Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Ю. Вернов, Доказательство отсутствия эллиптических решений кубического комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау, *ТМФ*, 2006, том 146, номер 1, 161–171

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf2016>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 14:52:20

© 2006 г.

С. Ю. Вернов*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТСУТСТВИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ КУБИЧЕСКОГО КОМПЛЕКСНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Рассмотрено кубическое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау. С помощью метода Хона, основанного на использовании решений в виде формальных рядов Лорана и теореме вычетов, доказано отсутствие у этого уравнения эллиптических решений в виде стоячих волн. Полученный результат дополняет результат Хона, доказавшего невозможность существования эллиптических решений в виде бегущих волн. Показано, что более эффективно применять метод Хона к системе полиномиальных дифференциальных уравнений, нежели к эквивалентному ей дифференциальному уравнению.

Ключевые слова: стоячая волна, эллиптическая функция, ряд Лорана, теорема вычетов, кубическое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау.

1. ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные динамические системы и уравнения эволюции, активно используемые в физике, часто оказываются неинтегрируемыми в том смысле, что, используя известные методы, например интегрирование в квадратурах или метод обратной задачи рассеивания, невозможно найти их общие решения. В то же время для физических приложений оказывается достаточным знание частных решений с заданными свойствами, например периодических или с требуемыми асимптотиками. В настоящее время активно развиваются методы построения частных решений в виде элементарных (вырожденных эллиптических) и эллиптических функций [1]–[12] (см. также монографию [13] и библиографию в ней). Некоторые из этих методов предназначены для поиска только эллиптических решений [2], [5], [9], другие – только решений в терминах элементарных (вырожденных эллиптических) функций [3], [4], [11], третьи позволяют искать и те, и другие [1], [6]–[8], [10], [12]. Отметим, что и эллиптические, и вырожденные эллиптические функции обладают двумя свойствами, используемыми при поиске решений указанными методами. Во-первых, они

*Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: svernov@theory.sinp.msu.ru

являются мероморфными функциями и не имеют на комплексной плоскости сингулярных точек, отличных от полюсов. Во-вторых, они являются решениями полиномиальных дифференциальных уравнений первого порядка.

Необходимым условием существования у дифференциального уравнения эллиптических и вырожденных эллиптических решений является наличие решений в виде рядов Лорана. Данные решения строятся с помощью алгоритма Абловица–Рамани–Сегура [14] теста Пенлеве [15]. Пример построения подобных решений дан в работе [16], при этом показана простота алгоритма построения и возможность его автоматизации с помощью систем компьютерной алгебры. В работе [7] был предложен метод построения частных решений в терминах элементарных и эллиптических функций с помощью решений в виде рядов Лорана. В статье [17] указанные решения использовались для доказательства несуществования эллиптических решений. В обеих вышеупомянутых статьях ([7], [17]) исследовалось одномерное кубическое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау [18]. В статье [17] Хоном было доказано отсутствие эллиптических решений в виде бегущих волн. В настоящей работе с помощью модификации алгоритма Хона мы доказываем отсутствие эллиптических решений в виде стоячих волн. Также будет показано, что предлагаемая модификация алгоритма позволяет существенно упростить доказательство отсутствия эллиптических решений в виде бегущих волн. В отличие от статьи [17] мы допускаем возможность обращения в нуль численных параметров (кроме одного), входящих в систему (3) (см. ниже), определяющую решения уравнения Гинзбурга–Ландау в виде бегущих и стоячих волн.

Подобное исследование вопроса о существовании эллиптических решений может быть проведено и для других эволюционных уравнений или систем нелинейных дифференциальных уравнений, при этом предложенная нами модификация упрощает вычисления и может дать более сильный результат. Полученный результат помогает выбрать наиболее приемлемый алгоритм поиска точных решений, а также внести упрощения в алгоритмы, предназначенные для поиска как эллиптических, так и вырожденных эллиптических решений, сведя их к поиску только вырожденных эллиптических решений.

2. УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА–ЛАНДАУ

Одномерное кубическое комплексное уравнение Гинзбурга–Ландау – одно из наиболее активно изучаемых нелинейных уравнений математической физики (см. работу [19] и ссылки в ней). Возникшее в теории суперпроводимости [18], это уравнение используется в различных физических моделях для описания, например, бифуркации Хопфа [19]–[21], распространения сигнала в оптическом волокне [22] и неравновесных явлений в пространственно расширенных диссипативных системах [23]. Уравнение Гинзбурга–Ландау

$$iA_t + pA_{xx} + q|A|^2A - i\gamma A = 0, \quad (1)$$

где $A \in \mathbb{C}$, $A_t \equiv \partial A / \partial t$, $A_{xx} \equiv \partial^2 A / \partial x^2$, $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$ и $\gamma \in \mathbb{R}$, не интегрируемо при $pq\gamma \neq 0$. При $q/p \in \mathbb{R}$ и $\gamma = 0$ уравнение (1) интегрируемо и совпадает с нелинейным

уравнением Шредингера [24].

Одно из наиболее важных направлений изучения уравнения Гинзбурга–Ландау – анализ его решений в виде бегущих и стоячих волн [1], [4], [5], [7], [17], [19], [21], [25]–[27], иными словами, в виде

$$A(x, t) = \sqrt{M(\xi)} e^{i(\varphi(\xi) - \omega t)}, \quad \xi = x - ct, \quad c \in \mathbb{R}, \quad \omega \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Подставляя выражение (2) в уравнение (1), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{M''}{2M} - \frac{M'^2}{4M^2} - \left(\psi - \frac{cs_r}{2} \right)^2 - \frac{cs_i M'}{2M} + d_r M + g_i &= 0, \\ \psi' + \left(\psi - \frac{cs_r}{2} \right) \left(\frac{M'}{M} - cs_i \right) + d_i M - g_r &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\psi \equiv \varphi' \equiv d\varphi/d\xi$, $M' \equiv dM/d\xi$, а шесть действительных параметров d_r , d_i , g_r , g_i , s_r и s_i связаны с параметрами исходного уравнения (1) следующим образом:

$$d_r + id_i = \frac{q}{p}, \quad s_r - is_i = \frac{1}{p}, \quad g_r + ig_i = \frac{\gamma + i\omega}{p} + \frac{1}{2}c^2 s_i s_r + \frac{i}{4}c^2 s_r^2. \quad (4)$$

С помощью системы (3) можно получить, что функция $\psi(\xi)$ является рациональной функцией от $M(\xi)$ и ее производных:

$$\psi = \frac{cs_r}{2} + \frac{G' - 2cs_i G}{2M^2(g_r - d_i M)}, \quad (5)$$

где

$$G \equiv \frac{1}{2}MM'' - \frac{1}{4}M'^2 - \frac{cs_i}{2}MM' + d_r M^3 + g_i M^2, \quad (6)$$

а функция $M(\xi)$ удовлетворяет уравнению третьего порядка:

$$(G' - 2cs_i G)^2 - 4GM^2(d_i M - g_r)^2 = 0. \quad (7)$$

Мы рассматриваем произвольные значения численных параметров системы (3), в том числе и нулевые. Единственным ограничением является условие

$$\frac{p}{q} \notin \mathbb{R}, \quad (8)$$

которое равносильно условию $d_i \neq 0$. При выполнении данного условия уравнение (7) неинтегрируемо [4], [28], и его общее решение, которое должно зависеть от трех произвольных параметров, не известно. С помощью анализа Пенлеве [28] и топологических аргументов [26] было показано, что однозначные решения могут зависеть только от одного произвольного параметра. Уравнение (7) автономно, следовательно, этот параметр ξ_0 : если $M = f(\xi)$ – решение, то и $M = f(\xi - \xi_0)$, где $\xi_0 \in \mathbb{C}$, должно быть решением. Специальные решения в терминах элементарных функций были найдены в работах [1], [4], [25]. Все известные точные решения системы (3)

суть элементарные функции, являющиеся вырожденными случаями эллиптических функций. Их полный список представлен в работах [7], [17].

Система (3) включает семь произвольных параметров, некоторые из них могут быть зафиксированы без потери общности. Прежде всего заменим числами параметры s_r и s_i . Из условия $p \notin \mathbb{R}$ (случай действительных p мы рассматриваем отдельно) следует, что $s_i \neq 0$. С помощью преобразований

$$\tilde{c} = \varpi c, \quad \tilde{s}_i = \frac{s_i}{\varpi}, \quad \tilde{s}_r = \tau s_r, \quad \tilde{\psi} = \psi - \frac{cs_r}{2}(1 - \tau\varpi) \quad (9)$$

можно положить

$$\tilde{s}_r = -\frac{1}{10} \quad \text{и} \quad \tilde{s}_i = -\frac{3}{10}. \quad (10)$$

Инвариантность системы (3) относительно преобразований

$$\widetilde{M} = \mu M, \quad \tilde{d}_i = \frac{d_i}{\mu}, \quad \tilde{d}_r = \frac{d_r}{\mu} \quad (11)$$

позволяет зафиксировать d_r или d_i . Следуя работе [17], мы зафиксируем значение d_r . Наше ограничение (8) не дает никакой информации о d_r , так что мы должны рассмотреть два случая $d_r = 0$ и $d_r \neq 0$ отдельно. Инвариантность системы (3) относительно масштабного преобразования независимой переменной ξ позволяет зафиксировать также g_i или g_r , но, следуя работам [7], [17], мы оставляем их произвольными, для того чтобы рассматривать нулевые и ненулевые значения этих параметров одновременно. Мы не ограничиваемся случаем $c = 0$ и доказываем несуществование эллиптических решений как в виде бегущих, так и в виде стоячих волн.

3. ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Функция $\varrho(z)$ комплексной переменной z называется дважды периодической функцией, если существуют два числа ω_1 и ω_2 , причем $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{R}$, такие, что для произвольного $z \in \mathbb{C}$ выполняется

$$\varrho(z) = \varrho(z + \omega_1) = \varrho(z + \omega_2). \quad (12)$$

По определению дважды периодическая мероморфная функция называется эллиптической функцией [29]. Числа ω_1 и ω_2 определяют параллелограммы периодов с вершинами z_0 , $z_0 + N_1\omega_1$, $z_0 + N_2\omega_2$ и $z_0 + N_1\omega_1 + N_2\omega_2$, где N_1 и N_2 – произвольные натуральные числа, а z_0 – произвольное комплексное число. Классические теоремы для эллиптических функций (см., например, [29]) доказывают, что:

- если эллиптическая функция не имеет полюсов, то она постоянна;
- число полюсов эллиптической функции в пределах любого конечного параллелограмма периодов конечно;
- сумма вычетов в пределах любого конечного параллелограмма периодов равна нулю (**теорема вычетов**);
- если $\varrho(z)$ – эллиптическая функция, то любая рациональная функция от $\varrho(z)$ и ее производных тоже является эллиптической.

Из формулы (5) следует, что если M – эллиптическая функция, то и ψ должна быть эллиптической. Следовательно, если мы докажем, что ψ не может быть эллиптической функцией, мы одновременно докажем, что и M не может быть эллиптической функцией. Для этого мы строим решения в виде ряда Лорана системы (3) и применяем теорему вычетов к функции ψ и ее степеням.

Из второго уравнения системы (3) следует, что, если $\psi(\xi)$ – константа, то $M(\xi)$ не может быть эллиптической функцией, поэтому $M(\xi)$ может быть нетривиальной эллиптической функцией, только если $\psi(\xi)$ имеет полюсы.

4. НЕСУЩЕСТВОВАНИЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

4.1. Решения в виде формальных рядов Лорана и теорема вычетов.

Чтобы доказать отсутствие эллиптических решений у системы (3), мы будем использовать ее решения в виде формального ряда Лорана. Точнее, мы будем использовать только конечное число коэффициентов ряда, поэтому нет нужды в исследовании сходимости этого ряда. Известно [4], [7], [17], что у системы (3) и уравнения (7) могут существовать только два типа решений в виде рядов Лорана. Эти решения зависят только от одного произвольного параметра ξ_0 , который определяет положение сингулярной точки. В сингулярных точках ψ и M стремятся к бесконечности как $1/\xi$ и $1/\xi^2$, соответственно. Мы обозначим различные ряды Лорана для функции $\psi(\xi)$ как

$$\psi_1 = \sum_{k=-1}^{\infty} C_k(\xi - \xi_0)^k, \quad \psi_2 = \sum_{k=-1}^{\infty} D_k(\xi - \tilde{\xi}_0)^k \quad (13)$$

с $C_{-1} \neq 0$ и $D_{-1} \neq 0$; ξ_0 и $\tilde{\xi}_0$ определяют положения сингулярных точек.

Возможные разложения в окрестности полюсов неизвестной функции $\psi(\xi)$ легко могут быть получены с помощью алгоритма Абловица–Рамани–Сегура [14] теста Пенлеве [15].

Предположим, что существует непостоянная эллиптическая функция $\psi(\xi)$. Подобная функция должна иметь полюсы, причем обоих типов. Пусть $\psi(\xi)$ в некотором параллелограмме периодов имеет $N_1 + N_2$ полюсов, причем в окрестности N_1 полюсов ряд Лорана равен ψ_1 , а в окрестности N_2 полюсов – ψ_2 . Из теоремы вычетов получаем, что

$$N_1 = -\frac{D_{-1}}{C_{-1}} N_2. \quad (14)$$

Если $\psi(\xi)$ – эллиптическая функция, то и ψ^k , где k – произвольное натуральное число, должны быть эллиптическими функциями. Они также имеют N_1 сингулярных точек, в окрестности которых разлагаются в ряд Лорана ψ_1^k , и N_2 точек с разложением вида ψ_2^k . Чтобы вычислить вычеты ψ_1^k (ψ_2^k), достаточно знать k ведущих членов ряда Лорана ψ_1 (ψ_2). Теорема вычетов для функций ψ^k дает алгебраические уравнения для коэффициентов рядов ψ_1 и ψ_2 . Данные ряды зависят от параметров системы (3) и только от них, следовательно, мы получаем систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов системы (3), при которых она может иметь эллиптические решения. Например, если мы потребуем, чтобы функция ψ^2

была эллиптической, то, используя (14), получим уравнение

$$C_0 = D_0. \quad (15)$$

Аналогично из требования, чтобы ψ^3 , ψ^4 и ψ^5 были эллиптическими функциями, получаем следующую систему для C_k и D_k :

$$\begin{aligned} C_1 C_{-1} + C_0^2 &= D_1 D_{-1} + D_0^2, \\ C_2 C_{-1}^2 + 3C_1 C_0 C_{-1} + C_0^3 &= D_2 D_{-1}^2 + 3D_1 D_0 D_{-1} + D_0^3, \\ C_3 C_{-1}^3 + 4C_2 C_0 C_{-1}^2 + 2C_1^2 C_{-1}^2 + 6C_{-1} C_0^2 C_1 + C_0^4 &= \\ &= D_3 D_{-1}^3 + 4D_2 D_0 D_{-1}^2 + 2D_1^2 D_{-1}^2 + 6D_1 D_0^2 D_{-1} + D_0^4. \end{aligned} \quad (16)$$

Мы будем использовать эту систему и соответствующее уравнение для ψ^7 только при условии $c = 0$, которое приводит к $C_0 = 0$, $C_2 = 0$, $C_4 = 0$, $D_0 = 0$, $D_2 = 0$ и $D_4 = 0$. В результате система приобретает вид

$$\begin{aligned} C_1 C_{-1} &= D_1 D_{-1}, \\ C_3 C_{-1}^3 + 2C_1^2 C_{-1}^2 &= D_3 D_{-1}^3 + 2D_1^2 D_{-1}^2, \\ C_5 C_{-1}^5 + 6C_3 C_1 C_{-1}^4 + 5C_1^3 C_{-1}^3 &= D_5 D_{-1}^5 + 6D_{-1}^4 D_3 D_1 + 5D_1^3 D_{-1}^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Мы вычислили вычеты функций ψ^k с помощью процедуры `ydegree` из пакета процедур Maple [30], реализующего алгоритм Конта–Музетте построения однозначных решений неинтегрируемых систем [7].

4.2. Случай $d_r = 0$. Рассмотрим систему (3) с

$$d_r = 0, \quad s_r = -\frac{1}{10}, \quad s_i = -\frac{3}{10}. \quad (18)$$

Существуют два вида решений (3) в виде ряда Лорана (мы полагаем $\xi_0 = \tilde{\xi}_0 = 0$):

$$\check{\psi}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\xi} - \frac{(\sqrt{2} + 1)c}{20} + O(\xi), \quad (19)$$

$$\check{M}_1 = \frac{3\sqrt{2}}{d_i \xi^2} - \frac{3\sqrt{2}c}{10d_i \xi} + O(1) \quad (20)$$

и

$$\check{\psi}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\xi} + \frac{(\sqrt{2} - 1)c}{20} + O(\xi), \quad (21)$$

$$\check{M}_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{d_i \xi^2} + \frac{3\sqrt{2}c}{10d_i \xi} + O(1). \quad (22)$$

Из формулы (14) получаем $N_1 = N_2$. Вычеты $\check{\psi}_1^2$ равны $-2\sqrt{2}c(\sqrt{2} + 1)/20$, тогда как вычеты $\check{\psi}_2^2$ равны $-2\sqrt{2}c(\sqrt{2} - 1)/20$. Из уравнения (15) следует, что сумма вычетов функции ψ^2 равна нулю тогда и только тогда, когда $c = 0$. Таким образом, мы доказали отсутствие эллиптических решений в виде бегущих волн. Отметим,

что этот результат мы получили, используя только по два первых коэффициента рядов Лорана ψ_1 и ψ_2 . В случае $c = 0$ необходимо применить теорему вычетов для ψ^3 и ψ^4 , следовательно, мы должны вычислить по четыре коэффициента в каждом из рядов (два коэффициента равны нулю при $c = 0$)

$$\check{\psi}_1 = \frac{\sqrt{2}}{\xi} + 0 + \frac{1}{21}(5\sqrt{2}g_i - g_r)\xi + 0\xi^2 + O(\xi^3), \quad (23)$$

и

$$\check{\psi}_2 = -\frac{\sqrt{2}}{\xi} + 0 - \frac{1}{21}(5\sqrt{2}g_i + g_r)\xi + 0\xi^2 + O(\xi^3). \quad (24)$$

Из первого и второго уравнений системы (16) получаем, что функции ψ^3 и ψ^4 удовлетворяют теореме вычетов только при

$$g_i = 0, \quad g_r = 0. \quad (25)$$

В этом случае решения (23) и (24) дают

$$\check{\psi}_1(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{\xi}, \quad \check{M}_1(\xi) = \frac{3\sqrt{2}}{d_i\xi^2}, \quad (26)$$

$$\check{\psi}_2(\xi) = -\frac{\sqrt{2}}{\xi}, \quad \check{M}_2(\xi) = -\frac{3\sqrt{2}}{d_i\xi^2}. \quad (27)$$

Прямая подстановка этих функций в систему (3) с $c = 0$, $d_r = 0$, $g_r = 0$ и $g_i = 0$ доказывает, что они являются точными решениями. Так как коэффициенты решений в виде рядов Лорана фиксированы (т.е. не включают произвольные параметры), то полученные решения являются единственными однозначными решениями, следовательно, уравнение Гинзбурга–Ландау не имеет эллиптических решений и при $g_r = g_i = 0$. Таким образом, мы доказали, что при $d_r = 0$ функция $M(\xi)$ – решение уравнения (7) – не может быть эллиптической функцией.

4.3. Случай $d_r \neq 0$. В этом случае мы можем использовать следующие значения параметров:

$$d_r = \frac{1}{2}, \quad s_r = -\frac{1}{10}, \quad s_i = -\frac{3}{10}. \quad (28)$$

Чтобы упростить вычисления, мы, следуя работе [17], выразим d_i через новый действительный параметр β :

$$d_i = \pm \frac{3\sqrt{\beta^2 - 1}}{4\sqrt{2}}, \quad \beta > 1. \quad (29)$$

Если $d_i > 0$ (знак “+” в (29)), то система (3) имеет следующие решения в виде ряда Лорана:

$$\tilde{\psi}_1 = \frac{\sqrt{2}(\beta + 1)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\xi^{-1} - \frac{c}{10}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{2}(\beta - 1)} + \frac{1}{2}\right) + O(\xi), \quad (30)$$

$$\tilde{\psi}_2 = -\frac{\sqrt{2}(\beta - 1)}{\sqrt{\beta^2 - 1}}\xi^{-1} + \frac{c}{10}\left(\frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\sqrt{2}(\beta + 1)} - \frac{1}{2}\right) + O(\xi). \quad (31)$$

Если существуют N_1 рядов Лорана типа $\tilde{\psi}_1$ и N_2 рядов Лорана типа $\tilde{\psi}_2$, то формула (14) дает

$$N_1 = \frac{\beta - 1}{\beta + 1} N_2. \quad (32)$$

Теорема вычетов для ψ^2 (уравнение (15)) дает $c\beta = 0$. Используя условие $\beta > 1$, мы получаем, что c должно быть равно нулю, так что мы повторили главный результат статьи [17]: уравнение Гинзбурга–Ландау не имеет эллиптических решений в виде бегущей волны. Отметим, что предложенное нами использование рядов Лорана функции $\psi(\xi)$ вместо рядов Лорана функции $M(\xi)$ позволяет упростить вычисления. Действительно, для проведения доказательства нам потребовалось вычислить всего по 2 коэффициента каждого из рядов ψ_1 и ψ_2 , тогда как при использовании рядов Лорана функции $M(\xi)$ требуется знание 16 коэффициентов (по 8 для каждого ряда) [17]. Для построения ряда Лорана $\psi(\xi)$ достаточно исходной системы, таким образом, можно сделать вывод, что исходная система (3) содержит больше информации для доказательства отсутствия эллиптических решений, чем равносильное ей уравнение (7). Рассмотрение случая $c = 0$ только усиливает данный вывод.

Рассмотрим решения в виде формальных рядов Лорана при $c = 0$:

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_1 = & \frac{\sqrt{2}(\beta + 1)}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \xi^{-1} - \frac{(\beta g_r - 5g_r - 5\sqrt{2(\beta^2 - 1)}g_i)}{3(7\beta + 5)} \xi + \\ & + \frac{1}{90(\beta + 1)(7\beta + 5)^2} \{32(\beta^2 - 1)(\beta - 8)g_i g_r + \\ & + \sqrt{2(\beta^2 - 1)}(122(\beta^2 - 1)g_i^2 + (11\beta^2 - 34\beta + 61)g_r^2)\} \xi^3 + \\ & + \frac{\beta - 1}{1890(\beta + 1)(3\beta + 1)(7\beta + 5)^3} \{24g_i^2 g_r (\beta - 1)(\beta + 1)(147\beta^2 + \\ & + 934\beta + 775) - 4g_r^3(231\beta^4 + 656\beta^3 - 18\beta^2 - 552\beta - 445) + \\ & + g_i \sqrt{2(\beta^2 - 1)}(20g_i^2(\beta^2 - 1)(399\beta + 349) - \\ & - 3g_r^2(483\beta^3 - 473\beta^2 - 2823\beta - 2435))\} \xi^5 + O(\xi^7), \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}_2 = & -\frac{\sqrt{2}(\beta - 1)}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \xi^{-1} - \frac{(\beta g_r + 5g_r + 5\sqrt{2(\beta^2 - 1)}g_i)}{3(7\beta - 5)} \xi + \\ & + \frac{1}{90(\beta + 1)(7\beta + 5)^2} \{32(\beta^2 - 1)(\beta + 8)g_i g_r + \\ & + \sqrt{2(\beta^2 - 1)}(122(\beta^2 - 1)g_i^2 - (11\beta^2 - 34\beta - 61)g_r^2)\} \xi^3 + \\ & + \frac{\beta + 1}{1890(3\beta - 1)(\beta - 1)(7\beta - 5)^3} \{24g_i^2 g_r (\beta^2 - 1)(147\beta^2 - \\ & - 934\beta + 775) - 4g_r^3(231\beta^4 - 656\beta^3 - 18\beta^2 + 552\beta - 445) - \\ & - g_i \sqrt{2(\beta^2 - 1)}(20g_i^2(\beta^2 - 1)(399\beta - 349) - \\ & - 3g_r^2(483\beta^3 + 473\beta^2 - 2823\beta + 2435))\} \xi^5 + O(\xi^7). \end{aligned} \quad (34)$$

Вычеты функций ψ^2 , ψ^4 и ψ^6 равны нулю при $c = 0$. Подставляя коэффициенты рядов Лорана $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_2$, мы преобразуем систему (17) в алгебраическую систему для

β , g_i и g_r . Она слишком громоздка, чтобы быть представленной здесь, но может быть легко решена с помощью системы компьютерной алгебры, например Maple или REDUCE. Условие $\beta > 1$ оставляет только одно решение этой системы:

$$g_r = 0, \quad g_i = 0. \quad (35)$$

В случае $d_i < 0$ мы также получаем, что из теоремы вычетов следует $g_r = 0$ и $g_i = 0$. Рассмотрим систему (3) с нулевыми значениями c , g_i и g_r , $d_r = 1/2$ и произвольным (отличным от нуля) значением d_i :

$$\begin{aligned} 2MM'' - M'^2 - 4M^2\psi^2 + 2M^3 &= 0, \\ M\psi' + M'\psi + d_iM^2 &= 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Прямая подстановка показывает, что

$$\tilde{\psi}_1(\xi) = \frac{3 + \sqrt{9 + 32d_i^2}}{4d_i\xi}, \quad \tilde{M}_1(\xi) = \frac{3(3 + \sqrt{9 + 32d_i^2})}{4d_i^2\xi^2} \quad (37)$$

и

$$\tilde{\psi}_2(\xi) = \frac{3 - \sqrt{9 + 32d_i^2}}{4d_i\xi}, \quad \tilde{M}_2(\xi) = \frac{3(3 - \sqrt{9 + 32d_i^2})}{4d_i^2\xi^2} \quad (38)$$

являются точными решениями системы (36). Эта система не имеет никаких других однозначных решений, следовательно, невозможность существования эллиптических решений в случае $d_r \neq 0$ полностью доказана. В наших вычислениях мы принимаем, что $s_i \neq 0$. В то же время наши результаты доказывают отсутствие эллиптических решений и в случае $s_i = 0$. Действительно, если $c = 0$, то случаи $s_i = 0$ и $s_i \neq 0$ совпадают. Преобразовать случай $\{s_i = 0, c \neq 0\}$ в рассмотренный случай $\{s_i \neq 0, c = 0\}$ можно простым добавлением постоянной к $\psi(\xi)$.

Таким образом, доказано, что функция $\psi(\xi)$ – решение системы (3) с $d_i \neq 0$ – не может быть эллиптической. Из формулы (5) следует, что в этом случае функция $M(\xi)$ также не может быть эллиптической.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решения в виде формального ряда Лорана могут быть полезны не только для поиска эллиптических решений, но и для доказательства их несуществования. С помощью метода Хона, основанного на теореме вычетов, доказано отсутствие у уравнения Гинзбурга–Ландау эллиптических решений в виде бегущих и стоячих волн. Наш результат усиливает результат Хона [17], доказавшего, что данное уравнение с отличными от нуля значениями параметров не имеет эллиптических решений в виде бегущей волны. Существование подобных эллиптических решений у нелинейного уравнения Шредингера [4] и решений в виде вырожденных эллиптических функций у самого кубического комплексного уравнения Гинзбурга–Ландау можно было

по аналогии с другими системами считать указанием на существование эллиптических решений рассматриваемого уравнения, поэтому полученный результат является весьма неожиданным. Он может способствовать нахождению аналитического вида решений уравнения Гинзбурга–Ландау, соответствующих известным решениям в виде рядов Лорана.

В статье показано, что применение метода Хона к исходной системе уравнений (3) более эффективно, чем к эквивалентному уравнению (7), поскольку решения уравнения (7) в виде формальных рядов Лорана являются только частью соответствующих решений системы (3), и подобное преобразование приводит к потере информации, необходимой для доказательства несуществования эллиптических решений.

Благодарности. Автор благодарен Р. Конту, привлечшему его внимание к статье [17], и А. Н. В. Хону за полезные комментарии. Эта работа была поддержана Программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-1685.2003.2) и Программой “Университеты России” (грант № 02.02.503).

Список литературы

- [1] *Н. А. Кудряшов.* Матем. модел. 1989. Т. 1. С. 151.
- [2] *G. S. Santos.* J. Phys. Soc. Japan. 1989. V. 58. P. 4301.
- [3] *R. Conte, M. Musette.* J. Phys. A. 1992. V. 25. P. 5609; *В. А. Антонов, Е. И. Тимошкова.* Астрон. журн. 1993. Т. 70. С. 265.
- [4] *R. Conte, M. Musette.* Physica D. 1993. V. 69. P. 1.
- [5] *N. N. Akhmediev, V. V. Afanasjev, J. M. Soto-Crespo.* Rev. Phys. E. 1996. V. 53. P. 1190.
- [6] *Е. И. Тимошкова.* Астрон. журн. 1999. Т. 76. С. 470; *R. Grimshaw, M. Pavlov.* Phys. Lett. A. 1999. V. 251. P. 25.
- [7] *M. Musette, R. Conte.* Physica D. 2003. V. 181. P. 70; nlin.PS/0302051.
- [8] *E. Fan.* J. Phys. A. 2003. V. 36. P. 7009.
- [9] *N. A. Kudryashov.* Nonlinear differential equations with exact solutions expressed via the Weierstrass function. nlin.CD/0312035.
- [10] *Е. И. Тимошкова, С. Ю. Вернов.* ЯФ. 2005. Т. 68. № 11. С. 2008; math-ph/0402049; *A. G. Nikitin, T. A. Barannyk.* Solitary wave and other solutions for nonlinear heat equations. math-ph/0303004; *N. A. Kudryashov.* Simplest equation method to look for exact solutions of nonlinear differential equations. nlin.SI/0406007.
- [11] *V. A. Vladimirov, E. V. Kufafina.* Rep. Math. Phys. 2004. V. 54. P. 261.
- [12] *R. Conte, M. Musette.* Solitary waves of nonlinear nonintegrable equations. nlin.PS/0407026; *С. Ю. Вернов.* From the Laurent-series solutions of nonintegrable systems to the elliptic solutions of them. astro-ph/0502356.
- [13] *Н. А. Кудряшов.* Аналитическая теория нелинейных дифференциальных уравнений. Москва–Ижевск: РХД, 2004.
- [14] *M. J. Ablowitz, A. Ramani, H. Segur.* Lett. Nuovo Cimento. 1978. V. 23. P. 333; J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 715; P. 1006.
- [15] *P. Painlevé.* Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles (Leçons de Stockholm, 1895). Paris: Hermann, 1896; Reprinted in: Oeuvres de Paul Painlevé. V. 1. Paris: Editions du CNRS, 1973.
- [16] *С. Ю. Вернов.* ТМФ. 2003. Т. 135. С. 409.
- [17] *A. N. W. Hone.* Physica D. 2005. V. 205. P. 292.
- [18] *В. Л. Гинзбург, Л. Д. Ландау.* ЖЭТФ. 1950. Т. 20. С. 1064.
- [19] *I. Aranson, L. Kramer.* Rev. Mod. Phys. 2002. V. 74. P. 99; cond-mat/0106115.
- [20] *M. C. Cross, P. C. Hohenberg.* Rev. Mod. Phys. 1993. V. 65. P. 851.

- [21] *M. van Hecke*. Phys. Rev. Lett. 1998. V. 80. P. 1896.
- [22] *G. P. Agrawal*. Nonlinear Fiber Optics. Boston: Acad. Press, 1989.
- [23] *M. van Hecke, C. Storm, W. van Saarloos*. Physica D. 1999. V. 133. P. 1; *Patt-sol/9902005*; *P. Manneville*. Dissipative Structures and Weak Turbulence. Boston: Acad. Press, 1990.
- [24] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев*. Гамильтонов подход в теории солитонов. М.: Наука, 1986; *А. Ньюэлл*. Солитоны в математике и физике. М.: Мир, 1989; *A. V. Mikhailov, E. A. Kuznetsov, A. C. Newell, V. E. Zakharov (eds)*. The Nonlinear Schrödinger Equations. Proc. Conf. on the Nonlinear Schrödinger Equation (Chernogolovka, Russia, 1994). Amsterdam: Elsevier, 1995; Physica D. 1995. V. 87. P. 1–380.
- [25] *K. Nozaki, N. Bekki*. J. Phys. Soc. Japan. 1984. V. 53. P. 1581; *N. Bekki, K. Nozaki*. Phys. Lett. A. 1985. V. 110. P. 133.
- [26] *W. van Saarloos, P. C. Hohenberg*. Physica D. 1992. V. 56. P. 303; Erratum. 1993. V. 69. P. 209.
- [27] *L. Brusch, A. Torcini, M. van Hecke, M. G. Zimmermann, M. Bär*. Physica D. 2001. V. 160. P. 127; *nlin.CD/0104029*; *M. van Hecke*. Physica D. 2003. V. 174. P. 134; *cond-mat/01100068*.
- [28] *F. Cariello, M. Tabor*. Physica D. 1989. V. 39. P. 77.
- [29] *Г. Бейтман, А. Эрдейи*. Высшие трансцендентные функции (эллиптические и автоморфные функции, функции Ламе и Матье). М.: Наука, 1967; *А. Гурвиц, Р. Курант*. Теория функций. М.: Наука, 1968.
- [30] *S. Yu. Vernov*. Construction of single-valued solutions for nonintegrable systems with the help of the Painlevé test. In: Proceedings of the International Conference “Computer Algebra in Scientific Computing” (St. Petersburg, Russia, July 12–19, 2004). Eds. V. G. Ganzha, E. W. Mayr, E. V. Vorozhtsov. München, Garching: Technische Univ., 2004. P. 457; *nlin.SI/0407062*.