Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. П. Пронько, Солитон в гравитирующем газе. Объект Хога, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 103–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2012>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 03:28:26

© 2006 г.

Г. П. Пронько*

СОЛИТОН В ГРАВИТИРУЮЩЕМ ГАЗЕ. ОБЪЕКТ ХОГА

Исследуется возможность возникновения солитонов в гравитирующем газе. Показано, что рассуждения типа теоремы вириала не создают препятствия для существования статических локализованных решений. Простейший тороидальный солитон в гравитирующем газе может быть использован для объяснения формы замечательной галактики, названной объект Хога.

Ключевые слова: солитон, гравитирующий газ, кольцевые галактики.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] мы рассмотрели гамильтонов формализм для жидкости и газа, основанный на описании Лагранжа. В этой работе было отмечено, что помимо других преимуществ, лагранжево описание (которое использует траектории частиц в жидкости (газе) как динамические переменные) очень удобно для введения взаимодействия. В частности, в [1] было продемонстрировано, как введение электромагнитного взаимодействия частиц жидкости (газа) приводит к описанию плазмы. В настоящей работе мы собираемся аналогичным образом рассмотреть теорию газа частиц, взаимодействующих посредством ньютоновского потенциала. Такая система может служить моделью для описания движения звезд в галактиках в случае, когда гравитационное взаимодействие превалирует над всеми остальными. Число звезд в типичной галактике обычно достигает порядка 10^{13} – 10^{14} , поэтому разумно рассматривать такую систему как газ.

Простейшая система, которая обычно используется для численного моделирования галактик, описывается гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{p}_i^2}{2m_i} - \gamma \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|},$$

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия. E-mail: pronko@ihep.ru

где $\vec{x}_i$, $\vec{p}_i$ – канонические координаты и импульсы частиц (звезд) с массами m_i . В модели, которую мы собираемся рассмотреть, предполагается, что имеет место условие $m_i = m$, когда $N \rightarrow \infty$. В этом пределе возникает естественное желание перейти к непрерывному распределению частиц, как это делается в теории жидкости или газа [2].

Очевидно, что притягивающий гравитационный потенциал приводит к существенной разнице свойств такой среды по сравнению с обычным газом. Так, потенциальная часть гамильтониана стремится сжать “газ”, в то время как кинетическая старается предотвратить коллапс. Такое соперничество зачастую приводит к возникновению стационарного решения – солитона. Важно отметить, что солитоны в жидкости и газе отличаются от солитонов, которые известны в физике частиц. Солитоны в жидкости и газе обладают статическими полями скоростей и плотности, в то время как частицы, составляющие ту или иную среду, двигаются. Простейшим примером такого рода является торнадо.

2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

В механике жидкости (газа) существуют две разные картины описания. Первая, обычно называемая эйлеровской, использует в качестве динамических переменных поле скоростей и плотность. Во второй, лагранжевой, в этом качестве выступают координаты частиц $\vec{x}(\xi_i, t)$, составляющих жидкость (газ), нумеруемые параметрами ξ_i , которые можно рассматривать как начальные положения частиц $\vec{\xi} = \vec{x}(\xi_i, t = 0)$. Начальные положения $\vec{\xi}$, также как и координаты $\vec{x}(\xi_i, t)$ во все последующие моменты времени, принадлежат к одной и той же области $D \subseteq \mathbb{R}^3$. Поскольку в дальнейшем мы будем рассматривать консервативные системы, и число частиц не будет меняться со временем, удобно считать, что функции $\vec{x}(\xi_i, t)$ определяют некоторый диффеоморфизм $D \subseteq \mathbb{R}^3$, и обратные функции $\vec{\xi}(x_i, t)$ в этом случае всегда существуют:

$$\begin{aligned} x_j(\xi_i, t) \big|_{\vec{\xi}=\vec{\xi}(x_i, t)} &= x_j, \\ \xi_j(x_i, t) \big|_{\vec{x}=\vec{x}(\xi_i, t)} &= \xi_j. \end{aligned} \quad (1)$$

Плотность частиц в пространстве в момент времени t задается следующим соотношением:

$$\rho(\vec{x}, t) = \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)), \quad (2)$$

где $\rho_0(\xi)$ есть начальная плотность в момент $t = 0$. Поле скоростей $\vec{v}$ как функция координат $\vec{x}$ и времени t при этом запишется так:

$$\vec{v}(x_i, t) = \dot{\vec{x}}(\vec{\xi}(x_i, t), t), \quad (3)$$

где $\vec{\xi}(x, t)$ есть обратная функция, заданная в (1). Скорость также удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\vec{v}(x_i, t) = \frac{\int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))}{\int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t))} \quad (4)$$

или

$$\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) = \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)). \quad (5)$$

Вычислим временную производную плотности, пользуясь ее определением (2):

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(x_i, t) &= \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = \\ &= \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) (-\dot{\vec{x}}(\xi_i, t)) \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = \\ &= -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) = -\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t). \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, мы установили, что уравнение неразрывности для эйлеровских переменных следует из их определения через лагранжевы:

$$\dot{\rho}(x_i, t) + \vec{\partial}(\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t)) = 0. \quad (7)$$

Используя координаты $\vec{x}(\xi_i, t)$, мы можем рассмотреть простейшее движение жидкости, описываемое лагранжианом

$$L = \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \frac{m \dot{\vec{x}}^2(\xi_i, t)}{2}. \quad (8)$$

Этому лагранжиану отвечают уравнения движения

$$m \ddot{\vec{x}}(\xi_i, t) = 0. \quad (9)$$

Для того чтобы найти, что означают эти уравнения в терминах скоростей и плотности, продифференцируем обе части равенства (5) по времени:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) &= \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \ddot{\vec{x}}(\xi_i, t) \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)) + \\ &+ \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \dot{\vec{x}}(\xi_i, t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\vec{x} - \vec{x}(\xi_i, t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Первый член в правой части последнего равенства равен нулю вследствие уравнений движения (9). Преобразуя второй член также, как мы делали при выводе (6), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t) v_k(x_i, t)) = 0. \quad (11)$$

Перепишем это уравнение в следующем виде:

$$\vec{v}(x_i, t) \left[\dot{\rho}(x_i, t) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\rho(x_i, t) v_k(x_i, t)) \right] + \rho(x_i, t) \left[\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) \right] = 0. \quad (12)$$

Первое выражение в квадратных скобках равно нулю в силу уравнений неразрывности, а второе дает уравнение Эйлера для свободного движения:

$$\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) = 0. \quad (13)$$

Для того чтобы получить уравнения Эйлера для жидкости или газа с внутренним давлением, нужно добавить к лагранжиану (8) “потенциальную” часть, как это было показано в [1]. Эта “потенциальная” часть описывает отталкивающее взаимодействие между частицами, составляющими среду (газ или жидкость). Как было обещано во введении, в данной работе мы собираемся ввести иное взаимодействие между частицами – гравитационное притяжение. Для этого мы модифицируем лагранжиан (8) следующим образом:

$$L = \int d^3\xi \rho_0(\xi_i) \frac{m\dot{\vec{x}}^2(\xi_i, t)}{2} + \frac{\gamma}{2} \int d^3\xi d^3\xi' \frac{\rho_0(\xi_i)\rho_0(\xi'_i)}{|\vec{x}(\xi_i, t) - \vec{x}(\xi'_i, t)|}, \quad (14)$$

где γ обозначает гравитационную постоянную. Уравнения движения, отвечающие лагранжиану (14), имеют вид

$$m\ddot{\vec{x}}(\xi_i, t) + \gamma \int d^3\xi' \rho_0(\xi'_i) \frac{\vec{x}(\xi_i, t) - \vec{x}(\xi'_i, t)}{|\vec{x}(\xi_i, t) - \vec{x}(\xi'_i, t)|^3} = 0. \quad (15)$$

Переводя эти уравнения на язык эйлеровских переменных, как это делалось выше, мы приходим к следующей системе, включающей уравнения неразрывности:

$$\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) = \frac{\gamma}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int d^3y \frac{\rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \quad (16)$$

$$\dot{\rho}(x_i, t) + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\rho(x_i, t) \vec{v}(x_i, t)) = 0. \quad (17)$$

Заметим, что правая часть уравнения (16) в случае обычного газа или жидкости выражается через внутреннее давление $p(x_i)$, и мы имеем

$$\dot{\vec{v}}(x_i, t) + v_k(x_i, t) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i, t) = -\frac{1}{\rho(x_i)} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} p(x_i). \quad (18)$$

Набор уравнений (16), (17) определяет эволюцию начальных данных $\rho(x_i, t_0)$, $\vec{v}(x_i, t_0)$ гравитирующего газа и может быть использован для нахождения статических конфигураций при разных граничных условиях. В частности, мы можем исследовать возможность существования изолированных статических конфигураций гравитирующего газа. Под изолированной конфигурацией мы понимаем здесь конфигурацию, плотность которой $\rho(x_i)$ стремится к нулю на бесконечности. Заметим, что для обычной жидкости, газа и плазмы решения такого типа запрещены теоремой вириала, известной в теории плазмы также как теорема Шафранова [3], [4]. Для жидкости (газа), описываемой уравнениями (18), эта теорема может быть доказана

следующим образом. Сначала, используя уравнение неразрывности, перепишем (18) для статического случая:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} [\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_j) + \delta_{jk} p(x_i)] = 0. \quad (19)$$

Интегрируя по $\mathbb{R}^3$, мы получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^3 x x_j \frac{\partial}{\partial x_k} [\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_j) + \delta_{jk} p(x_i)] = \\ &= \int d^3 x \frac{\partial}{\partial x_k} (x_j [\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_j) + \delta_{jk} p(x_i)]) - \\ &\quad - \int d^3 x \delta_{jk} [\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_j) + \delta_{jk} p(x_i)]. \end{aligned} \quad (20)$$

Для обычных жидкостей и газов $\rho(x_i) \sim \rho^\gamma(x_i)$, $\gamma > 0$, поэтому интеграл от дивергенции равен нулю для изолированного решения такого, что $\rho(x_i) \rightarrow 0$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, и мы приходим к следующему соотношению:

$$\int d^3 x [\rho(x_i) \vec{v}^2(x_j) + 3p(x_i)] = 0. \quad (21)$$

Очевидно, что это соотношение удовлетворяется только в случае $\rho(x_i) = 0$, иными словами, для обычных сред не существует статических изолированных решений уравнения (18), отличных от тривиального. Для того чтобы получить нетривиальные статические решения уравнения (18), необходимо заменить граничное условие $\rho(x_i) \rightarrow 0$ условием $\rho(x_i) \rightarrow \rho_{\text{as}}$, где ρ_{as} есть асимптотическая постоянная плотность.

Теперь мы покажем, что теорема, аналогичная доказанной выше, в случае гравитирующего газа не препятствует существованию изолированных решений. Для этого мы опять преобразуем уравнения движения (16) для статического случая, используя уравнение неразрывности, к следующему виду:

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_i)) - \frac{\gamma}{m} \rho(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 y \frac{\rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 0. \quad (22)$$

Интегрируя по $\mathbb{R}^3$, получаем

$$\int d^3 x x_k \left[\frac{\partial}{\partial x_j} (\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_i)) - \frac{\gamma}{m} \rho(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 y \frac{\rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} \right] = 0. \quad (23)$$

Рассмотрим первый член подынтегрального выражения в левой части равенства. Интегрируя по частям, как в предыдущем случае, и учитывая асимптотические условия для $\rho(x_i)$, получаем

$$\int d^3 x x_k \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho(x_i) v_k(x_i) v_j(x_i)) = - \int d^3 x \rho(x_i) \vec{v}^2(x_i). \quad (24)$$

Прямое интегрирование второго слагаемого в подынтегральном выражении (23) дает

$$- \frac{\gamma}{m} \int d^3 x x_k \rho(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \int d^3 y \frac{\rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{\gamma}{2m} \int d^3 x d^3 y \frac{\rho(x_i) \rho(y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (25)$$

Таким образом, из уравнения (23) мы получаем

$$\int d^3x \rho(x_i) \vec{v}^2(x_i) - \frac{\gamma}{2m} \int d^3x d^3y \frac{\rho(x_i) \rho(y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = 0. \quad (26)$$

Очевидно, что это соотношение может выполняться для нетривиальных конфигураций $\rho(x_i)$, $\vec{v}(x_i)$. Функционал энергии, соответствующий лагранжиану (14), имеет следующий вид:

$$E = \frac{m}{2} \int d^3x \rho(x_i, t) \vec{v}^2(x_i, t) - \frac{\gamma}{2} \int d^3x d^3y \frac{\rho(x_i, t) \rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (27)$$

Здесь первое и второе слагаемые имеют интерпретацию кинетической энергии T и потенциальной энергии U , соответственно. Соотношение (23) выражает известную теорему вириала [5]:

$$2T = -U. \quad (28)$$

Заметим, что в теореме вириала данное уравнение выполняется для средних по времени значений кинетической и потенциальной энергий, а в нашем случае речь идет о статических конфигурациях, которые не нужно усреднять.

Используя соотношение (28), мы можем написать следующее выражение для полной энергии статической конфигурации гравитирующего газа:

$$E_{\text{static}} = -\frac{m}{2} \int d^3x \rho(x_i) \vec{v}^2(x_i) = -\frac{\gamma}{4} \int d^3x d^3y \frac{\rho(x_i, t) \rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (29)$$

Таким образом, энергия статического решения отрицательна, как и для связанного состояния в проблеме Кеплера.

3. СВОЙСТВА СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Уравнения, определяющие статические конфигурации гравитационного газа, имеют следующую форму:

$$\begin{aligned} v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) &= \frac{\gamma}{m} \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \int d^3y \frac{\rho(y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|}, \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\rho(x_i) \vec{v}(x_i)) &= 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Вычисляя дивергенцию первого уравнения,

$$\vec{\partial} \left(v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) \right) = \frac{\gamma}{m} \Delta \int d^3y \frac{\rho(y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|} = \frac{\gamma}{m} (-4\pi) \rho(x_i), \quad (31)$$

мы можем записать систему уравнений (30) в локальной форме

$$\begin{aligned} \vec{\partial} \left(v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) \right) &= -4\pi \frac{\gamma}{m} \rho(x_i), \\ \frac{\partial}{\partial \vec{x}} (\rho(x_i) \vec{v}(x_i)) &= 0, \\ \vec{\partial} \times \left(v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) \right) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

где последнее уравнение гарантирует, что выражение

$$v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) \quad (33)$$

является градиентом.

Сейчас мы получим важное неравенство, ограничивающее $-E_{\text{static}}$ любого статического решения системы (32) снизу. Для этого введем обозначение

$$U(x_i) = - \int d^3 y \frac{\rho(y_i)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (34)$$

Интегрируя по частям, получаем, что

$$\int d^3 x (\vec{\partial} U(x_i))^2 = 4\pi \int d^3 x d^3 y \frac{\rho(x_i, t) \rho(y_i, t)}{|\vec{x} - \vec{y}|}. \quad (35)$$

Используя это соотношение, мы можем переписать выражение для энергии (29) на решениях уравнений (32) в следующей форме:

$$E_{\text{static}} = - \frac{\gamma}{16\pi} \int d^3 x (\vec{\partial} U(x_i))^2. \quad (36)$$

Подставляя в (36) градиент потенциала $U(x_i)$ из первого уравнения (30), мы получим выражение для E_{static} только через поле скоростей:

$$E_{\text{static}} = - \frac{m^2}{16\pi\gamma} \int d^3 x \left(v_k(x_i) \frac{\partial}{\partial x_k} \vec{v}(x_i) \right)^2. \quad (37)$$

Эта форма наиболее удобна для вывода желаемого неравенства. Рассмотрим функцию $f(x_i)$ из гильбертова пространства W_2^1 , состоящего из всех измеримых функций на $\mathbb{R}^3$, которые имеют по крайней мере одну производную и квадратично интегрируемы вместе со своими производными. В частности, мы будем предполагать, что плотность $\rho(x_i) \in W_2^1$. Учитывая уравнение (31), имеем

$$\begin{aligned} \left| \int d^3 x \rho(x_i) f(x_i) \right| &= \left| \frac{m}{4\pi\gamma} \int d^3 x f(x_i) \partial_k (v_j(x_i) \partial_j v_k(x_i)) \right| = \\ &= \left| \frac{m}{4\pi\gamma} \int d^3 x \partial_k f(x_i) v_j(x_i) \partial_j v_k(x_i) \right| \leq \\ &\leq \frac{m}{4\pi\gamma} \left(\int d^3 x (\partial_k f(x_i))^2 \right)^{1/2} \left(\int d^3 x (v_j(x_i) \partial_j v_k(x_i))^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (38)$$

где на последнем шаге мы использовали неравенство Коши. Отсюда мы немедленно получаем неравенство

$$-E_{\text{static}} \geq \pi\gamma \frac{\left(\int d^3 x \rho(x_i) f(x_i) \right)^2}{\int d^3 x (\partial_k f(x_i))^2}, \quad (39)$$

которое справедливо для любой $f(x_i) \in W_2^1$ и равенство в котором достигается при $f(x_i) = U(x_i)$. Действительно, вычисляя вариационную производную по $f(x_i)$ от функционала в правой части (39), имеем

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(x_i)} \frac{\left(\int d^3x \rho(x_i) f(x_i) \right)^2}{\int d^3x (\partial_k f(x_i))^2} = \\ = 2 \frac{\left(\int d^3x \rho(x_i) f(x_i) \right)^2}{\int d^3x (\partial_k f(x_i))^2} \left[\frac{\rho(x_i)}{\int d^3x \rho(x_i) f(x_i)} + \frac{\Delta f(x_i)}{\int d^3x (\partial_k f(x_i))^2} \right]. \end{aligned} \quad (40)$$

Эта производная равна нулю при $f(x_i) = f_{\max}(x_i)$, где

$$f_{\max}(x_i) = C \Delta^{-1} \rho(x_i) = C' U(x_i), \quad (41)$$

C и C' – несущественные константы, не входящие в функционал. Нетрудно показать, что вторая вариация этого функционала отрицательна при $f(x_i) = f_{\max}(x_i)$, поэтому эта функция дает абсолютный максимум функционала. Благодаря уравнениям (35)–(37) значение максимума совпадает с левой частью неравенства (39). Однако, функция $f_{\max}(x_i)$ не принадлежит пространству W_2^1 , поскольку потенциал $U(x_i)$ имеет асимптотическое поведение $|\vec{x}|^{-1}$ на бесконечности и, следовательно, не является квадратично интегрируемым. Интеграл J , который входит в неравенство (39), может быть записан в следующей форме:

$$J = \int d^3x \rho(x_i) f_N(x_i), \quad (42)$$

где через $f_N(x_i)$ мы обозначили нормированную функцию $f(x_i)$:

$$f_N(x_i) = \frac{f(x_i)}{\sqrt{\int d^3x (\partial_k f(x_i))^2}} = \frac{f(x_i)}{\|\partial_k f(x_i)\|_2}. \quad (43)$$

В пространстве W_2^1 справедливо неравенство Гельдера

$$\left| \int d^3x f(x_i) g(x_i) \right| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad (44)$$

а также замечательное неравенство Ладыженской [6]:

$$\|f\|_6 \leq (48)^{1/6} \|\partial_k f\|_2. \quad (45)$$

Здесь мы использовали стандартные обозначения:

$$\|f\|_p = \left(\int d^3x f(x_i)^p \right)^{1/p}, \quad \|\partial_k f\|_p = \left(\int d^3x |\partial_k f(x_i)|^p \right)^{1/p}$$

Из этих двух неравенств мы получаем следующее ограничение для интеграла J :

$$|J| \leq (48)^{1/6} \|\rho\|_{6/5} \quad (46)$$

Несколько наивным образом это неравенство можно интерпретировать как ограничение величины $-E_{\text{static}}$ снизу подходящей нормой плотности. Действительно, абсолютный максимум функционала $|J|$ должен быть больше или равен его максимальному значению в некоторой ограниченной области, например в W_2^1 , определяемому неравенством (46). Однако мы не можем строго обосновать это утверждение.

Другим важным свойством любых конфигураций газа или жидкости является существование топологического заряда, “спиральности” (или инварианта Хопфа), явный вид которого дается выражением

$$q = \int d^3x \vec{v}(x_i) \text{rot } \vec{v}(x_i). \quad (47)$$

Этот функционал является не только интегралом движения уравнений (16), но и аннулятором скобок Пуассона $(\vec{v}(x_i), \rho(x_i))$ [1]. Существование такого объекта дает дополнительные основания стабильности солитонов. Важная роль этого функционала в случае солитонов в плазме обсуждалась в работах [7], [8]. Более того, в [9] было показано, что существует неравенство, ограничивающее снизу энергию солитона в плазме $q^{3/4}$. Получение такого неравенства для гравитационного солитона (и вообще для солитонов в жидкости и газе) крайне желательно, и мы рассмотрим эту задачу в будущих публикациях.

4. О ВОЗМОЖНОЙ СТРУКТУРЕ СТАТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

Уравнения (32), которые определяют статические конфигурации гравитирующего газа, являются трехмерными уравнениями в частных производных, и возможность нахождения явных решений довольно мала. Единственный случай, где в подобной ситуации был найден класс решений – это монополюс Хоофта–Полякова, но там требование сферической симметрии существенно упростило задачу. В нашем случае мы не можем ожидать сферической симметрии решений, поскольку уравнение неразрывности требует замкнутости траекторий частиц газа, для того чтобы обеспечить статичность конфигурации $\vec{v}(x_i), \rho(x_i)$. Простейшая и наиболее симметричная конфигурация, которую мы можем ожидать в нашем случае, – это тороидальная структура, с плотностью, сконцентрированной в окрестности оси тороида, и скоростью, касательной к вложенным друг в друга тороидальным поверхностям. Это не первый случай, когда тороидальный солитон возникает в контексте непрерывной среды. Начиная с пионерских работ Кельвина в XIX в. и до настоящего времени этот вопрос изучался как математиками, так и физиками, и недавно интерес к нему был привлечен работами Фаддеева и Ниemi [7], [8].

Очевидно, что в случае притягивающего гравитационного взаимодействия частицы, которые составляют газ, двигаются вокруг области с большей плотностью (как планеты вокруг Солнца), поэтому если мы устремим радиус торического кольца к бесконечности, то должны получить цилиндрическую конфигурацию коллективного

движения. Действительно, рассмотрим такое аксиально-симметричное решение (32) типа торнадо. Введем параметризацию

$$\vec{v}(x_i) = v(r) \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0 \right), \quad \rho(x_i) = \rho(r), \quad (48)$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Для такой параметризации второе и третье уравнения системы (32) удовлетворяются, в то время как первое приводит к уравнению

$$\frac{1}{r} \partial_r v(r)^2 = 4\pi \frac{\gamma}{m} \rho(r). \quad (49)$$

Это равенство показывает, что плотность остается произвольной функцией (что характерно для уравнений в частных производных), а скорость возрастает с радиусом до своего асимптотического значения. Последнее обстоятельство есть следствие приближения: здесь мы в действительности имеем двумерный потенциал $\ln r$ вместо кулоновского r^{-1} . Этот пример демонстрирует, что частицы, составляющие гравитационный газ, в своем коллективном движении формируют локализованный объект.

Традиционный способ параметризации скорости в жидкости и газе с помощью потенциалов Клебша был предложен в [10] и недавно обсуждался в [11]. В общем случае эта параметризация имеет следующий вид:

$$\vec{v}(x_i) = f(x_i) \vec{\partial} g(x_i) + \vec{\partial} h(x_i), \quad (50)$$

где $f(x_i)$, $g(x_i)$, $h(x_i)$ – скалярные функции. Для тороидальной конфигурации с осью симметрии, направленной по z , мы можем предположить, что плотность $\rho(x_i)$ не зависит от азимутального угла, и записать параметризацию Клебша в виде

$$\vec{v}(x_i) = \cos \alpha(r, z) \vec{\partial} \beta(r, z) + k \vec{\partial} \phi(x_i), \quad (51)$$

где r , z , ϕ – цилиндрические координаты,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi(x_i) = \arctg \frac{y}{x}.$$

В гидродинамике параметризация (51) имеет интересную механическую интерпретацию, которую мы не будем обсуждать здесь. Функционал “спиральности” имеет следующий вид:

$$q = \int k d\phi(x_i) \wedge d \cos \alpha(r, z) \wedge d\beta(r, z) = 2\pi k \int d \cos \alpha(r, z) \wedge d\beta(r, z). \quad (52)$$

Функция $\beta(r, z)$ в (51) должна иметь сингулярность в точке $(r_c, 0)$ в полуплоскости (r, z) , где r_c – радиус оси тора, поскольку при обходе вокруг $(r_c, 0)$ эта функция должна испытывать приращение $2\pi^1$. Градиент такой функции является вектором, касательным к тороидальной поверхности. Добавление к скорости градиента

¹⁾Сравните параметризацию (51) с подобной параметризацией динамических переменных в [8] для случая плазмы

Эта фотография, сделанная с помощью Hubble Space Telescope в июле 2001, обнаруживает необычные детали объекта Хога и может привести к лучшему его пониманию. Объект Хога простирается на 120 тыс. световых лет и находится на расстоянии около 600 миллионов световых лет от Земли в направлении созвездия Змеи.

азимутального угла ϕ приводит к намотке скорости (51) также в азимутальном направлении. Описанная параметризация поля скоростей приводит к нетривиальному инварианту Хопфа, характеризующему класс гомотопии $\pi_3(S^2)$. Описанные таким образом параметры Клебша вместе с плотностью $\rho(x_i)$ могут быть найдены численным интегрированием уравнений (32).

Конструкция, которую мы описали и обсудили выше, была бы неполна и слишком академична без примера галактики, действительно демонстрирующей тороидальную структуру. К счастью, такая галактика существует. Она была открыта в 1950 г. астрономом Хогом и недавно очень хорошие фотографии были получены с помощью телескопа Хаббл (см рисунок). На этой фотографии отчетливо видна тороидальная структура, и более того, похоже, что расположение звезд в ней довольно близко к тому, что мы ожидали бы для конфигурации с нетривиальным функционалом “спиральности”. В галерее галактик, доступных на сайтах <http://www.astronomy.com> или <http://hubblesite.org> можно найти и другие примеры, более или менее близкие к тороиду, однако объект Хога является лучшим из них. Эти примеры показывают, что модель, которую мы рассмотрели, может оказаться не совсем тривиальной и способна объяснить и более сложные структуры типа спиральных галактик.

Благодарности. Автор благодарен профессорам А.К. Лиходеду и А.В. Разумову за ценные обсуждения. Фотография объекта Хога стала доступна благодаря любезности Space Telescope Science Institute. Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (грант № 04-01-00352), Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1303.2003.2) и ИНТАС (грант № 04-01-00352).

Список литературы

- [1] *И. Антонио, Г. П. Пронько.* ТМФ. 2004. Т. 141. № 3. С. 1670; hep-th/0106119.
- [2] *B. Semelin, N. Sanchez, H. J. De Vega.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 084005.
- [3] *В. Д. Шафранов.* Равновесие плазмы в магнитном поле. В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 2. Ред. М. А. Леонтович. М.: Госатомиздат, 1963. С. 92.
- [4] *L. D. Faddeev, L. Freyhult, A. J. Niemi, P. Rajan.* J. Phys. A. 2002. V. 35. P. L133.
- [5] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Курс теоретической физики. Т. 1. М.: Наука, 1968.
- [6] *О. А. Ладыженская.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970.
- [7] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Toroidal Configurations as stable soliton. hep-th/9705176.
- [8] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 85. P. 3416; physics/0003083.
- [9] *А. Ф. Вакуленко, Л. В. Капитанский.* ДАН СССР. 1979. Т. 248. С. 810.
- [10] *A. Clebsh.* J. Reine Angew. Math. 1859. V. 56. P. 1.
- [11] *S. Deser, R. Jackiw, A. Polychronakos.* Phys. Lett. A. 2001. V. 279. P. 151; physics/0006056.