Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Геман, А. Сил, XX -предел и предел Изинга в интегральных формулах для корреляционных функций XXZ -цепочки при конечной температуре, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 146–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2015>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 16:43:23

© 2006 г.

Ф. Гёман*, А. Сил*

XX-ПРЕДЕЛ И ПРЕДЕЛ ИЗИНГА В ИНТЕГРАЛЬНЫХ ФОРМУЛАХ ДЛЯ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ XXZ-ЦЕПОЧКИ ПРИ КОНЕЧНОЙ ТЕМПЕРАТУРЕ

Рассмотрено представление в виде кратного интеграла однопараметрической производящей функции для корреляционных функций S^z – S^z антиферромагнитной XXZ -цепочки спина $1/2$ при конечной температуре в XX -пределе и в пределе Изинга. Показано, как в этих пределах кратные интегралы превращаются в однократные, воспроизводя известные результаты.

Ключевые слова: квантовая спиновая цепочка, точные корреляционные функции при конечной температуре, XX -модель.

1. ВВЕДЕНИЕ

Антиферромагнитная XXZ -цепочка спина $1/2$ с гамильтонианом

$$H = J \sum_{j=1}^L (\sigma_{j-1}^x \sigma_j^x + \sigma_{j-1}^y \sigma_j^y + \Delta (\sigma_{j-1}^z \sigma_j^z - 1)) \quad (1)$$

является редким исключением даже среди моделей, решаемых при помощи анзаца Бете и связанных с уравнением Янга–Бакстера, в том смысле, что о ее корреляционных функциях многое известно точно. Источником поразительного прогресса, достигнутого за прошедшее десятилетие, стал вывод так называемого представления в виде кратного интеграла для матрицы плотности этой модели [1]. Следующими ключевыми работами стали статья [2], где результаты работ [1] были выведены заново при помощи алгебраического анзаца Бете и обобщены (в модель включено ненулевое продольное магнитное поле), статья [3], в которой фактически впервые были посчитаны некоторые кратные интегралы, и статья [4], где был разработан анзац для явного вида специального элемента матрицы плотности в случае неоднородной изотропной модели.

*Fachbereich C – Physik, Bergische Universität Wuppertal, Wuppertal, Germany. E-mail: goehmann@physik.uni-wuppertal.de, seel@physik.uni-wuppertal.de

Предложенные в этих работах идеи получили дальнейшее развитие во многих более поздних работах. Была установлена связь анзаца, предложенного в работе [4] для неоднородного обобщения корреляционных функций, с q -уравнением Книжника–Замолотчикова, анзац был обобщен на случай общего элемента матрицы плотности и, наконец, доказан (см. [5] и цитируемую там литературу). Техника работы [3] получила дальнейшее развитие, в ряде конкретных примеров были вычислены корреляционные функции XXZ -цепочки на малых расстояниях, (см., например [6]). В рамках основанного на использовании анзаца Бете подхода были построены интегральные представления для корреляционных функций, отличных от элементов матрицы плотности [7], была успешно решена важная задача суммирования элементов матрицы плотности для двухточечных функций [8] и предложены представления в виде кратных интегралов для зависящих от времени корреляционных функций [9].

Сочетая основанный на использовании анзаца Бете подход с техникой, основанной на использовании квантовой трансфер-матрицы [10], [11], авторы совместно с Клюмпером вывели представления в виде кратных интегралов для корреляционных функций при конечной температуре [12] и для элементов матрицы плотности [13], [14].

Данная статья представляет собой часть программы по исследованию свойств корреляционных функций при конечной температуре на основе их представлений в виде кратных интегралов. На данный момент кратные интегралы уже доказали свою эффективность для получения высокотемпературных разложений корреляционных функций [15]; также были построены численные оценки интегралов в простейшем нетривиальном случае трех узлов решетки [16]. Здесь мы покажем, как кратные интегралы сводятся к однократным в XX -пределе и пределе Изинга. Поскольку речь идет о XX -пределе, наше рассмотрение во многом идет параллельно случаю нулевой температуры, рассмотренному в работе [17].

Настоящая работа организована следующим образом. Во втором разделе еще раз рассматривается представление в виде кратного интеграла однопараметрической производящей функции [18] для корреляционных функций S^z – S^z бесконечной XXZ -цепочки [12], которое обобщает формулу работы [7] на случай конечной температуры. Далее в двух отдельных разделах рассматриваются XX -предел и предел Изинга. В конце приведены краткие выводы.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ

Исходным пунктом наших рассуждений в последующих двух разделах будет представление в виде кратного интеграла однопараметрической производящей функции для корреляционных функций S^z – S^z , полученное в [12]. Эта однопарамет-

рическая производящая функция представляет собой среднее по температуре:

$$\Phi(\varphi|m) = \left\langle \exp \left\{ \varphi \sum_{j=1}^m e_{j2}^2 \right\} \right\rangle_{T,h}, \quad (2)$$

где $e_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, и h обозначает величину продольного магнитного поля. Функция $\Phi(\varphi|m)$ порождает ряд интересных корреляционных функций. Мы будем рассматривать двухточечную функцию

$$\langle S_1^z S_m^z \rangle_{T,h} = \frac{1}{4} (2D_m^2 \partial_\varphi^2 - 4D_m \partial_\varphi + 1) \Phi(\varphi|m) \Big|_{\varphi=0} \quad (3)$$

и так называемую вероятность образования пустоты

$$P_\uparrow(m) = \lim_{\varphi \rightarrow -\infty} \Phi(\varphi|m) = \left\langle \prod_{j=1}^m e_{j1}^1 \right\rangle_{T,h}, \quad (4)$$

которая представляет собой вероятность обнаружить ферромагнитную струну длины m в равновесном состоянии с температурой T и магнитным полем h и является специальным матричным элементом матрицы плотности. Через D_m в формуле (3) обозначена “производная на решетке”, определяемая для любой комплексной последовательности $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ формулой $D_m z_m = z_m - z_{m-1}$, а e_1^1 в формуле (4) есть матрица $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В работах [12], [14] было установлено, что вспомогательная функция $\mathbf{a}$, которая определяет свободную энергию модели, содержит также всю информацию о состоянии термодинамического равновесия, необходимую для того, чтобы выразить корреляционные функции в виде кратных интегралов. Как станет абсолютно ясно при рассмотрении XX -предела, функция $1/(1 + \mathbf{a})$ обобщает функцию Ферми на случай взаимодействия. Поскольку мы ожидаем, что функция Ферми естественным образом появляется во всех выражениях для корреляционных функций, то, по нашему мнению, формулировка термодинамики интегрируемых моделей в том виде, как она была развита в работах [10], чрезвычайно полезна в рассматриваемом контексте.

Вспомогательная функция есть единственное решение нелинейного интегрального уравнения

$$\ln \mathbf{a}(\lambda) = -\frac{h}{T} - \frac{2J \operatorname{sh}^2(\eta)}{T \operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda + \eta)} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(2\eta) \ln(1 + \mathbf{a}(\omega))}{\operatorname{sh}(\lambda - \omega + \eta) \operatorname{sh}(\lambda - \omega - \eta)}. \quad (5)$$

Здесь контур интегрирования $\mathcal{C}$ представляет собой прямоугольник в комплексной плоскости. Мы изобразили его на рис. 1. Подобно неоднородному члену и ядру в (5) этот контур зависит от параметра η , который является единственным неотъемлемым параметром модели и связан с анизотропией Δ в (1): $\Delta = \operatorname{ch}(\eta)$. Зная вспомогательную функцию на контуре $\mathcal{C}$, можно вычислить свободную энергию, приходящуюся на узел решетки, по формуле [12]

$$f(T, h) = -\frac{h}{2} - T \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{\operatorname{sh}(\eta) \ln(1 + \mathbf{a}(\omega))}{\operatorname{sh}(\omega) \operatorname{sh}(\omega + \eta)}. \quad (6)$$

Рис. 1. Канонический контур $\mathcal{C}$ в некритическом режиме $\Delta > 1$ (слева) и в критическом режиме $|\Delta| < 1$ (справа). При $\Delta > 1$ контур представляет собой прямоугольник с координатами сторон $\pm i\pi/2$ и $\pm\gamma$, где γ немного меньше $\eta/2$. При $|\Delta| < 1$ контур охватывает вещественную ось, проходя от нее на расстоянии $|\gamma|$, которое немного меньше $|\eta|/2$, если $\Delta > 0$, и немного меньше $\pi/2 - |\eta|/2$, если $\Delta < 0$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат работы [12]. Определяемая в соответствии с формулой (2) производящая функция $\Phi(\varphi|m)$ для корреляционных функций XXZ -цепочки в термодинамическом пределе имеет следующее интегральное представление:

$$\Phi(\varphi|m) = \sum_{n=0}^m \frac{e^{(m-n)\varphi}}{(n!)^2} \left[\prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_j}{2\pi i} \left(\frac{\text{sh}(\zeta_j - \eta)}{\text{sh}(\zeta_j)} \right)^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \mathfrak{a}(\omega_j))} \left(\frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j - \eta)} \right)^m \right] \times \\ \times \left[\prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \zeta_k - \eta)}{\text{sh}(\zeta_j - \zeta_k - \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, \zeta_k) \det_n G(\omega_j, \zeta_k), \quad (7)$$

где $\mathfrak{a}(\lambda)$ – вспомогательная функция (5),

$$M(\omega_j, \zeta_k) = t(\zeta_k, \omega_j) \prod_{\ell=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \zeta_\ell - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_\ell - \eta)} + t(\omega_j, \zeta_k) e^\varphi \prod_{\ell=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \zeta_\ell + \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_\ell + \eta)}, \quad (8)$$

$$t(\zeta, \omega) = \frac{\text{sh}(\eta)}{\text{sh}(\zeta - \omega) \text{sh}(\zeta - \omega + \eta)}, \quad (9)$$

а функция $G(\lambda, \zeta)$ – решение линейного интегрального уравнения

$$G(\lambda, \zeta) = t(\zeta, \lambda) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i(1 + \mathfrak{a}(\omega))} \frac{\text{sh}(2\eta)G(\omega, \zeta)}{\text{sh}(\lambda - \omega + \eta) \text{sh}(\lambda - \omega - \eta)}. \quad (10)$$

Контур $\mathcal{C}$ в последнем уравнении такой же, как и в нелинейном интегральном урав-

нении (5) (рис. 1), в формуле (7) Γ – любой простой замкнутый контур, расположенный внутри контура $\mathcal{C}$ и обходящий начало координат против часовой стрелки.

Альтернативное выражение для функции $\Phi(\varphi|m)$, в которое входит функция $\bar{\mathfrak{a}} = 1/\mathfrak{a}$ и которое также было получено в [12], имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi|m) = & \sum_{n=0}^m \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left[\prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_j}{2\pi i} \left(\frac{\text{sh}(\zeta_j + \eta)}{\text{sh}(\zeta_j)} \right)^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega_j))} \left(\frac{\text{sh}(\omega_j)}{\text{sh}(\omega_j + \eta)} \right)^m \right] \times \\ & \times \left[\prod_{j,k=1}^n \frac{\text{sh}(\omega_j - \zeta_k + \eta)}{\text{sh}(\zeta_j - \zeta_k + \eta)} \right] \det_n M(\omega_j, \zeta_k) \det_n G(\omega_j, \zeta_k). \end{aligned} \quad (11)$$

Для вероятности образования пустоты (4) мы получили несколько альтернативных выражений [12], [13]. В данном случае оказывается удобным работать с неоднородным симметричным выражением

$$\begin{aligned} P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = & \frac{1}{m!} \left[\prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \mathfrak{a}(\omega_j))} \right] \times \\ & \times \left[\prod_{j,k=1}^m \frac{\text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{sh}(\omega_j - \xi_k - \eta)}{\text{sh}(\omega_j - \omega_k - \eta)} \right] \frac{\det_m t(\xi_k, \omega_j) \det_m G(\omega_j, \xi_k)}{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \text{sh}(\xi_j - \xi_k)}, \end{aligned} \quad (12)$$

которое можно получить из уравнения (111) работы [12] в пределе $\varphi \rightarrow -\infty$, и переходить к пределу $\xi_j \rightarrow 0$, $j = 1, \dots, m$, на более поздней стадии.

Формулы для намагниченности представляют собой простейшие реализации приведенных выше интегральных представлений, например,

$$m(T, h) = \langle S_j^z \rangle_{T, h} = \lim_{\xi \rightarrow 0} P_{\uparrow}(1, \xi) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Phi(i\pi|1). \quad (13)$$

Используя формулы (7), (11) в правой части последнего выражения, получаем [12]

$$m(T, h) = -\frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)} = \frac{1}{2} + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{G(\omega, 0)}{1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega)}. \quad (14)$$

В последующих разделах мы будем рассматривать пределы $\eta \rightarrow i\pi/2$ и $\eta \rightarrow \infty$ при условии, что значение $J\Delta = c$ фиксировано. В первом случае величина Δ стремится к нулю, и гамильтониан (1) превращается в гамильтониан XX -модели. Этот предел называется также пределом свободных фермионов. Второй предел называется пределом Изинга, поскольку в этом пределе гамильтониан (1) превращается в гамильтониан одномерной модели Изинга.

3. XX -ПРЕДЕЛ

В XX -пределе $\eta = i\pi/2$, $\Delta = \text{ch}(\eta) = 0$ имеем

$$\text{sh}(\lambda \pm \eta) = \pm i \text{ch}(\lambda), \quad (15)$$

и уравнения (5)–(12) значительно упрощаются. В частности, ядро интегральных уравнений (5) и (10) тождественно обращается в нуль, и вспомогательная функция $\mathfrak{a}$ и функция плотности G определяются соответствующими неоднородностями:

$$\mathfrak{a}(\lambda) = \exp \left\{ -\frac{1}{T} \left(h + \frac{4iJ}{\operatorname{sh}(2\lambda)} \right) \right\}, \quad (16)$$

$$G(\lambda, \zeta) = -\frac{2}{\operatorname{sh}(2(\lambda - \zeta))}. \quad (17)$$

Заметим, что функция $G(\lambda, \zeta)$ не зависит от температуры и поэтому совпадает со своим нулевым предельным значением по температуре. Благодаря этому обстоятельству последующие вычисления имеют много общего с вычислениями в случае нулевой температуры, который был исследован в работе [17].

Намагниченность. Мы хотим преобразовать все интегралы по контуру $\mathcal{C}$ в интегралы по “зоне Бриллюэна” $[-\pi, \pi]$. Начнем с простого примера и рассмотрим выражение (14) для намагниченности. Подставляя (16) и (17) в это выражение, получаем

$$m(T, h) = \frac{1}{2} - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{\pi i \operatorname{sh}(2\omega)} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{1}{T} \left(h + \frac{4iJ}{\operatorname{sh}(2\omega)} \right)\right)}. \quad (18)$$

Контур интегрирования $\mathcal{C}$ состоит из части $\mathcal{C}_+$, расположенной выше вещественной оси, и части $\mathcal{C}_-$, расположенной ниже вещественной оси (рис. 1). Поскольку подынтегральное выражение в (18) является аналитическим в полосах $-\pi/2 < \operatorname{Im} \omega < 0$ и $0 < \operatorname{Im} \omega < \pi/2$, можно деформировать контуры $\mathcal{C}_{\pm}$ в контуры, параллельные вещественной оси и проходящие через точки $\pm i\pi/4$. Тогда параметризация

$$\mathcal{C}_+ : \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right] \cup \left[-\pi, -\frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega(p) = \frac{1}{2} \operatorname{arcth}(\sin(p)) + \frac{i\pi}{4}, \quad (19a)$$

$$\mathcal{C}_- : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{C}, \quad \omega(p) = \frac{1}{2} \operatorname{arcth}(\sin(p)) - \frac{i\pi}{4} \quad (19b)$$

контура $\mathcal{C}$ является единообразной, и для любой точки ω на контуре $\mathcal{C}$ существует единственное $p \in [-\pi, \pi]$ такое, что

$$\operatorname{sh}(2\omega) = \frac{1}{i \cos p}, \quad \operatorname{ch}(2\omega) = -i \operatorname{tg} p. \quad (20)$$

Это дает знакомое выражение

$$m(T, h) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{1 + \exp\left(\frac{h - 4J \cos p}{T}\right)}. \quad (21)$$

Вероятность образования пустоты. Формула для вероятности образования пустоты получается аналогичным образом. Подставим (15)–(17) в (12) и используем

формулу произведения для детерминанта Коши. Тогда

$$P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = \frac{1}{m!} \left[\prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \mathbf{a}(\omega_j))} \right] \times \\ \times \frac{\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m \text{sh}(\omega_j - \omega_k) \text{ch}(\xi_j - \xi_k)}{\prod_{j,k=1}^m \text{sh}(\omega_j - \xi_k) \text{ch}(\omega_j - \xi_k)}, \quad (22)$$

и однородный предел $\xi_j \rightarrow 0$ очевиден:

$$P_{\uparrow}(m) = \frac{(-1)^{m(m-1)/2}}{m!} \left[\prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{\pi i(1 + \mathbf{a}(\omega_j))} \right] \times \\ \times \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq m} 4 \text{sh}^2(\omega_j - \omega_k)}{\prod_{j=1}^m \text{sh}^m(2\omega_j)}. \quad (23)$$

Контур интегрирования и подынтегральное выражение снова единообразно параметризуются при помощи формул (19), в частности, используя (20), имеем

$$\text{sh}^2(\omega_j - \omega_k) = \frac{1}{2} \text{ch}(2\omega_j) \text{ch}(2\omega_k) - \frac{1}{2} \text{sh}(2\omega_j) \text{sh}(2\omega_k) - \frac{1}{2} = \frac{\sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right)}{\cos p_j \cos p_k} \quad (24)$$

для всех $p_j, p_k \in [-\pi, \pi]$. Подставляя (19), (20) и (24) в (23), получаем окончательно

$$P_{\uparrow}(m) = \frac{1}{m!} \left[\prod_{j=1}^m \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp_j}{2\pi} \frac{1}{1 + \exp\left(\frac{4J \cos p_j - h}{T}\right)} \right] \prod_{1 \leq j < k \leq m} 4 \sin^2\left(\frac{p_j - p_k}{2}\right). \quad (25)$$

Это выражение допускает дальнейшее упрощение, если принять во внимание, что произведение $\prod_{1 \leq j < k \leq m} 4 \sin^2((p_j - p_k)/2)$ может быть выражено как произведение двух определителей Вандермонда. Тогда

$$P_{\uparrow}(m) = \det_m \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{e^{i(j-k)p}}{1 + \exp\left(\frac{4J \cos p - h}{T}\right)} \right]_{j,k=1,\dots,m}, \quad (26)$$

что представляет собой известный результат, впервые полученный в работе [19], в которой также можно найти аккуратное рассмотрение асимптотического поведения $P_{\uparrow}(m)$ на больших расстояниях при нулевой и ненулевой температуре.

Двухточечная функция. Для вычисления двухточечной функции $\langle S_1^z S_m^z \rangle_{T,h}$ используем интегральное представление (11). Подставляя (15)–(17) и дважды применяя формулу произведения для детерминантов Коши, находим

$$\Phi(\varphi|m) = \sum_{n=0}^m \frac{(e^{\varphi} - 1)^n}{(n!)^2} \left[\prod_{j=1}^n \int_{\Gamma} \frac{d\zeta_j}{2\pi i} \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \bar{\mathbf{a}}(\omega_j))} \left(\frac{\text{th}(\omega_j)}{\text{th}(\zeta_j)} \right)^m \right] \times \\ \times \left[\det_n \frac{1}{\text{sh}(\omega_j - \zeta_k)} \right]^2, \quad (27)$$

Аналогично

$$\begin{aligned} I_2 &= I_1^2 - \left[\prod_{j=1}^2 \int_C \frac{d\omega_j \operatorname{th}^m(\omega_j)}{2\pi i(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega_j))} \right] \left[\int_{\Gamma} \frac{d\zeta}{2\pi i} \frac{1}{\operatorname{th}^m(\zeta) \operatorname{sh}(\zeta - \omega_1) \operatorname{sh}(\zeta - \omega_2)} \right]^2 = \\ &= I_1^2 - \left[\prod_{j=1}^2 \int_C \frac{d\omega_j}{2\pi i(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega_j))} \right] \left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\omega_1 - \omega_2)} \left(\left[\frac{\operatorname{th}(\omega_1)}{\operatorname{th}(\omega_2)} \right]^{\frac{m}{2}} - \left[\frac{\operatorname{th}(\omega_2)}{\operatorname{th}(\omega_1)} \right]^{\frac{m}{2}} \right) \right]^2. \quad (32) \end{aligned}$$

Подставляя полученные выражения для I_1 и I_2 в (28) и применяя разностные операторы, получаем

$$\begin{aligned} \langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} &= \\ &= \left[\int_C \frac{d\omega}{2\pi i(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega))} \frac{\partial_{\omega} \operatorname{th}^m(\omega)}{m} \right] \left[\int_C \frac{d\omega}{2\pi i(1 + \bar{\mathfrak{a}}(\omega))} \frac{\partial_{\omega} \operatorname{cth}^m(\omega)}{m} \right]. \quad (33) \end{aligned}$$

Это уже достаточно простое соотношение, включающее лишь произведения однократных интегралов. Мы записали его в виде, который особенно удобен для преобразования к интегралу по зоне Бриллюэна: поскольку (см. (20))

$$\operatorname{th}(\omega) = \frac{1}{\operatorname{cth}(\omega)} = \frac{\operatorname{ch}(2\omega) - 1}{\operatorname{sh}(2\omega)} = -ie^{ip}, \quad (34)$$

мы сразу видим, что

$$\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} = - \left[\int_{-\pi}^{\pi} \frac{dp}{2\pi} \frac{\cos(mp)}{1 + \exp\left(\frac{h-4J \cos p}{T}\right)} \right]^2 \quad (35)$$

для всех $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим, наконец, предел нулевой температуры. Если h превышает критическое значение поля $4J$, то при нулевой температуре все спины направлены в одну сторону, и корреляционная функция (35) обращается в нуль. Если $|h| < 4J$, то в пределе нулевой температуры область интегрирования в (35) ограничивается интервалом между двумя точками Ферми $\pm \arccos(h/4J)$, внутри которого экспоненциальная функция в подынтегральном выражении обращается в нуль, и

$$\langle S_1^z S_{m+1}^z \rangle_{T,h} - \langle S_1^z \rangle_{T,h} \langle S_{m+1}^z \rangle_{T,h} = \frac{T_{2m}\left(\frac{h}{4J}\right) - 1}{2\pi^2 m^2}, \quad (36)$$

где $T_j(x)$ — j -ый полином Чебышева. Формулы (35) и (36) эквивалентны формулам, впервые полученным в работе [20] (при $h = 0$) и [21]. Асимптотики двухточечных функций были исследованы в работе [21].

4. ПРЕДЕЛ ИЗИНГА

XXZ -гамильтониан (1) превращается в гамильтониан одномерной модели Изинга, если положить $J = c/\Delta = c/\operatorname{ch}(\eta)$, $c > 0$, и перейти к пределу $\eta \rightarrow \infty$. В

этом разделе мы получим известную формулу для вероятности образования пустоты в пределе Изинга [22], воспользовавшись представлением в виде кратного интеграла (12). Предварительно необходимо вычислить вспомогательную функцию $\mathfrak{a}(\lambda)$ и неоднородную функцию плотности $G(\lambda, \zeta)$, исходя из интегральных уравнений (5) и (10) для этих функций. Напомним, что в некритическом режиме интегральные уравнения определяют функции $\mathfrak{a}(\lambda)$ и $G(\lambda, \zeta)$ внутри полосы $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \pi/2$, $|\operatorname{Re} \lambda| \leq (1 - \delta)\eta/2$ для любого фиксированного δ , $0 < \delta < 1$. Используя равенство

$$\lim_{\eta \rightarrow \infty} \operatorname{cth}(\lambda \pm \eta) = \pm 1, \quad (37)$$

выполняющееся равномерно для всех λ таких, что $|\operatorname{Re} \lambda| \leq (1 - \delta)\eta$, и элементарные формулы

$$\frac{\operatorname{sh}(\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda + \eta)} = \operatorname{cth}(\lambda) - \operatorname{cth}(\lambda + \eta), \quad (38)$$

$$\frac{\operatorname{sh}(2\eta)}{\operatorname{sh}(\lambda - \eta) \operatorname{sh}(\lambda + \eta)} = \operatorname{cth}(\lambda - \eta) - \operatorname{cth}(\lambda + \eta), \quad (39)$$

видим, что интегральные уравнения (5), (10) превращаются в уравнения

$$\ln \mathfrak{a}(\lambda) = -\frac{h}{T} - \frac{2c}{T} (\operatorname{cth}(\lambda) - 1) + \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{\pi i} \ln(1 + \mathfrak{a}(\omega)), \quad (40)$$

$$G(\lambda, \zeta) = \operatorname{cth}(\zeta - \lambda) - 1 - \int_{\mathcal{C}} \frac{d\omega}{\pi i} \frac{G(\omega, \zeta)}{1 + \mathfrak{a}(\omega)}. \quad (41)$$

Теперь эти уравнения справедливы для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\operatorname{Im} \lambda| \leq \pi/2$. Можно, в частности, выбрать в качестве λ любую точку на левой или правой границе контура $\mathcal{C}$ (рис. 1) и затем сдвинуть левую границу в $-\infty$, а правую границу — в $+\infty$. Таким способом мы получим из интегральных уравнений (40) и (41) два алгебраических уравнения, которые определяют пределы $\mathfrak{a}_{\pm} = \lim_{|\operatorname{Re} \lambda| \rightarrow \pm\infty} \mathfrak{a}(\lambda)$ и $G_{\pm} = \lim_{|\operatorname{Re} \lambda| \rightarrow \pm\infty} G(\lambda, \zeta)$, соответственно. Уравнения для пределов вспомогательных функций имеют вид

$$\mathfrak{a}_{\pm} = K e^{-\frac{h}{T} \mp \frac{2c}{T}}, \quad K = \frac{1 + \mathfrak{a}_{+}}{1 + \mathfrak{a}_{-}} e^{\frac{2c}{T}} \quad (42)$$

и легко превращаются в квадратное уравнение для K с корнями

$$K = e^{-\frac{2c}{T} + \frac{h}{2T}} \left(-\operatorname{sh}\left(\frac{h}{2T}\right) \pm \sqrt{\operatorname{sh}^2\left(\frac{h}{2T}\right) + e^{\frac{4c}{T}}} \right). \quad (43)$$

При сдвиге левого и правого контуров интегрирования в $-\infty$ и $+\infty$, соответственно, константа K входит в (40), и мы окончательно получаем

$$\mathfrak{a}(\lambda) = K \exp\left\{-\frac{h}{T} - \frac{2c}{T} \operatorname{cth}(\lambda)\right\}. \quad (44)$$

Перед корнем в формуле (43) следует взять знак “плюс”, поскольку в пределе высоких температур функция $\mathbf{a}(\lambda)$ тождественно равна единице для произвольного значения параметра анизотропии Δ [12].

Функция $G(\lambda, \zeta)$ получается аналогичным образом. Пределы $G_{\pm}$ удовлетворяют уравнениям

$$G_+ = -2 - \frac{G_+}{1 + \mathbf{a}_+} + \frac{G_-}{1 + \mathbf{a}_-}, \quad G_- = -\frac{G_+}{1 + \mathbf{a}_+} + \frac{G_-}{1 + \mathbf{a}_-}, \quad (45)$$

которые вытекают из (41). Значит, функции $G_{\pm}$ не зависят от ζ , и $G_- - G_+ = 2$. Следовательно, можно ввести новую функцию, скажем $\langle \sigma \rangle$, такую, что

$$G_{\pm} = \langle \sigma \rangle \mp 1. \quad (46)$$

Подставляя последнее определение в (45), используя (42), (43) и решая уравнения относительно $\langle \sigma \rangle$, получаем явное выражение:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{\text{sh}\left(\frac{h}{2T}\right)}{\sqrt{\text{sh}^2\left(\frac{h}{2T}\right) + e^{\frac{4c}{T}}}}. \quad (47)$$

Сдвигая контур интегрирования в $\mp\infty$ при фиксированном λ в (41) и используя (45), (46), приходим, в конечном счете, к выражению

$$G(\lambda, \zeta) = \text{cth}(\zeta - \lambda) + \langle \sigma \rangle. \quad (48)$$

Определив вспомогательную функцию $\mathbf{a}(\lambda)$ и функцию $G(\lambda, \zeta)$, мы можем теперь в качестве первого простого примера вычислить намагниченность. Сдвигая контур интегрирования в первом выражении (14) в $\mp\infty$ и используя (45) и (46), немедленно получаем

$$m(T, h) = \frac{\langle \sigma \rangle}{2}, \quad (49)$$

т.е. $\langle \sigma \rangle = \langle \sigma_j^z \rangle_{T, h}$, что оправдывает использование данного обозначения. Наши формулы (49) и (47) не являются неожиданными и согласуются с известным результатом (см. [23]).

Вероятность образования пустоты. Исходным пунктом для вычисления вероятности образования пустоты снова является формула (12). Если

- 1) принять во внимание упрощения, обусловленные формулами (37)–(39),
- 2) использовать для упрощения $\det_m G(\omega_j, \xi_k)$ следующую формулу:

$$\det_m \frac{ax_j + bs_k}{x_j - s_k} = (a + b)^{m-1} \left[a \prod_{k=1}^m x_k + b \prod_{k=1}^m s_k \right] \frac{\prod_{1 \leq j < k \leq m} (x_j - x_k)(s_k - s_j)}{\prod_{j,k=1}^m (x_j - s_k)}, \quad (50)$$

- 3) положить $s_k = e^{-2\xi_k}$ и сделать замену переменных $x_j = e^{-2\omega_j}$,

Рис. 3. Трансформация канонического контура под действием преобразования $e^{-2\omega} = x$.

то мы приходим к выражению

$$P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = \frac{1}{2m!} \left[\prod_{j=1}^m \int_{\mathcal{T}} \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \frac{1}{1 + K \exp(-\frac{h}{T} - \frac{2c}{T} \frac{1+x_j}{1-x_j})} \right] \times \\ \times \left[\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^m (x_j - x_k) \right] \frac{(1 + \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^m x_k + (1 - \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^m s_k}{\prod_{j,k=1}^m (x_j - s_k)}. \quad (51)$$

В последней формуле через $\mathcal{T}$ обозначен трансформированный контур интегрирования. Этот контур состоит из двух концентрических окружностей с центром в начале координат. Левая сторона исходного контура интегрирования, проходящая через точки с вещественной координатой, скажем, $-b$ отображается в большую окружность радиуса e^{2b} , а правая сторона, проходящая через точки с вещественной координатой, скажем, a отображается в малую окружность радиуса e^{-2a} (рис. 3). По мере увеличения радиуса большой окружности вспомогательная функция на контуре стремится к своему предельному значению $\mathbf{a}_- = K e^{-(h-2c)/T}$. На малой окружности она стремится к $\mathbf{a}_+ = K e^{-(h+2c)/T}$ при стремлении радиуса к нулю. Поскольку остальные множители в подынтегральном выражении рациональны по x_j и содержат только простые полюсы в точках $x_j = s_k$, $k = 1, \dots, m$, и $x_j = 0$, искомый интеграл может быть вычислен следующим образом. Зафиксируем сначала большую и малую окружности так, чтобы все полюсы рациональной части подынтегрального выражения, за исключением полюсов в нуле, лежали в кольце между окружностями, затем заменим вспомогательную функцию на большой окружности ее предельным значением $\mathbf{a}_-$ и на малой окружности – предельным значением $\mathbf{a}_+$ и, наконец, используем теорему о вычетах. После выполнения таким способом n интегрирований правая часть выражения (51) принимает вид

$$P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = \frac{1}{2m!(1 + \mathbf{a}_-)^n} \left[\prod_{j=1}^{m-n} \int_{\mathcal{T}} \frac{dx_j}{2\pi i x_j} \frac{1}{1 + K \exp(-\frac{h}{T} - \frac{2c}{T} \frac{1+x_j}{1-x_j})} \right] \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left[\prod_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{m-n} (x_j - x_k) \right] \times \\
& \times \sum_{j_1=1}^m \sum_{\substack{j_2=1 \\ j_2 \neq j_1}}^m \cdots \sum_{\substack{j_{n-1}=1 \\ j_{n-1} \neq j_1, \dots, j_{n-2}}}^m \left\{ \sum_{\substack{j_n=1 \\ j_n \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m \frac{\prod_{k=1}^{m-n} \prod_{\ell=1}^n (s_{j_\ell} - x_k)}{\prod_{k \neq j_1, \dots, j_n}^m \prod_{\ell=1}^n (s_{j_\ell} - s_k)} \times \right. \\
& \times \frac{(1 + \langle \sigma \rangle) \prod_{k=1}^{m-n} x_k + (1 - \langle \sigma \rangle) \prod_{k \neq j_1, \dots, j_n}^m s_k}{\prod_{j=1}^{m-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_n}}^m (x_j - s_k)} - \\
& - n(1 - \langle \sigma \rangle) \frac{\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-}{1 + \mathbf{a}_+} \frac{[\prod_{k=1}^{m-n} \prod_{\ell=1}^{n-1} (s_{j_\ell} - x_k)] [\prod_{\ell=1}^{n-1} s_{j_\ell}]}{\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m \prod_{\ell=1}^{n-1} (s_{j_\ell} - s_k)} \times \\
& \times \left. \frac{\prod_{k=1}^{m-n} x_k^2}{\prod_{j=1}^{m-n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j_1, \dots, j_{n-1}}}^m (x_j - s_k)} \right\}, \tag{52}
\end{aligned}$$

что проще всего проверить индукцией по n .

При $n = m$ несколько множителей очевидным образом сокращаются, и мы получаем

$$P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = \frac{1}{(1 + \mathbf{a}_-)^m} \left[1 - \frac{1 - \langle \sigma \rangle}{2} \frac{\mathbf{a}_+ - \mathbf{a}_-}{1 + \mathbf{a}_+} \sum_{k=1}^m \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^m \frac{s_\ell}{s_\ell - s_k} \right]. \tag{53}$$

Это выражение упрощается в силу тождества

$$\sum_{k=1}^m \prod_{\substack{\ell=1 \\ \ell \neq k}}^m \frac{s_\ell}{s_\ell - s_k} = 1, \tag{54}$$

которое справедливо для любого множества попарно различных комплексных чисел s_k , $k = 1, \dots, m$. Подставляя (54) и (45), (46) в (53), окончательно имеем

$$P_{\uparrow}(m|\{\xi\}) = \frac{1 + \langle \sigma \rangle}{2(1 + \mathbf{a}_-)^{m-1}}. \tag{55}$$

где функции $\langle \sigma \rangle$ и $\mathbf{a}_-$ заданы явно формулами (47) и (42), (43). Весьма примечательно, что правая часть последнего равенства не зависит от неоднородностей $\{\xi\}$.

Для того чтобы выразить вероятность образования пустоты в терминах, более близких к физическим, вычислим свободную энергию в пределе Изинга исходя из интеграла (6). Действуя так же, как и выше, находим

$$\begin{aligned}
f(T, h) &= -\frac{h}{2} - T \ln(1 + \mathbf{a}_-) \\
&= -T \ln \left(\operatorname{ch} \left(\frac{h}{2T} \right) + \sqrt{\operatorname{sh}^2 \left(\frac{h}{2T} \right) + e^{\frac{4c}{T}}} \right). \tag{56}
\end{aligned}$$

Сравнение (55) с (49) и (56) тогда дает

$$P_{\uparrow}(n+1) = \left(\frac{1}{2} + m(T, h)\right) e^{\frac{nf(T, h)}{T} + \frac{nh}{2T}} \quad (57)$$

в полном соответствии с [22] и с общей формулой для асимптотик вероятности образования пустоты при конечной температуре [3].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель настоящей работы состояла в том, чтобы продемонстрировать эффективность полученных в [12]–[14] представлений в виде кратных интегралов для корреляционных функций при конечной температуре, показав, что ряд известных результатов для корреляционных функций XX -цепочки и одномерной модели Изинга может быть воспроизведен посредством формул (7), (11) и (12). Обычно корреляционные функции XX -цепочки и цепочки Изинга вычисляются при помощи совершенно других весьма специальных методов. Корреляционные функции XX -цепочки получаются при помощи отображения цепочки на модель свободных фермионов [20], а вычисление корреляционных функций одномерной модели Изинга основано на использовании трансфер-матричного формализма с не зависящей от спектрального параметра трансфер-матрицей размера 2×2 [23]. Здесь мы впервые получили корреляционные функции XX -цепочки и цепочки Изинга с помощью общего метода, а именно, представления в виде кратного интеграла, который применим для всех промежуточных значений Δ от XX -предела $\Delta \rightarrow 0$ до предела Изинга $\Delta \rightarrow \infty$.

Мы хотели бы видеть эту работу в одном ряду с работой [15], где с использованием кратных интегралов было получено высокотемпературное разложение старшего порядка для корреляционных функций изотропной цепочки, и с работой [16], где, опять-таки на основе кратных интегралов, были численно посчитаны некоторые из функций в случае, когда расстояние между узлами на решетке равно 2 и 3. Мы надеемся в будущем представить результаты, касающиеся дальнейших применений интегральных формул при конечной температуре.

Благодарности. Авторы благодарны Г. Боосу и А. Ключперу за полезные обсуждения. Данная работа была частично поддержана Deutsche Forschungsgemeinschaft (грант № Go 825/4-2).

Список литературы

- [1] *M. Jimbo, K. Miki, T. Miwa, A. Nakayashiki.* Phys. Lett. A. 1992. V. 168. P. 256; *M. Jimbo, T. Miwa.* J. Phys. A. 1996. V. 29. P. 2923.
- [2] *N. Kitanine, J. M. Maillet, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 567. P. 554.
- [3] *H. E. Boos, V. E. Korepin.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 5311.
- [4] *H. E. Boos, V. E. Korepin, F. A. Smirnov.* Nucl. Phys. B. 2003. V. 658. P. 417.
- [5] *H. Boos, M. Jimbo, T. Miwa, F. Smirnov, Y. Takeyama.* A recursion formula for the correlation functions of an inhomogeneous XXX model. hep-th/0405044; Reduced qKZ equation and correlation functions of the XXZ model. hep-th/0412191.

- [6] *G. Kato, M. Shiroishi, M. Takahashi, K. Sakai.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. L337; 2004. V. 37. P. 5097.
- [7] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 641. P. 487.
- [8] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 7441; hep-th/0407223.
- [9] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Dynamical correlation functions of the XXZ spin-1/2 chain. hep-th/0407108.
- [10] *A. Klümper.* Ann. Phys. (Leipzig). 1992. V. 1. P. 540; Z. Phys. B. 1993. V. 91. P. 507.
- [11] *M. Inoue, M. Suzuki.* Prog. Theor. Phys. 1988. V. 79. P. 645; *M. Suzuki.* Phys. Rev. B. 1985. V. 31. P. 2957.
- [12] *F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel.* J. Phys. A. 2004. V. 37. P. 7625.
- [13] *F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel.* Physica B. 2004. V. 359–361. P. 807; cond-mat/0406611.
- [14] *F. Göhmann, A. Klümper, A. Seel.* J. Phys. A. 2005. V. 38. P. 1833.
- [15] *Z. Tsuboi, M. Shiroishi.* J. Phys. A. 2005. V. 38. P. L363; cond-mat/0502569.
- [16] *M. Bortz, F. Göhmann.* Eur. Phys. J. B. 2005. V. 46. P. 399; cond-mat/0504370.
- [17] *N. Kitanine, J. M. Maillet, N. A. Slavnov, V. Terras.* Nucl. Phys. B. 2002. V. 642. P. 433.
- [18] *A. G. Izergin, V. E. Korepin.* Commun. Math. Phys. 1984. V. 94. P. 67.
- [19] *M. Shiroishi, M. Takahashi, Y. Nishiyama.* J. Phys. Soc. Japan. 2001. V. 70. P. 3535.
- [20] *E. H. Lieb, T. Schultz, D. Mattis.* Ann. Physics (N. Y.). 1961. V. 16. P. 407.
- [21] *E. Barouch, B. M. McCoy.* Phys. Rev. A. 1971. V. 3. P. 786.
- [22] *M. Suzuki.* Phys. Lett. A. 2002. V. 301. P. 398.
- [23] *Р. Бэжстер.* Точно решаемые модели в статистической механике. Мир: М., 1985.