Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. А. Назаров, У. А. Розиков, О периодических гиббсовских мерах модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями, *ТМФ*, 2003, том 135, номер 3, 515–523

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf201>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 15:59:20

О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГИББСОВСКИХ МЕРАХ МОДЕЛИ ИЗИНГА С КОНКУРИРУЮЩИМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ

Для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли второго порядка получен оператор, соответствующий периодическим распределениям Гиббса с периодом два. Найдены инвариантные подмножества этого оператора, с применением которых описаны периодические гиббсовские распределения.

Ключевые слова: дерево Кэли, конфигурация, предельная мера Гиббса, периодическая мера Гиббса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на первых и вторых соседях на дереве Кэли. Дерево Кэли $\Gamma^k = (V, L)$, $k \geq 1$, есть бесконечное дерево, т.е. граф без циклов, из каждой вершины которого выходят ровно $k + 1$ ребер (V есть множество вершин Γ^k , L – множество его ребер).

В работе [1] доказано, что Γ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k + 1$ циклических групп второго порядка. Если гиббсовское распределение инвариантно относительно некоторой подгруппы конечного индекса G_k^* группы G_k , то оно называется G_k^* -периодическим. Достаточно широкий класс нормальных делителей конечного индекса группы G_k описан в работе [2]. В работе [3] изучена структура разбиений дерева Кэли; доказано также, что существует три H_0 -периодических распределения Гиббса для неоднородной модели Изинга, где H_0 – нормальный делитель конечного индекса. В работе [4] построено несчетное число непериодических распределений Гиббса с помощью распределений, полученных в работе [3]. Но если в модели происходят конкурирующие взаимодействия, задача описания периодических распределений Гиббса нелегка. Дело в том, что в этой ситуации возникает нелинейный оператор W , отображающий $\mathbb{R}^r$ в себя (r – индекс нормального делителя), и задача состоит в описании

*Самаркандский государственный архитектурный институт, Самарканд, Республика Узбекистан

†Институт математики АН РУз, Ташкент, Республика Узбекистан

неподвижных точек этого оператора. Если известны инвариантные подмножества оператора W , то, рассматривая сужения этого оператора на инвариантные подмножества, можно надеяться на получение некоторых неподвижных точек, так как вид оператора в этом случае упрощается.

Если $l = \langle x, y \rangle \in L$, то $x, y \in V$ называются соседними. Вершины $x, z \in V$ называются вторыми соседями и обозначаются $\rangle x, z \langle$, если существует $y \in V$ такое, что $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, z \rangle$.

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Phi^V$, т.е. $\sigma = \{\sigma_x \in \Phi : x \in V\}$. Рассмотрим гамильтониан

$$H(\sigma) = -J_1 \sum_{\langle x, y \rangle} \sigma_x \sigma_y - J_2 \sum_{\rangle x, y \langle} \sigma_x \sigma_y, \quad (1)$$

где $J_1, J_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_x = \pm 1$ для любого $x \in V$.

Модель (1) называется моделью Изинга с конкурирующими взаимодействиями.

Обычным образом вводятся понятия предельного распределения Гиббса модели (1), чистой фазы и т.д.

В статье [5] решена задача описания трансляционно-инвариантных гиббсовских мер модели (1). В работе [6] модель (1) исследована на физическом уровне и при конкретных значениях параметров J_1, J_2 дана фазовая диаграмма состояния системы.

В настоящей работе мы ограничимся случаем $k = 2$. Будем изучать оператор, соответствующий модели (1) в случае нормального делителя $G_k^{(2)}$ индекса 2, который является подгруппой, состоящей из слов четной длины.

Цель работы – найти инвариантные подмножества рассматриваемого оператора и, применяя их, описать периодические гиббсовские меры.

2. ОПЕРАТОР, СООТВЕТСТВУЮЩИЙ $G_k^{(2)}$ -ПЕРИОДИЧЕСКИМ МЕРАМ

Пусть V есть множество вершин Γ^2 . Пронумеруем точки множества $V = \{0, i, ij, ijk, \dots; i = 1, 2, 3, j, k, l, \dots = 1, 2\}$ следующим образом. Выберем произвольную точку 0, ближайшим соседним вершинам этой точки поставим в соответствие числа 1, 2, 3; ближайшим соседним вершинам вершин i , $i = 1, 2, 3$, отличным от 0, поставим в соответствие пары чисел ij , где $j = 1, 2$; ближайшим соседним вершинам вершин ij , не имеющим номеров, поставим в соответствие тройку ijk , где $k = 1, 2$, и т.д.

Всякую функцию $\sigma = \{\sigma_x, x \in V\}$, определенную на множестве V и принимающую значения $\sigma_x = \pm 1$, будем называть конфигурацией в V , а совокупность всех таких конфигураций обозначим через Ω .

Расстояние $d(x, y)$, $x, y \in V$, есть число ребер пути из x в y .

Обозначим $W_n = \{x \in V : d(0, x) = n\}$, $V_n = \{x \in V : d(0, x) \leq n\}$, $K = J_1/T$, $K' =$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эта теорема есть следствие теоремы 2.2 из работы [5].

Таким образом, каждой предельной гиббсовской мере μ на $\Omega = \Phi^V$ сопоставляется совокупность векторов

$$h = \{x(t) = (x^-(t), x^+(t)) : t \in G_2\},$$

координаты которых удовлетворяют равенству (4). Но описание решений функционального уравнения (4) – весьма сложная задача. Поэтому естественно сначала искать те из них, которые принимают лишь конечное число значений.

Для описания $G_2^{(2)}$ -периодических мер предположим, что

$$x^\sigma(t) = \begin{cases} x_1^\sigma, & \text{если } t \in G_2^{(2)}, \\ x_2^\sigma, & \text{если } t \in G_2 \setminus G_2^{(2)}. \end{cases}$$

Тогда из (4) получим

$$\begin{cases} x_1^+ = \frac{x_2^+}{x_2^-} \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^- + \theta_2^2(x_2^-)^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^+ + \theta_1^2\theta_2^2(x_2^+)^2} F_1(x_1^-, x_1^+), \\ x_1^- = \frac{x_2^+}{x_2^-} \frac{\theta_1^2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^- + (x_2^-)^2}{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^+ + \theta_1^2(x_2^+)^2} F_1(x_1^-, x_1^+), \\ x_2^+ = \frac{x_1^+}{x_1^-} \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^- + \theta_2^2(x_1^-)^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^+ + \theta_1^2\theta_2^2(x_1^+)^2} F_1(x_2^-, x_2^+), \\ x_2^- = \frac{x_1^+}{x_1^-} \frac{\theta_1^2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^- + (x_1^-)^2}{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^+ + \theta_1^2(x_1^+)^2} F_1(x_2^-, x_2^+), \end{cases} \quad (5)$$

где

$$F_1(x, y) = F_1(x, y, \theta_1, \theta_2) = \frac{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2y + \theta_1^2y^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2y + \theta_1^2\theta_2^2y^2} \cdot \frac{\theta_1^2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + x^2}{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_2^2x^2}.$$

Рассмотрим оператор $W: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$:

$$\begin{cases} y_1^+ = \frac{x_2^+}{x_2^-} \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^- + \theta_2^2(x_2^-)^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^+ + \theta_1^2\theta_2^2(x_2^+)^2} F_1(x_1^-, x_1^+), \\ y_1^- = \frac{x_2^+}{x_2^-} \frac{\theta_1^2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^- + (x_2^-)^2}{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_2^+ + \theta_1^2(x_2^+)^2} F_1(x_1^-, x_1^+), \\ y_2^+ = \frac{x_1^+}{x_1^-} \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^- + \theta_2^2(x_1^-)^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^+ + \theta_1^2\theta_2^2(x_1^+)^2} F_1(x_2^-, x_2^+), \\ y_2^- = \frac{x_1^+}{x_1^-} \frac{\theta_1^2\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^- + (x_1^-)^2}{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x_1^+ + \theta_1^2(x_1^+)^2} F_1(x_2^-, x_2^+). \end{cases} \quad (6)$$

Заметим, что система (5) – это уравнение $W(x) = x$, $x \in \mathbb{R}^4$. Решения этой системы определяют периодические распределения Гиббса.

3. ОБ ИНВАРИАНТНЫХ МНОЖЕСТВАХ ОТОБРАЖЕНИЯ W

Обозначим

$$\begin{aligned} A &= \{(x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+) \in \mathbb{R}^4: x_1^- = x_2^-, x_1^+ = x_2^+\}, \\ B &= \left\{ (x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+) \in \mathbb{R}^4: x_1^- = \frac{1}{x_1^+}, x_2^- = \frac{1}{x_2^+} \right\}, \\ C &= \left\{ (x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+) \in \mathbb{R}^4: x_1^- = \frac{1}{x_2^+}, x_1^+ = \frac{1}{x_2^-} \right\}. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 2. *Множества A, B, C инвариантны относительно отображения W , т.е. $W(A) \subseteq A$, $W(B) \subseteq B$, $W(C) \subseteq C$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$G_1(x, y) = G_1(x, y, \theta_1, \theta_2) = \frac{y}{x} \frac{\theta_1^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_2^2x^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2y + \theta_1^2\theta_2^2y^2}.$$

Тогда из (6) получим

$$\begin{cases} y_1^+ = G_1(x_2^-, x_2^+)F_1(x_1^-, x_1^+), \\ y_1^- = \left[G_1\left(\frac{1}{x_2^+}, \frac{1}{x_2^-}\right) \right]^{-1} F_1(x_1^-, x_1^+), \\ y_2^+ = G_1(x_1^-, x_1^+)F_1(x_2^-, x_2^+), \\ y_2^- = \left[G_1\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}\right) \right]^{-1} F_1(x_2^-, x_2^+). \end{cases} \quad (7)$$

Заметим, что отображение F_1 удовлетворяет равенству

$$F_1\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{F_1(x, y)}.$$

Обозначим $V(x, y, z, t, \theta_1, \theta_2) = G_1(x, y)F_1(z, t)$. Тогда из (7) получим

$$\begin{cases} y_1^+ = V(x_2^-, x_2^+, x_1^-, x_1^+, \theta_1, \theta_2), \\ \frac{1}{y_1^-} = V\left(\frac{1}{x_2^+}, \frac{1}{x_2^-}, \frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, \theta_1, \theta_2\right), \\ y_2^+ = V(x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+, \theta_1, \theta_2), \\ \frac{1}{y_2^-} = V\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, \frac{1}{x_2^+}, \frac{1}{x_2^-}, \theta_1, \theta_2\right). \end{cases} \quad (8)$$

Отсюда очевидно, что множества A, B, C инвариантны относительно W . Теорема доказана.

Обозначим сужения оператора W на множества A, B, C через W_A, W_B, W_C , соответственно.

Пусть

$$A_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2: x = \frac{1}{y} \right\} \quad B_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x = y\}.$$

ТЕОРЕМА 3. Множества A_1, B_1, A_1 являются инвариантными относительно W_A, W_B, W_C , соответственно, т.е.

$$W_A(A_1) \subseteq A_1, \quad W_B(B_1) \subseteq B_1, \quad W_C(A_1) \subseteq A_1. \quad (9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (8) заметим, что

$$\begin{aligned} W_A: & \begin{cases} y_1^+ = V(x_1^-, x_1^+, x_1^-, x_1^+, \theta_1, \theta_2) = V_A(x_1^-, x_1^+), \\ \frac{1}{y_1^-} = V\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, \frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, \theta_1, \theta_2\right) = V_A\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}\right), \end{cases} \\ W_B: & \begin{cases} y_1^+ = V\left(\frac{1}{x_2^+}, x_2^+, \frac{1}{x_1^+}, x_1^+, \theta_1, \theta_2\right) = V_B(x_2^+, x_1^+), \\ y_2^+ = V\left(\frac{1}{x_1^+}, x_1^+, \frac{1}{x_2^+}, x_2^+, \theta_1, \theta_2\right) = V_B(x_1^+, x_2^+), \end{cases} \\ W_C: & \begin{cases} y_1^+ = V\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, x_1^-, x_1^+, \theta_1, \theta_2\right) = V_C(x_1^-, x_1^+), \\ y_1^- = V(x_1^-, x_1^+, \frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}, \theta_1, \theta_2) = V_C\left(\frac{1}{x_1^+}, \frac{1}{x_1^-}\right). \end{cases} \end{aligned}$$

Легко видеть, что равенства (9) выполняются. Теорема доказана.

Заметим, что если $\theta_2 = 1$ ($J_2 = 0$), то

$$F_1(x, y, \theta_1, 1) = 1, \quad G_1(x, y, \theta_1, 1) = \frac{y}{x} \left(\frac{\theta_1 + x}{1 + \theta_1 y} \right)^2$$

и

$$G_1\left(\frac{1}{y}, \frac{1}{x}, \theta_1, 1\right) = \frac{1}{G_1(x, y, \theta_1, 1)}.$$

Оператор W при $\theta_2 = 1$ принимает вид

$$\begin{cases} y_1^+ = G_1(x_2^-, x_2^+, \theta_1, 1), \\ y_1^- = G_1(x_2^-, x_2^+, \theta_1, 1), \\ y_2^+ = G_1(x_1^-, x_1^+, \theta_1, 1), \\ y_2^- = G_1(x_1^-, x_1^+, \theta_1, 1). \end{cases} \quad (10)$$

Из (10) следует

ТЕОРЕМА 4. 1. При $\theta_2 = 1$ оператор W , кроме инвариантных множеств A, B, C , имеет еще инвариантное множество

$$D = \{(x_1^-, x_1^+, x_2^-, x_2^+) \in \mathbb{R}^4 : x_1^- = x_1^+, x_2^- = x_2^+\}.$$

2. При $\theta_2 = 1$ сужение оператора W на D имеет два инвариантных множества

$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}, \quad D_2 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \frac{1}{y} \right\}.$$

4. ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК СУЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА W НА МНОЖЕСТВА A_1, B_1, D_1, D_2

Сужения оператора W на A_1 и B_1 (при $\theta_2 \neq 1$) приводят к одному и тому же уравнению

$$x = V\left(x, \frac{1}{x}, x, \frac{1}{x}, \theta_1, \theta_2\right). \quad (11)$$

Его решение дает только трансляционно-инвариантные распределения Гиббса, построенные, в частности, в работе [5].

Сужение оператора W на D_1 (при $\theta_2 = 1$) приводит к уравнению

$$x = V(x, x, x, x, \theta_1, 1), \quad (12)$$

решение которого дает трансляционно-инвариантные распределения Гиббса, полностью построенные в работе [2].

Сужение оператора W на D_2 (при $\theta_2 = 1$) приводит к уравнению

$$x = V\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{x}, x, x, \theta_1, 1\right), \quad (13)$$

решение которого дает нетрансляционно-инвариантные периодические распределения Гиббса, полностью построенные в работе [3].

5. ОБ УРАВНЕНИЯХ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК СУЖЕНИЙ ОПЕРАТОРА W НА МНОЖЕСТВА A, B, C, D

Сужение на D имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \left(\frac{\theta_1 + x_2}{1 + \theta_1 x_2}\right)^2, \\ x_2 = \left(\frac{\theta_1 + x_1}{1 + \theta_1 x_1}\right)^2. \end{cases} \quad (14)$$

Система (14) дает периодические распределения Гиббса для обычной ($J_2 = 0$) модели Изинга (см. [2]).

Сужение на B имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{\theta_1^2 y^2 + 2\theta_1 \theta_2^2 y + \theta_2^2}{\theta_1^2 \theta_2^2 y^2 + 2\theta_1 \theta_2^2 y + 1}, \\ y = \frac{\theta_1^2 x^2 + 2\theta_1 \theta_2^2 x + \theta_2^2}{\theta_1^2 \theta_2^2 x^2 + 2\theta_1 \theta_2^2 x + 1}. \end{cases} \quad (15)$$

Обозначим $\theta = \theta_2^2$, $u = \theta_1 x$, $v = \theta_1 y$. Тогда из (15) имеем

$$\begin{cases} \theta uv^2 + 2\theta uv + u - \theta_1 v^2 - 2\theta\theta_1 v - \theta\theta_1 = 0, \\ \theta vu^2 + 2\theta uv + v - \theta_1 u^2 - 2\theta\theta_1 u - \theta\theta_1 = 0. \end{cases} \quad (16)$$

Обозначим $\sigma_1 = u + v$, $\sigma_2 = uv$. Система (16) распадается на две системы

$$\begin{cases} \theta\sigma_1\sigma_2 + 4\theta\sigma_2 + \sigma_1 - \theta_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 2\theta\theta_1\sigma_1 - 2\theta\theta_1 = 0, \\ 4\sigma_2 = \sigma_1^2, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \theta\sigma_1\sigma_2 + 4\theta\sigma_2 + \sigma_1 - \theta_1(\sigma_1^2 - 2\sigma_2) - 2\theta\theta_1\sigma_1 - 2\theta\theta_1 = 0, \\ \theta\sigma_2 = \theta_1\sigma_1 + 2\theta\theta_1 + 1. \end{cases} \quad (18)$$

Подставляя $\sigma_2 = \sigma_1^2/4$ в первое уравнение системы (17), получим

$$\theta\sigma_1^3 + 2\theta\sigma_1^2 + 4(1 - 2\theta\theta_1)\sigma_1 - 8\theta\theta_1 = 0. \quad (19)$$

Заметим, что это уравнение можно полностью решить, но оно дает только трансляционно-инвариантные распределения Гиббса.

Подставляя $\sigma_2 = \theta^{-1}(\theta_1\sigma_1 + 2\theta\theta_1 + 1)$ в первое из уравнений (18), получим

$$\sigma_1 = -\frac{6\theta^2\theta_1 + 4\theta\theta_1^2 + 4\theta + 2\theta_1}{2\theta_1^2 + 4\theta\theta_1 + 2\theta} < 0.$$

Но по построению $\sigma_1 = u + v > 0$. Таким образом, система (18) не имеет положительных решений.

Сужение оператора W на множество A можно привести к виду

$$\begin{cases} x = \frac{\varphi(x)\psi(x)}{\varphi(y)} = K(x, y), \\ y = \frac{\varphi(y)\psi(y)}{\varphi(x)} = K(y, x), \end{cases} \quad (20)$$

где

$$\varphi(x) = \frac{x}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_1^2\theta_2^2x^2}, \quad \psi(x) = \frac{\theta_2^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_1^2y^2}{1 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_1^2\theta_2^2x^2}.$$

Система (20) эквивалентна системе

$$\begin{cases} x + y = K(x, y) + K(y, x), \\ x - y = K(x, y) - K(y, x). \end{cases} \quad (21)$$

Легко проверить, что система (21) распадается на две:

$$\begin{cases} x + y = K(x, y) + K(y, x), \\ x = y, \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{cases} x + y = K(x, y) + K(y, x), \\ S(x, y) = 0, \end{cases} \quad (23)$$

где $S(x, y)$ – некоторая функция такая, что $S(x, y) = S(y, x)$ для любых x, y .

Заметим, что система (22) дает трансляционно-инвариантные распределения Гиббса. Система (23) симметрична относительно перестановки x, y , поэтому можно ввести замену $\sigma_1 = x + y$, $\sigma_2 = xy$. Тогда система (23) примет более простой вид, и второе уравнение будет иметь степень 3 относительно σ_1 , т.е. можно будет получить полное решение. Но, подставляя его в первое из уравнений (23), получаем громоздкое уравнение высокого (> 3) порядка, решить которое аналитическими методами не удастся.

Сужение на C имеет вид

$$\begin{cases} x = \frac{a(y)b(x)}{\psi(x^{-1})}, \\ y = a(y)b(x)\psi(y), \end{cases} \quad (24)$$

где

$$a(x) = x(\theta_1^2x^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_2^2), \quad b(x) = (x(x^2 + 2\theta_1\theta_2^2x + \theta_1^2\theta_2^2))^{-1}.$$

Первое уравнение ситемы (24) есть кубическое уравнение относительно y , второе – относительно x . Их можно решить. Подставляя полученное решение первого уравнения во второе и наоборот, получаем достаточно громоздкие уравнения высокого (> 3) порядка, решить которые аналитическими методами не удастся.

6. ОБСУЖДЕНИЕ. ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Одна из основных задач для данного гамильтониана – описание множества всех соответствующих ему гиббсовских распределений. Но полностью описать это множество пока не удастся даже для достаточно простых гамильтонианов. В работе [6] модель (1) исследована на физическом уровне; там при конкретных значениях параметров J_1, J_2 дана фазовая диаграмма состояний системы.

Но интересно получить область параметров J_1, J_2 , где существуют неединственные распределения Гиббса. В работе [5] решена задача описания трансляционно-инвариантных гиббсовских мер модели (1). Результаты настоящей работы позволяют явно выписать области значения параметров J_1, J_2 , где существуют периодические распределения Гиббса. В сужении оператора W на множество B доминирующую роль играет параметр J_2 , т.е. если $J_2 = 0$, то система (15) имеет единственное решение $x = y = 1$. Но если $J_2 \neq 0$, то существует область параметров J_1, J_2 , при которых система (15) имеет более чем одно решение. Эта область параметров получается при решении кубического уравнения (19).

Сужениям оператора W на инвариантные множества A и C соответствуют очень громоздкие уравнения. Их решения можно получить с помощью компьютера, но это не входит в круг наших интересов.

Заметим, что связь между решениями уравнений и распределениями Гиббса задается равенствами (2) и (4). Сужения оператора на множества A_1, B_1, D, D_1, D_2 дают известные распределения Гиббса. Сужения оператора на множества A, B, C приводят к новым распределениям Гиббса.

И, наконец, сформулируем проблемы, которые оказались достаточно сложными и требующими дальнейшего рассмотрения.

1. Существуют ли другие инвариантные множества оператора W ?
2. Существуют ли неподвижные точки вне инвариантных множеств?
3. Существует ли подгруппа G_k^* конечного индекса группы G_k , относительно которой функциональное уравнение (11) на классе G_k^* -периодических функций решается полностью?

Список литературы

- [1] *Н. Н. Ганиходжаев*. ДАН РУз. 1994. № 4. С. 3–5.
- [2] *Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков*. ТМФ. 1997. Т. 111. № 1. С. 109–117.
- [3] *У. А. Розиков*. ТМФ. 1997. Т. 112. № 1. С. 170–176.
- [4] *У. А. Розиков*. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 95–104.
- [5] *Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков*. УзМЖ. 1995. № 2. С. 36–47.
- [6] *S. Katsura, M. Takizawa*. Progr. Theor. Phys. 1974. V. 51. № 1. P. 82–98.

Поступила в редакцию 22.V.2002 г.