Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Грибанов, В. Г. Кадышевский, А. С. Сорин, Гамильтоновы структуры фермионных двумерных решеточных иерархий Тоды, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 90–102

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2011>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.209.158.208

26 апреля 2023 г., 04:41:19

© 2006 г. В. В. Грибанов*, В. Г. Кадышевский*, А. С. Сорин*

ГАМИЛЬТОНОВЫ СТРУКТУРЫ ФЕРМИОННЫХ ДВУМЕРНЫХ РЕШЕТОЧНЫХ ИЕРАРХИЙ ТОДЫ

На базе соответствующих представлений Лакса предложен широкий класс интегрируемых двумерных фермионных решеточных иерархий Тоды, который включает двумерные $N = (2 | 2)$ и $N = (0 | 2)$ суперсимметричные решеточные иерархии Тоды как частные случаи. Развит обобщенный градуированный R -матричный формализм с использованием обобщенной градуированной скобки на пространстве градуированных операторов с инволюцией, обобщающей градуированный коммутатор в супералгебрах, что позволило описать указанные иерархии в рамках гамильтонова формализма и построить их первые две гамильтоновы структуры. Первая гамильтонова структура получена как для бозонных, так и для фермионных операторов Лакса, в то время как вторая гамильтонова структура найдена только для бозонных операторов Лакса.

Ключевые слова: интегрируемые системы, решетки Тоды, R -матрица, уравнение Янга–Бакстера.

1. ВВЕДЕНИЕ

Двумерная решеточная иерархия Тоды (РТ-иерархия) впервые была исследована в работах [1], и в настоящее время известны два различных нетривиальных суперсимметричных расширения двумерной РТ-иерархии. Эти расширения суть $N = (2 | 2)$ [2]–[7] и $N = (0 | 2)$ [7], [4] суперсимметричные РТ-иерархии, которые обладают разным числом суперсимметрий и содержат $N = (2 | 2)$ и $N = (0 | 2)$ РТ-уравнения в качестве подсистем. В последнее время были предложены двумерные обобщенные фермионные РТ-уравнения [6] и были рассмотрены две редукции этих уравнений, ведущие к $N = (2 | 2)$ и $N = (0 | 2)$ суперсимметричным РТ-уравнениям. В настоящей работе мы описываем широкий класс интегрируемых двумерных фермионных РТ-иерархий, который включает двумерные $N = (2 | 2)$ и $N = (0 | 2)$ суперсимметричные РТ-иерархии как частные случаи и содержит двумерные обобщенные фермионные РТ-уравнения в качестве подсистемы.

*Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: gribanov@thsun1.jinr.ru, kadyshhev@jinr.ru, sorin@thsun1.jinr.ru

Совсем недавно в работе [8] было найдено гамильтоново описание двумерной РТ-иерархии в рамках R -матричного подхода, где ключевым моментом явилось введение новой R -матрицы, ассоциированной с расщеплением алгебры, заданной парой разностных операторов. В настоящей работе мы применим эту R -матрицу для пространства разностных Z_2 -градуированных операторов и получим бигамильтонову структуру двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии.

Примечательно, что при решении этой задачи обобщенная градуированная скобка (7) (см. ниже) на пространстве градуированных операторов с инволюцией находит новое применение. Данная скобка была введена в работе [9], где было показано, что $N = (1 \mid 1)$ суперсимметричная двумерная РТ-иерархия обладает естественным представлением Лакса в терминах именно такой скобки, что позволило построить бездисперсионную $N = (1 \mid 1)$ двумерную РТ-иерархию и ее представление Лакса. В настоящей работе мы используем обобщенную градуированную скобку для описания двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии и нахождения двух ее гамильтоновых структур.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 дано определение пространства Z_2 -градуированных разностных операторов с инволюцией и приведены определение и свойства обобщенной градуированной скобки [9]. В разделе 3 даны теоретические основы R -матричного подхода, обобщенного на случай Z_2 -градуированных разностных операторов. Мы задаем R -матрицу на ассоциативной алгебре $\mathfrak{g}$ Z_2 -градуированных разностных операторов, получаем градуированное модифицированное уравнение Янга–Бакстера и, используя обобщенную градуированную скобку, определяем две скобки Пуассона для функционалов на $\mathfrak{g}^\dagger = \mathfrak{g}$. Используя эти скобки Пуассона, можно задать гамильтоновы уравнения, которые эквивалентным образом переписываются в терминах представления Лакса. Основные результаты раздела 3 сформулированы в виде теоремы. В разделе 4 предложен широкий класс двумерных фермионных (K, M) -РТ-иерархий в терминах представления Лакса с обобщенной градуированной скобкой и построена алгебра их потоков. В разделе 5 результаты раздела 3 применяются для получения явных выражений двух гамильтоновых структур двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии. В разделе 6 кратко сформулированы основные полученные результаты и перечислены проблемы, оставшиеся нерешенными.

2. ПРОСТРАНСТВО РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе мы определим важное для дальнейшего рассмотрения пространство разностных операторов. Эти операторы могут быть представлены в следующем общем виде:

$$\mathbb{O}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}, \quad m, j \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Функции $f_{2k,j}^{(m)}$ ($f_{2k+1,j}^{(m)}$), параметризующие операторы, являются Z_2 -градуированными бозонными (фермионными) полями на решетке с индексом решетки j ($j \in \mathbb{Z}$)

и грасмановой четностью, определяемой индексом k :

$$d_{f_{k,j}^{(m)}} = |k| \mod 2.$$

Везде ниже предполагается, что функции $f_{k,j}^{(m)}$ удовлетворяют нулевым граничным условиям на бесконечности

$$\lim_{j \rightarrow \pm\infty} f_{k,j}^{(m)} = 0. \quad (2)$$

Оператор $e^{k\partial}$ есть оператор сдвига, действие которого на решеточные поля заключается в дискретном сдвиге индекса решетки

$$e^{l\partial} f_{k,j}^{(m)} = f_{k,j+l}^{(m)} e^{l\partial}. \quad (3)$$

Оператор сдвига обладает Z_2 -четностью, определенной как

$$d'_{e^{l\partial}} = |l| \mod 2.$$

Операторы $\mathbb{O}_m$ (1) допускают задание диагональной Z_2 -четности

$$d_{\mathbb{O}_m} = d_{f_{k,j}^{(m)}} + d'_{e^{(k-m)\partial}} = |m| \mod 2 \quad (4)$$

и инволюции

$$\mathbb{O}_m^* = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial}.$$

Далее нам также потребуются проекторы операторов $\mathbb{O}_m$, определенные как

$$(\mathbb{O}_m)_{\leq p} = \sum_{k \leq p+m} f_{k,j} e^{(k-m)\partial}, \quad (\mathbb{O}_m)_{\geq p} = \sum_{k \geq p+m} f_{k,j} e^{(k-m)\partial},$$

и мы будем использовать обычные обозначения для проекторов $(\mathbb{O}_m)_+ := (\mathbb{O}_m)_{\geq 0}$ и $(\mathbb{O}_m)_- := (\mathbb{O}_m)_{< 0}$. Заметим, что $e^{l\partial}$ — это общепринятое обозначение для операторов сдвига, определенных в терминах бесконечномерных матриц $(e^{l\partial})_{i,j} \equiv \delta_{i,j-l}$, и существует изоморфизм между операторами (1) и бесконечномерными матрицами (см., например, [10])

$$\mathbb{O}_m = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} e^{(k-m)\partial} \rightarrow (\mathbb{O}_m)_{j,i} \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} f_{k,j}^{(m)} \delta_{j,i-k+m}.$$

В пространстве операторов (1) можно выделить два подпространства, которые чрезвычайно важны в дальнейшем:

$$\mathbb{O}_{K_1}^+ = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,j} e^{(K_1-k)\partial}, \quad K_1 \in \mathbb{N}, \quad (5)$$

$$\mathbb{O}_{K_2}^- = \sum_{k=0}^{\infty} f_{k,j} e^{(k-K_2)\partial}, \quad K_2 \in \mathbb{N}. \quad (6)$$

Операторы подпространств $\mathbb{O}_{K_1}^+$ и $\mathbb{O}_{K_2}^-$ образуют ассоциативные алгебры с операцией умножения (3). Используя это обстоятельство, определим на этих подпространствах обобщенную градуированную алгебру со скобкой [9]

$$[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}] := \mathbb{O} \tilde{\mathbb{O}} - (-1)^{d_{\mathbb{O}} d_{\tilde{\mathbb{O}}}} \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})} \mathbb{O}^{*(d_{\tilde{\mathbb{O}}})}, \quad (7)$$

где операторы $\mathbb{O}$ и $\tilde{\mathbb{O}}$ принадлежат подпространствам $\mathbb{O}_{K_1}^+$ и $\mathbb{O}_{K_2}^-$, а $\mathbb{O}^{*(m)}$ обозначает m -кратное действие инволюции $*$ на оператор $\mathbb{O}$, ($\mathbb{O}^{*(2)} = \mathbb{O}$). Скобка (7) обобщает (анти)коммутатор в супералгебрах и обладает следующими свойствами [9]:

симметрия

$$[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}] = -(-1)^{d_{\mathbb{O}} d_{\tilde{\mathbb{O}}}} [\tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})}, \mathbb{O}^{*(d_{\tilde{\mathbb{O}}})}], \quad (8)$$

дифференцирование

$$[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}} \hat{\mathbb{O}}] = [\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}] \hat{\mathbb{O}} + (-1)^{d_{\mathbb{O}} d_{\tilde{\mathbb{O}}}} \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})} [\mathbb{O}^{*(d_{\tilde{\mathbb{O}}})}, \hat{\mathbb{O}}], \quad (9)$$

тождество Якоби

$$\begin{aligned} & (-1)^{d_{\mathbb{O}} d_{\hat{\mathbb{O}}}} [[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})}], \hat{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}}+d_{\hat{\mathbb{O}}})}] + (-1)^{d_{\tilde{\mathbb{O}}} d_{\mathbb{O}}} [[\tilde{\mathbb{O}}, \hat{\mathbb{O}}^{*(d_{\tilde{\mathbb{O}}})}], \mathbb{O}^{*(d_{\hat{\mathbb{O}}+d_{\mathbb{O}}})}] + \\ & + (-1)^{d_{\hat{\mathbb{O}}} d_{\tilde{\mathbb{O}}}} [[\hat{\mathbb{O}}, \mathbb{O}^{*(d_{\hat{\mathbb{O}}})}], \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\hat{\mathbb{O}}+d_{\mathbb{O}}})}] = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Для операторов $\mathbb{O}_m$ (1) определим также операцию взятия суперследа:

$$\text{str } \mathbb{O} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (-1)^j f_{m,j}^{(m)}. \quad (11)$$

Нетрудно убедиться, что основное свойство суперследов $\text{str}[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}] = 0$ в случае обобщенной градуированной скобки (7) действительно выполняется, если входящие в операторы (1) функции удовлетворяют нулевым граничным условиям на бесконечности (2).

3. R-МАТРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ

В этом разделе даются основы R -матричного подхода применительно к случаю пространства операторов (1).

Пусть $\mathfrak{g}$ – некоторая ассоциативная алгебра операторов из пространства операторов (1) с инвариантным невырожденным скалярным произведением

$$\langle \mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}} \rangle = \text{str}(\mathbb{O} \tilde{\mathbb{O}}),$$

используя которое можно отождествить алгебру $\mathfrak{g}$ с дуальным к ней пространством $\mathfrak{g}^\dagger$. Определим следующую скобку Пуассона:

$$\{f, g\}(\mathbb{O}) = -\langle \mathbb{O}, [\nabla g, (\nabla f)^{*(\nabla d_g)}] \rangle, \quad (12)$$

где f, g – функционалы на $\mathfrak{g}$, а ∇f и ∇g – их градиенты в точке $\mathbb{O}$, которые связаны с f, g посредством скалярного произведения:

$$\left. \frac{\partial f(\mathbb{O} + \epsilon \delta \mathbb{O})}{\partial \epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \langle \delta \mathbb{O}, \nabla f(\mathbb{O}) \rangle.$$

Заметим, что надлежащие свойства скобки Пуассона (12) вытекают из свойств (8)–(10) обобщенной скобки (7) и строго определяются Z_2 -градуировкой оператора $\mathbb{O}$. Таким образом, мы имеем свойства симметрии

$$\{f, g\} = -(-1)^{(d_f+d_{\mathbb{O}})(d_g+d_{\mathbb{O}})}\{g, f\}, \quad (13)$$

дифференцирования

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + (-1)^{d_g(d_f+d_{\mathbb{O}})}g\{f, h\} \quad (14)$$

и тождество Якоби

$$\begin{aligned} & (-1)^{(d_f+d_{\mathbb{O}})(d_h+d_{\mathbb{O}})}\{\{f, g\}, h\} + (-1)^{(d_g+d_{\mathbb{O}})(d_f+d_{\mathbb{O}})}\{\{g, h\}, f\} + \\ & + (-1)^{(d_h+d_{\mathbb{O}})(d_g+d_{\mathbb{O}})}\{\{h, f\}, g\} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Так, для оператора $\mathbb{O}$ с четной диагональной Z_2 -градуировкой мы имеем обычную (четную) Z_2 -градуированную скобку Пуассона, в то время как для операторов с нечетной диагональной градуировкой $d_{\mathbb{O}}$ (4) формула (12) определяет нечетную Z_2 -градуированную скобку Пуассона (антискробку).

Определив скобку Пуассона, перейдем к построению иерархии потоков, порождаемых этой скобкой через гамильтонианы. Следовательно, нам нужно определить бесконечное множество функционалов, которые, для того чтобы претендовать на роль гамильтонианов, должны быть в инволюции. Для скобки Пуассона (12) бесконечное множество гамильтонианов может быть найдено достаточно обычным способом:

$$H_k = \frac{1}{k} \text{str } \mathbb{O}_*^k = \frac{1}{k} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i f_{km,i}^{(km)}, \quad (16)$$

где операторы $\mathbb{O}_*^k$ определены следующим образом:

$$(\mathbb{O})_*^{2k} := (\mathbb{O}^{*(d_{\mathbb{O}})}\mathbb{O})^k, \quad (\mathbb{O})_*^{2k+1} := \mathbb{O}(\mathbb{O})_*^{2k}. \quad (17)$$

Для нечетных операторов $\mathbb{O}$ выражение (16) определяет только фермионные ненулевые функционалы H_{2k+1} , поскольку в этом случае четные степени операторов $\mathbb{O}$ имеют следующее представление:

$$d_{\mathbb{O}} = 1: \quad (\mathbb{O})_*^{2k} = \left(\frac{1}{2} [(\mathbb{O})^*, \mathbb{O}] \right)^k \equiv \frac{1}{2} [((\mathbb{O})_*^{2k-1})^*, \mathbb{O}], \quad (18)$$

и все бозонные гамильтонианы тривиальны ($H_{2k} = 0$) вследствие равенства нулю суперследа обобщенной градуированной скобки.

Функционалы (16), очевидно, находятся в инволюции, однако порождаемая ими динамика тривиальна. Действительно, функционалы H_k (16) суть операторы Казимира скобки Пуассона (12), т.е. скобка Пуассона функционала H_k с любым другим функционалом равна нулю (в силу соотношения $\nabla H_{k+1} = \mathbb{O}_*^k$). Тем не менее возможно модифицировать скобку Пуассона (12) таким образом, чтобы новая скобка Пуассона порождала нетривиальные уравнения движения при использовании тех же

гамильтонианов (16), а сами гамильтонианы по-прежнему находились в инволюции по отношению к модифицированной скобке Пуассона. Введем модифицированную обобщенную градуированную скобку на пространстве операторов (1)

$$[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}]_R := [R(\mathbb{O}), \tilde{\mathbb{O}}] + [\mathbb{O}, R(\tilde{\mathbb{O}})], \quad (19)$$

где оператор R есть линейное отображение $R: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ такое, что скобка (19) обладает свойствами (8)–(10). Можно убедиться, что тождества Якоби (10) для скобки (19) могут быть эквивалентным образом переписаны в терминах обобщенной градуированной скобки (7):

$$\begin{aligned} (-1)^{d_{\mathbb{O}}d_{\tilde{\mathbb{O}}}} [[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})}]_R, \hat{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}}+d_{\tilde{\mathbb{O}}})}]_R + \text{cycle perm.} = \\ = (-1)^{d_{\mathbb{O}}d_{\tilde{\mathbb{O}}}} [R([\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})}]_R) - [R(\mathbb{O}), R(\tilde{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}})})], \hat{\mathbb{O}}^{*(d_{\mathbb{O}}+d_{\tilde{\mathbb{O}}})}] + \text{cycle perm.} = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы приходим к заключению, что достаточным условием того, что отображение R есть R -матрица, является выполнение следующего равенства:

$$R([\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}]_R) - [R(\mathbb{O}), R(\tilde{\mathbb{O}})] = \alpha[\mathbb{O}, \tilde{\mathbb{O}}], \quad (20)$$

где α – некоторая константа. Следуя принятой в [11] терминологии, мы назовем уравнение (20) градуированным модифицированным уравнением Янга–Бакстера. Уравнение (20) представляет собой обобщение градуированного модифицированного классического уравнения Янга–Бакстера, рассмотренного в работе [12], на пространство градуированных операторов (1).

Используя новую скобку (19), можно определить соответствующую новую скобку Пуассона на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^\dagger$:

$$\{f, g\}_1(\mathbb{O}) = -\frac{1}{2} \langle \mathbb{O}, [\nabla g, (\nabla f)^{*(d_{\nabla g})}]_R \rangle. \quad (21)$$

Относительно зависимости правой части (21) от точки $\mathbb{O}$ эта скобка является линейной. Не вдаваясь в детали, введем также билинейную скобку для бозонных градуированных операторов $\mathbb{O}_B$ ($d_{\mathbb{O}_B} = 0$) следующим образом:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_2(\mathbb{O}_B) = -\frac{1}{4} \langle [\mathbb{O}_B, \nabla g] R((\nabla f)^{*(d_{\nabla g})}) \mathbb{O}_B^{*(d_{\nabla f}+d_{\nabla g})} + \mathbb{O}_B^{*(d_{\nabla g})} (\nabla f)^{*(d_{\nabla g})} - \\ - R(\nabla g \mathbb{O}_B^{*(d_{\nabla g})} + \mathbb{O}_B \nabla g) [\mathbb{O}_B^{*(d_{\nabla g})}, (\nabla f)^{*(d_{\nabla g})}] \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

Билинейную скобку для случая фермионных операторов $\mathbb{O}_F$ ($d_{\mathbb{O}_F} = 1$) нам построить не удалось. Скобка (21), очевидно, является скобкой Пуассона, если R является R -матрицей на $\mathfrak{g}$. Билинейная скобка (22) становится скобкой Пуассона при более жестких условиях, которые даны в следующей теореме.

ТЕОРЕМА. *А. Линейная скобка (21) является скобкой Пуассона, если R удовлетворяет градуированному модифицированному уравнению Янга–Бакстера (20).*

Б. Билинейная скобка (22) является скобкой Пуассона, если R и ее антисимметричная часть $(R - R^\dagger)/2$ удовлетворяют градуированному модифицированному

уравнению Янга–Бакстера (20) с той же константой α , где сопряженный оператор $R^\dagger$ действует на дуальном пространстве $\mathfrak{g}^\dagger$:

$$\langle \mathbb{O}, R(\tilde{\mathbb{O}}) \rangle = \langle R^\dagger(\mathbb{O}), \tilde{\mathbb{O}} \rangle.$$

В. Если $\mathbb{O} = \mathbb{O}_B$, то эти две скобки Пуассона совместны:

$$\{f, g\}_2(\mathbb{O}_B + b) = \{f, g\}_2(\mathbb{O}_B) + b\{f, g\}_1(\mathbb{O}_B).$$

Г. Операторы Казимира H_k (16) скобки (12) находятся в инволюции относительно как линейной (21), так и билинейной (22) скобок Пуассона.

Д. Гамильтонианы $H_k \neq 0$ (16) порождают уравнения движения

$$\begin{aligned} \partial_k \mathbb{O} &= \{H_{k+1}, \mathbb{O}\}_1 = \frac{1}{2} [R((\nabla H_{k+1})^{*(d\mathbb{O})}), \mathbb{O}], \\ \partial_k \mathbb{O}_B &= \{H_k, \mathbb{O}_B\}_2 = \frac{1}{4} [R(\nabla H_k \mathbb{O}_B + \mathbb{O}_B \nabla H_k), \mathbb{O}_B] \end{aligned}$$

посредством скобок (21) и (22), соответственно; эти уравнения связывают представления Лакса с гамильтоновым представлением.

Заметим, что аналогичная теорема для случая, когда операторы сдвига и функции, параметризующие разностные операторы $\mathbb{O}$ (1), имеют четную Z_2 -градуировку, рассматривалась в работах [8], [11], [13].

4. ДВУМЕРНАЯ ФЕРМИОННАЯ (K, M) -РТ-ИЕРАРХИЯ

В этом разделе будет дана формулировка двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии в терминах представления Лакса.

Рассмотрим два разностных оператора

$$L_K^+ = \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,i} e^{(K-k)\partial}, \quad L_M^- = \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,i} e^{(k-M)\partial}, \quad (23)$$

которые, очевидно, принадлежат соответственно пространствам (5) и (6). Поля на решетке и оператор сдвига, входящие в эти операторы, имеют следующие размерности в единицах длины: $[u_{k,i}] = -k/2$, $[v_{k,i}] = (k - K - M)/2$ и $[e^{k\partial}] = -k/2$, так что операторы (23) имеют одинаковую размерность $[L_K^+] = [L_M^-] = -K/2$. Динамика полей $u_{k,i}, v_{k,i}$ задается уравнениями Лакса, выраженными через обобщенную скобку (7) [9]:

$$\begin{aligned} D_s^\pm L_{\Omega^\alpha}^\alpha &= \mp \alpha (-1)^{s\Omega^\alpha \Omega^\pm} \left[(((L_{\Omega^\pm}^\pm)^s)_* - \alpha)^{*(\Omega^\alpha)}, L_{\Omega^\alpha}^\alpha \right], \\ \alpha &= +, -, \quad \Omega^+ = K, \quad \Omega^- = M, \quad s \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (24)$$

где $D_s^\pm$ – эволюционные производные, имеющие следующую Z_2 -градуировку:

$$d_{D_s^+} = sK \mod 2, \quad d_{D_s^-} = sM \mod 2,$$

и размерность $[D_s^+] = [D_s^-] = -sK/2$. Уравнения Лакса (24) порождают неабелеву (супер)алгебру потоков двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии

$$\begin{aligned} [D_s^+, D_p^+] &= (1 - (-1)^{spK}) D_{s+p}^+, \\ [D_s^-, D_p^-] &= (1 - (-1)^{spM}) D_{s+p}^-, \quad [D_s^+, D_p^-] = 0. \end{aligned}$$

Составные операторы $(L_K^+)_*$ и $(L_M^-)_*$, входящие в уравнения Лакса (24), определены формулой (17) и также принадлежат соответственно пространствам (5) и (6),

$$(L_K^+)_*^r := \sum_{k=0}^{\infty} u_{k,i}^{(r)} e^{(rK-k)\partial}, \quad (L_M^-)_*^r := \sum_{k=0}^{\infty} v_{k,i}^{(r)} e^{(k-rM)\partial}.$$

Здесь $u_{k,i}^{(r)}$ и $v_{k,i}^{(r)}$ суть функционалы исходных полей, и для них имеют место следующие рекуррентные соотношения:

$$\begin{aligned} u_{p,i}^{(r+1)} &= \sum_{k=0}^p (-1)^{kK} u_{k,i}^{(r)} u_{p-k,i-k+rK}, \quad u_{p,i}^{(1)} = u_{p,i}, \\ v_{p,i}^{(r+1)} &= \sum_{k=0}^p (-1)^{kM} v_{k,i}^{(r)} v_{p-k,i+k-rM}, \quad v_{p,i}^{(1)} = v_{p,i}. \end{aligned}$$

Теперь, используя представление Лакса (24) и соотношения (9) и (17), можно получить уравнения движения для составных операторов Лакса

$$D_s^{\pm} (L_{\Omega^{\alpha}}^{\pm})_*^r = \mp \alpha (-1)^{sr\Omega^{\alpha}\Omega^{\pm}} \left[((L_{\Omega^{\pm}}^{\pm})_*^s)_{-\alpha}^{*(r\Omega^{\alpha})}, (L_{\Omega^{\alpha}}^{\pm})_*^r \right]. \quad (25)$$

Представление Лакса (25) порождает следующие уравнения для функционалов $u_{k,i}^{(r)}$, $v_{k,i}^{(r)}$:

$$\begin{aligned} D_s^+ u_{k,i}^{(r)} &= \sum_{p=1}^k ((-1)^{rpK+1} u_{p+sK,i}^{(s)} u_{k-p,i-p}^{(r)} + (-1)^{(k+p)sK} u_{k-p,i}^{(r)} u_{p+sK,i+p-k+rK}^{(s)}), \\ D_s^- u_{k,i}^{(r)} &= \sum_{p=0}^{sM-1} ((-1)^{(sM+p)rK} v_{p,i}^{(s)} u_{p+k-sM,i+p-sM}^{(r)} - \\ &\quad - (-1)^{(k+p+1)sM} u_{p+k-sM,i}^{(r)} v_{p,i-p-k+sM+rK}^{(s)}), \\ D_s^+ v_{k,i}^{(r)} &= \sum_{p=0}^{sK} ((-1)^{(sK+p)rM} u_{p,i}^{(s)} v_{p+k-sK,i-p+sK}^{(r)} - \\ &\quad - (-1)^{(k+p+1)sK} v_{p+k-sK,i}^{(r)} u_{p,i+p+k-sK-rM}^{(s)}), \\ D_s^- v_{k,i}^{(r)} &= \sum_{p=0}^k ((-1)^{rpM+1} v_{p+sM,i}^{(s)} v_{k-p,i+p}^{(r)} + (-1)^{(k+p)sM} v_{k-p,i}^{(r)} v_{p+sM,i+k-p-rM}^{(s)}). \end{aligned} \quad (26)$$

Предполагается, что в правых частях уравнений (26) все функционалы $u_{k,i}^{(r)}$, $v_{k,i}^{(r)}$ с $k < 0$ должны быть положены равными нулю.

Можно показать, что все известные в настоящее время фермионные двумерные РТ-уравнения [3]–[7] могут быть получены из системы уравнений (26) в качестве подсистем при наложении дополнительных условий редукции. Мы называем уравнения (24) двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархией.

5. БИГАМИЛЬТОНОВА СТРУКТУРА ДВУМЕРНОЙ ФЕРМИОННОЙ (K, M) -РТ-ИЕРАРХИИ

В этом разделе мы применим R -матричный подход для построения бигамильтоновой структуры двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии. Данная иерархия определяется двумя операторами Лакса (23), принадлежащими к пространствам операторов (5), (6). Следуя работе [8], мы рассмотрим ассоциативную алгебру на пространстве прямых сумм двух разностных операторов

$$\mathfrak{g} := \mathbb{O}_{K_1}^+ \oplus \mathbb{O}_{K_2}^-. \quad (27)$$

Однако, в отличие от случая чисто бозонной двумерной РТ-иерархии, разностные операторы в прямой сумме (27) могут обладать как противоположной, так и одинаковой диагональной Z_2 -градуировкой. Оказывается, что скобка Пуассона может быть корректно определена лишь в последнем случае. Ниже мы ограничимся случаем, когда оба оператора в $\mathfrak{g}$ (27) имеют одинаковую диагональную четность.

Обозначим через (x^+, x^-) элементы такой алгебры $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}^\dagger$ с операцией умножения

$$(x_1^+, x_1^-) \cdot (x_2^+, x_2^-) = (x_1^+ x_2^+, x_1^- x_2^-) \quad (28)$$

и определим скалярное произведение следующим образом:

$$\langle (x^+, x^-) \rangle := \text{str}(x^+ + x^-), \quad (29)$$

где $x^+ \in \mathbb{O}_{K_1}^+$, $x^- \in \mathbb{O}_{K_2}^-$. Используя это определение, зададим скобки Пуассона в виде

$$\{f_1, f_2\} = \langle (\mathbb{O}_{K_1}^+, \mathbb{O}_{K_2}^-), [\nabla f_1, \nabla f_2]^\oplus \rangle, \quad (30)$$

где

$$[\nabla f_1, \nabla f_2]^\oplus := ([\nabla f_1^+, (\nabla f_2^+)^{*(d_{\nabla f_1^+})}], [\nabla f_1^-, (\nabla f_2^-)^{*(d_{\nabla f_1^-})}]),$$

f_k – функционалы на $\mathfrak{g}$ (27) и $\nabla f_k[(\mathbb{O}_{K_1}^+, \mathbb{O}_{K_2}^-)] = (\nabla f_k^+, \nabla f_k^-)$ – градиенты этих функционалов, которые могут быть найдены из определения

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_k[(\mathbb{O}_{K_1}^+, \mathbb{O}_{K_2}^-) + \epsilon(\delta\mathbb{O}_{K_1}^+, \delta\mathbb{O}_{K_2}^-)]}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} &= \langle (\delta\mathbb{O}_{K_1}^+, \delta\mathbb{O}_{K_2}^-), (\nabla f_k^+, \nabla f_k^-) \rangle = \\ &= \langle \delta\mathbb{O}_{K_1}^+, \nabla f_k^+ \rangle + \langle \delta\mathbb{O}_{K_2}^-, \nabla f_k^- \rangle. \end{aligned}$$

Для того чтобы получить нетривиальную гамильтонову динамику, нужно модифицировать скобки (30), используя R -матрицу:

$$[\nabla f_1, \nabla f_2]^\oplus \longrightarrow [\nabla f_1, \nabla f_2]_R^\oplus = [R(\nabla f_1), \nabla f_2]^\oplus + [\nabla f_1, R(\nabla f_2)]^\oplus.$$

R -матрица действует на пространстве (27) нетривиальным образом, перемешивая элементы двух подалгебр в прямой сумме между собой:

$$R(x^+, x^-) = (x_+^+ - x_-^+ + 2x_-^-, x_-^- - x_+^- + 2x_+^+), \quad (31)$$

что является ключевым моментом R -матричного подхода в двумерном случае [8]. Именно такая R -матрица позволяет найти две совместные пуассоновы структуры и переписать представление Лакса (24) в гамильтоновом виде. Действительно, данная R -матрица удовлетворяет градуированному модифицированному уравнению Янга–Бакстера

$$R([(x^+, x^-), (y^+, y^-)]_R) - [R(x^+, x^-), R(y^+, y^-)] = \alpha [(x^+, x^-), (y^+, y^-)] \quad (32)$$

с $\alpha = 1$. Прямая проверка подстановкой в (32) показывает, что антисимметричная часть

$$\frac{1}{2}(R(x^+, x^-) - R^\dagger(x^+, x^-)) = (x_{>0}^+ - x_{<0}^+ - x_0^-, x_{<0}^- - x_{>0}^- + x_0^+)$$

также удовлетворяет градуированному модифицированному уравнению Янга–Бакстера (32). Следовательно, в силу теоремы из раздела 3 на алгебре $\mathfrak{g}$ (27) существуют две пуассоновы структуры.

Используя формулы (21), (22), (28), (31) и циклические перестановки внутри суперследа (11), мы получаем следующий общий вид первой и второй скобок Пуассона:

$$\{f, g\}_i = \langle P_i^+(\nabla g^+, \nabla g^-), (\nabla f^+)^{*(d_{\nabla g})} \rangle + \langle P_i^-(\nabla g^+, \nabla g^-), (\nabla f^-)^{*(d_{\nabla g})} \rangle, \quad (33)$$

где $i = 1, 2$ и $d_{\nabla g} := d_{\nabla g^+} = d_{\nabla g^-}$. Для первой гамильтоновой структуры явный вид тензора Пуассона в выражении (33) найден для любых значений (K, M) :

$$\begin{aligned} P_1^+(\nabla g^+, \nabla g^-) &= [(\nabla g_-^- - \nabla g_-^+)^{*(K)}, (L_K^+)^{*(d_{\nabla g})}] - ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{\leq 0}, \\ P_1^-(\nabla g^+, \nabla g^-) &= [(\nabla g_+^+ - \nabla g_+^-)^{*(M)}, (L_M^-)^{*(d_{\nabla g})}] - ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{> 0}, \end{aligned}$$

тогда как в случае второй гамильтоновой структуры формула (33) верна только для четных значений (K, M) с тензором Пуассона

$$\begin{aligned} P_2^+(\nabla g^+, \nabla g^-) &= \\ &= \frac{1}{2} \left([(\nabla g^- (L_M^-)^{*(d_g)} + L_M^- \nabla g^- - \nabla g^+ (L_K^+)^{*(d_g)} - L_K^+ \nabla g^+)_-, (L_K^+)^{*(d_g)}] - \right. \\ &\quad \left. - L_K^+ ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{\leq 0} - ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{\leq 0} (L_K^+)^{*(d_g)} \right), \\ P_2^-(\nabla g^+, \nabla g^-) &= \\ &= \frac{1}{2} \left([(\nabla g^+ (L_K^+)^{*(d_g)} + L_K^+ \nabla g^+ - \nabla g^- (L_M^-)^{*(d_g)} - L_M^- \nabla g^-)_+, (L_M^-)^{*(d_g)}] - \right. \\ &\quad \left. - L_M^- ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{> 0} - ([L_K^+, \nabla g^+] + [L_M^-, \nabla g^-])_{> 0} (L_M^-)^{*(d_g)} \right). \end{aligned}$$

Скобки Пуассона для функций $u_{n,i}$ и $v_{n,i}$, параметризующих операторы Лакса (23), могут быть явно получены из (33), если принять во внимание, что

$$\begin{aligned} \nabla u_{n,\xi} &\equiv (\nabla u_{n,\xi}^+, \nabla u_{n,\xi}^-) = (e^{(n-K)\partial} (-1)^i \delta_{i,\xi}, 0), \\ \nabla v_{n,\xi} &\equiv (\nabla v_{n,\xi}^+, \nabla v_{n,\xi}^-) = (0, e^{(M-n)\partial} (-1)^i \delta_{i,\xi}). \end{aligned}$$

Таким образом можно получить следующие выражения:

$$\begin{aligned}
\{u_{n,i}, u_{m,j}\}_1 &= (-1)^j (\delta_{n,K}^- + \delta_{m,K}^- - 1) (u_{n+m-K,i} \delta_{i,j+n-K} - \\
&\quad - (-1)^{(m+K)(n+K+1)} u_{n+m-K,j} \delta_{i,j-m+K}), \\
\{u_{n,i}, v_{m,j}\}_1 &= (-1)^j \left[(\delta_{n,K}^- - 1) (v_{m-n+K,i} \delta_{i,j+n-K} - \right. \\
&\quad - (-1)^{(m+M)(n+K+1)} v_{m-n+K,j} \delta_{i,j+m-M}) - \\
&\quad - \delta_{m,M}^+ (u_{n-m+M,i} \delta_{i,j+n-K} - \\
&\quad \left. - (-1)^{(m+M)(n+K+1)} u_{n-m+M,j} \delta_{i,j+m-M}) \right], \\
\{v_{n,i}, v_{m,j}\}_1 &= (-1)^j (1 - \delta_{n,M}^+ - \delta_{m,M}^+) (v_{n+m-M,i} \delta_{i,j-n+M} - \\
&\quad - (-1)^{(m+M)(n+M+1)} u_{n+m-M,j} \delta_{i,j+m-M})
\end{aligned} \tag{34}$$

для первой гамильтоновой структуры и

$$\begin{aligned}
\{u_{n,i}, u_{m,j}\}_2 &= -(-1)^j \frac{1}{2} \left[u_{n,i} u_{m,j} (\delta_{i,j+n-K} - (-1)^m \delta_{i,j-m+K}) + \sum_{k=0}^{n+m} (\delta_{m,k}^+ - \delta_{m,k}^-) \times \right. \\
&\quad \times \left. ((-1)^{mk} u_{n+m-k,i} u_{k,j} \delta_{i,j+n-k} - (-1)^{m(n+k+1)} u_{k,i} u_{n+m-k,j} \delta_{i,j-m+k}) \right], \\
\{u_{n,i}, v_{m,j}\}_2 &= -(-1)^j \frac{1}{2} \left[u_{n,i} v_{m,j} (\delta_{i,j} + \delta_{i,j+n-K} - \right. \\
&\quad - (-1)^m (\delta_{i,j+m-M} + \delta_{i,j+n+m-K-M})) + \\
&\quad + 2 \sum_{k=\max(0,m-n)}^{m-1} (u_{n-m+k,i} v_{k,j+m-k} \delta_{i,j+n-K} - \\
&\quad \left. - (-1)^{(n+1)m} v_{k,j} u_{n-m+k,i+k-m} \delta_{i,j+m+M}) \right], \\
\{v_{n,i}, v_{m,j}\}_2 &= (-1)^j \frac{1}{2} \left[v_{n,i} v_{m,j} (\delta_{i,j-n+M} - (-1)^m \delta_{i,j+m-M}) - \right. \\
&\quad - \sum_{k=0}^{n+m} (\delta_{m,k}^+ - \delta_{m,k}^-) ((-1)^{mk} v_{n+m-k,i} v_{k,j} \delta_{i,j-n+k} - \\
&\quad \left. - (-1)^{m(n+k+1)} v_{k,i} v_{n+m-k,j} \delta_{i,j+m-k}) \right]
\end{aligned}$$

для второй гамильтоновой структуры, где

$$\delta_{n,m}^+ = \begin{cases} 1, & n > m, \\ 0, & n \leq m, \end{cases} \quad \delta_{n,m}^- = \begin{cases} 1, & n < m, \\ 0, & n \geq m. \end{cases}$$

Напомним, что вторая гамильтонова структура определена только для четных значений (K, M) .

Полученные гамильтоновы структуры обладают свойствами (13)–(15) с $d_{\mathbb{O}} = d_{L_K}^+ = d_{L_M}^-$. Используя эти свойства, можно переписать потоки иерархии (26) для

четных значений (K, M) в бигамильтоновом виде

$$D_s^\pm \begin{pmatrix} u_{n,i}^{(r)} \\ v_{n,i}^{(r)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{n,i}^{(r)} \\ v_{n,i}^{(r)} \end{pmatrix}, H_{s+1}^\pm \right\}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} u_{n,i}^{(r)} \\ v_{n,i}^{(r)} \end{pmatrix}, H_s^\pm \right\}_2,$$

с гамильтонианами

$$\begin{aligned} H_s^+ &= \frac{1}{s} \text{str}(L_K^+)_*^s = \frac{1}{s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i u_{sK,i}^{(s)}, \\ H_s^- &= \frac{1}{s} \text{str}(L_M^-)_*^s = \frac{1}{s} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (-1)^i v_{sM,i}^{(s)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Для нечетных значений (K, M) можно воспроизвести только бозонные потоки уравнений (26). В этом случае выражения (35) в силу соотношения (18) дают только фермионные ненулевые гамильтонианы, используя которые можно воспроизвести бозонные потоки посредством нечетной первой гамильтоновой структуры (34)

$$D_{2s}^\pm \begin{pmatrix} u_{n,i}^{(r)} \\ v_{n,i}^{(r)} \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} u_{n,i}^{(r)} \\ v_{n,i}^{(r)} \end{pmatrix}, H_{2s+1}^\pm \right\}_1.$$

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе мы обобщили R -матричный подход на случай Z_2 -градуированных операторов с инволюцией и показали, что на пространстве таких операторов существуют две пуассоновы структуры. Первая скобка Пуассона определена как для нечетных, так и для четных операторов с Z_2 -градуировкой, тогда как вторая найдена только для четных операторов. Показано, что свойства скобок Пуассона обеспечиваются свойствами обобщенной градуированной скобки. Далее, мы предложили широкий класс двумерных фермионных (K, M) -РТ-иерархий в терминах представления Лакса с обобщенной градуированной скобкой и применили развитый R -матричный формализм для построения бигамильтоновых структур предложенных иерархий. Для четных значений (K, M) получены как первая, так и вторая четные гамильтоновы структуры, и в этом случае все потоки двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии могут быть переписаны в бигамильтоновом виде. Для нечетных значений (K, M) найдена нечетная первая гамильтонова структура, и в этом случае только бозонные потоки двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии могут быть представлены в гамильтоновом виде с использованием фермионных гамильтонианов.

Таким образом, проблема гамильтонова описания фермионных потоков двумерной фермионной (K, M) -РТ-иерархии осталась открытой. Другими задачами, все еще требующими ответа, являются построение второй гамильтоновой структуры (если она существует) для нечетных операторов Лакса и гамильтоновых структур (если они существуют) для операторов Лакса L_K^+ и L_M^- с противоположными Z_2 -градуировками. Не менее важным является вопрос о взаимосвязи между предложенным в настоящей работе градуированным модифицированным уравнением Янга–

Бакстера (20) и градуированным классическим уравнением Янга–Бакстера, введенным в пионерской работе [14]. Все эти вопросы станут предметом дальнейших исследований.

Благодарности. Авторы благодарны А. П. Исаеву, П. П. Кулишу и А. А. Владимирову за полезные обсуждения. Данная работа была частично поддержана RFBR-DGF (грант № 04-02-04002), DFG (грант № 436 RUS 113/669-2), грантом НАТО PST.GLG.980302 и Программой Гейзенберга–Ландау.

Список литературы

- [1] *A. B. Михайлов.* Письма в ЖЭТФ. 1979. Т. 30. № 7. С. 443; *K. Ueno, K. Takasaki.* Adv. Stud. Pure Math. 1984. V. 4. P. 1.
- [2] *M. A. Olshanetsky.* Commun. Math. Phys. 1983. V. 88. P. 63; *D. A. Leites, M. V. Saveliev, V. V. Serganova.* Embeddings of $osp(1|2)$ and the associated nonlinear supersymmetric equations. In: Group Theoretical Methods in Physics (Yurmala, 1985). V. I. Eds. M. A. Markov, V. I. Manko, V. V. Dodonov. Utrecht: VNU Sci. Press, 1986. P. 255; *B. A. Андреев.* ТМФ. 1987. Т. 72. № 1. С. 112.
- [3] *K. Ikeda.* Lett. Math. Phys. 1987. V. 14. P. 321; *J. Evans, T. Hollowood.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 723; *O. Lechtenfeld, A. Sorin.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 557. P. 535; *J. Nonlinear Math. Phys.* 2001. V. 8. P. 183; 2004. V. 11. P. 294.
- [4] *V. G. Kadyshesky, A. S. Sorin.* Supersymmetric Toda lattice hierarchies. In: Integrable Hierarchies and Modern Physical Theories. Eds. H. Aratyn, A. S. Sorin. Dordrecht–Boston–London: Kluwer, 2001. P. 289; nlin.SI/0011009.
- [5] *V. V. Gribanov, V. G. Kadyshesky, A. S. Sorin.* Czech. J. Phys. 2004. V. 54. P. 1289.
- [6] *V. V. Gribanov, V. G. Kadyshesky, A. S. Sorin.* Discrete Dyn. Nat. Soc. 2004. V. 2004. № 1. P. 113.
- [7] *V. B. Derjagin, A. N. Leznov, A. Sorin.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 527. P. 643.
- [8] *G. Carlet.* The Hamiltonian structures of the two-dimensional Toda lattice and R-matrices. math-ph/0403049.
- [9] *B. Г. Кадышевский, А. С. Сорин.* ТМФ. 2002. Т. 132. № 2. С. 222; nlin.SI/0206044.
- [10] *H. Aratyn, K. Bering.* Int. J. Mod. Phys. A. 2005. V. 20. P. 1367; nlin.SI/0402014.
- [11] *М. А. Семенов-Тянь-Шанский.* Функц. анализ и его прилож. 1983. Т. 17. С. 17.
- [12] *C. M. Yung.* Mod. Phys. Lett. 1993. V. 8. P. 129.
- [13] *W. Oevel, O. Ragnisco.* Physica A. 1989. V. 161. P. 181; *L. Ch. Li, S. Parmenter.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 125. P. 545.
- [14] *П. П. Кулиш, Е. К. Склянин.* Зап. научн. семин. ЛОМИ. 1980. Т. 95. С. 129.