdot (f(u)f'(\tilde{u}) - f'(\tilde{u})f(u));$$

функция $f(u)$ была найдена в разделе 4. Эта комбинация удовлетворяет вышеупомянутым условиям и, следовательно, решает проблему. Подставляя (25) в последнее уравнение, получим после скучных, но прямых вычислений

$$\sum_{r, \tilde{r}=1}^n B(n; r, \tilde{r}) t^{n-r} \tilde{t}^{\tilde{r}-1} = \text{const} \cdot \frac{H(t)G(\tilde{t}) - H(\tilde{t})G(t)}{t - \tilde{t}}. \quad (33)$$

Мы используем здесь новые функции

$$\begin{aligned} G(t) &= (1 - t)A(t), \\ H(t) &= \left(n - \frac{1}{2}\right)(1 + t)A(t) + (1 - n)(1 - t)\left(\frac{1}{2} - t\right)A(t) - (1 - t)(t^2 - t + 1)A'(t), \end{aligned}$$

где $A(t)$ – производящая функция, определенная уравнением (27). Уравнение (33) приводит к нелинейным соотношениям между “двойным детальным” распределением матриц чередующихся знаков и числами, фигурирующими в детальной гипотезе (теореме) о матрицах чередующихся знаков:

$$\begin{aligned} B(n; r + 1, \tilde{r} + 1) - B(n; r, \tilde{r}) &= \frac{1}{A(n, 1)} [A(n - 1, r)[A(n, \tilde{r} + 1) - A(n, \tilde{r})] + \\ &\quad + A(n - 1, \tilde{r})[A(n, r + 1) - A(n, r)]]. \end{aligned} \quad (34)$$

Благодарности. Автор благодарен Ф. К. Алькаразу за его интерес к работе и ценные замечания, а также Н. Славнову и А. Разумову за несколько полезных обсуждений. Работа была частично поддержана Бразильским агентством ФАПЕСП, РФФИ (грант № 01-01-00201) и ИНТАС (грант № 00-00561).

Список литературы

- [1] *V. E. Korepin.* Commun. Math. Phys. 1982. V. 86. P. 391–418.
- [2] *А. Г. Изергин.* ДАН СССР. 1987. Т. 297. С. 331–333.
- [3] *Н. М. Боголюбов, В. Е. Корепин, А. Г. Изергин.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [4] *G. Kuperberg.* Int. Math. Res. Notices. 1996. V. 3. P. 139–150.
- [5] *W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey.* J. Comb. Theory. 1983. V. 34. P. 340–359.
- [6] *N. Elkies, G. Kuperberg, M. Larsen, J. Propp.* J. Algebr. Comb. 1992. V. 1. P. 111–132.
- [7] *D. M. Bressoud.* Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [8] *W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey.* Invent. Math. 1982. V. 66. P. 73–87.
- [9] *D. Zeilberger.* New York J. Math. 1996. V. 2. P. 59–68; Electron J. Comb. 1996. V. 3(2). P. R13.
- [10] *Yu. G. Stroganov.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. L179–L185.
- [11] *G. D. Carroll.* E-mail message to private “domino” forum, 04/11/02; for access to forum contact Jim Propp at propp@math.wisc.edu.